

Я.Я.Дамбит

МАТРИЦЫ ЦИКЛОВ И РАЗРЕЗОВ ГРАФА
И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ПЛОСКОЙ
РЕАЛИЗАЦИИ

(ООБ-вычислительная математика)

Д и с с е р т а ц и я ,
представленная на соискание ученой
степени кандидата физико-математических
наук

Научный руководитель - кандидат физико-
математических наук Э.Я.Гринберг

Р и г а - 1968

Автоматизация проектирования электронных схем для новых вычислительных средств и других электронных устройств, при помощи современных дискретных вычислительных машин является весьма актуальной и трудной проблемой. Один из важных вопросов — это изучение топологии создаваемой схемы, для чего используется теория графов. Основной задачей в топологических исследованиях является изучение и разработка методов наложения данной электронной схемы на плоскость, т.е. определить, является ли соответствующий граф плоским. В диссертации изучены некоторые свойства плоских графов и разработан новый метод наложения графа на плоскость, который более удобен чем существующие методы для реализации на дискретных вычислительных машинах.

Диссертация состоит из введения и трех глав. Первая глава содержит два параграфа. В первом параграфе даны определения тех понятий теории графов, которые используются в диссертации. Сформулированы необходимые известные теоремы. Во втором параграфе разработаны некоторые способы определения числа деревьев графа. Для этого используются матрицы линейно независимых разрезов Q_f и линейно независимых циклов B_f .

Вторая глава также содержит два параграфа. В первом параграфе изучается система инвариантов графа, соответствующая коэффициентам характеристических полиномов матриц $Q_f \cdot Q_f^T$ и $B_f \cdot B_f^T$. Во втором параграфе сформулирована проблема биеизоморфизма. Найден некоторый класс графов. Для любых

двух графов из этого класса совпадение изучаемой системы инвариантов влечет за собой биеизоморфизм этих графов.

Третья глава состоит из трех параграфов. Первый параграф содержит несколько теорем о плоских графах. Эти теоремы являются продолжением исследований, которые проводились в первых двух главах для плоских графов. Доказано необходимое и достаточное условие для существования такой плоской реализации графа, при которой заданные вершины удовлетворяют дополнительным требованиям. Во втором параграфе приводится обзор методов для выяснения вопроса о том, является ли данный граф плоским или нет. Разработан метод, который по матрице линейно независимых циклов B_+ данного графа строит матрицу инциденции двойственного графа. Третий параграф содержит метод наложения графа на плоскость, используя матрицы инциденции данного и его двойственного графов.

В основном в диссертации используется терминология из книг [3, 24, 37, 44] по теории графов. Каждая глава имеет свою нумерацию теорем, лемм, примеров и рисунков. Список литературы имеет одну нумерацию, но состоит из двух частей. Вторая часть относится только к второму параграфу третьей главы.

Результаты исследований, содержащиеся в диссертации, докладывались на семинарах по теории графов в МГУ, в Институте математики СО АН СССР, на УШ Всесоюзном colloquium по общей алгебре.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [8 - 13].

Глава I. НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ДЕРЕВЬЕВ ГРАФА

§ I. Обозначения, понятия и теоремы

В этом параграфе будут даны определения тех понятий теории графов, которые используются в этой работе. Будут сформулированы необходимые теоремы с указанием литературы, в которой имеются доказательства. Рассматриваются примеры. Будем говорить, что дан граф G , если дано непустое множество X и множество $\mathcal{U}$ упорядоченных пар — дуг $(x, y)_i$ или множество V не упорядоченных пар-ребер $[x, y]_i$ ($x, y \in X$), граф $G=(X, \mathcal{U})$ будем называть ориентированным, а граф $G=(X, V)$ — неориентированным.

В данной работе рассматриваются графы, у которых как множество X , так и множества V и $\mathcal{U}$ являются конечными, поэтому все пары $[x, y]_i$ или $(x, y)_i$ можно занумеровать от 1 до некоторого m . Две пары $[x, y]_i$ и $[x, y]_j$, где $i \neq j$, будем считать различными. Граф у которого множество V или $\mathcal{U}$ содержит пары $v_i=[x, y]_i$ и $v_j=[x, y]_j$, или $u_i=(x, y)_i$ и $u_j=(x, y)_j$, где $i \neq j$ будем называть мультиграфом, а ребра (дуги) v_i и v_j (u_i и u_j) будем называть параллельными.

Пусть исходный граф $G=(X, \mathcal{U})$; граф G^* с множеством вершин X и множеством дуг (ребер) $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}$ будем называть частичным графом. Граф G^{**} с множеством вершины $X^{**} \subset X$ и множеством дуг (ребер) $\mathcal{U}^{**} \subset \mathcal{U}$, при чем $\mathcal{U}^{**} = \{(x, y) \mid v^{**}=[x, y]\}$ и $\mathcal{U}^{**} \in \mathcal{U}^{**} \Rightarrow x, y \in X^{**}$,

будем называть подграфом графа G [3, 39]. Знак $A \Rightarrow B$ означает, что из справедливости утверждения A следует справедливость утверждения B .

Элементы множества X будем называть вершинами.

Пары (x, x) , $[x, x]$ будем называть петлями. Для заданного графа $G=(X, V)$ и его подграфа $g=(X^*, U^*)$, можно определить другой подграф $cg=(X^{**}, V \setminus V^*)$, при чем из $v_k = [x_i, x_j] \in V^* \Rightarrow x_i, x_j \in X^*$ и $v_e = [x_p, x_q] \in V \setminus V^* \Rightarrow x_p, x_q \in X^{**}$. Ясно, что некоторые вершины графа G принадлежат как подграфу g , так и подграфу cg . Подграф cg будем называть дополнительным к подграфу g в заданном графе G .

Два неориентированных графа $G=(X, V)$ и $G'=(X', V')$ будем называть изоморфными, если существует взаимнооднозначное соответствие φ между вершинами множеств X и X' при котором для любой пары вершин справедливо

$$[x_i, x_j]_k \in V \Leftrightarrow [x'_i, x'_j]_e \in V'$$

$$x'_i = \varphi x_i$$

$$x'_j = \varphi x_j,$$

где запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что из справедливости утверждения A следует справедливость утверждения B и наоборот [16]. Ориентированные графы $G=(X, U)$ и $G'=(X', U')$ изоморфны, если

$$(x_i, x_j)_k \in U \Leftrightarrow (x'_i, x'_j)_e \in U'$$

$$x'_i = \varphi x_i$$

$$x'_j = \varphi x_j.$$

Граф $G=(X, \mathcal{U})$ будем называть полным, если

$$(x, y) \notin \mathcal{U} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{U},$$

где $x, y \in X, x \neq y$ или для любых различных вершин $x, y \in X$ имеется ребро $[x, y]$.

Через $|X|$ обозначим число элементов множества вершин X , а через $|V|$ число ребер (дуг) графа $G=(X, V)$. Во всем дальнейшем будем предполагать, что $|X|=n$ и $|V|=m$. Число $\mu = m - n + 1$ называем цикломатическим числом графа [3, 7].

Говорят, что дуга (x, y) исходит из вершины x и заходит в вершину y ($x \neq y$), а также, что дуга (x, y) инцидентна вершинам x и y . Ребро $[x, y]$ ($x \neq y$) инцидентно вершинам x и y .

Число ребер, инцидентных вершине x , будем называть степенью $d(x)$ вершины x графа G . Полустепенью исхода $d^+(x)$ вершины x будем называть число дуг, исходящих из вершины x , а полустепенью захода $d^-(x)$ вершины x — число дуг заходящих в вершину x [3].

Последовательность различных дуг

$$(x_{i_1}, x_{i_2})_i (x_{i_2}, x_{i_3})_j \dots (x_{i_p}, x_{i_q})_\ell (x_{i_q}, x_{i_r})_k$$

будем называть путем из вершины x_{i_1} в вершину x_{i_r} .

Цепью будем называть последовательность различных ребер

$$[x_{i_1}, x_{i_2}]_i [x_{i_2}, x_{i_3}]_j \dots [x_{i_p}, x_{i_q}]_\ell [x_{i_q}, x_{i_r}]_k,$$

соединяющих вершины x_{i_1} и x_{i_r} , причем как для дуг $(x_{i_p}, x_{i_q})_\ell$ и $(x_{i_r}, x_{i_t})_k$, так и для ребер $[x_{i_p}, x_{i_q}]$ и $[x_{i_r}, x_{i_t}]$, $i_p \neq i_r, i_q \neq i_t, i_p \neq i_t, k \neq \ell$.

Цикл $[x_{i_1}, x_{i_2}]_i [x_{i_2}, x_{i_3}]_j \dots [x_{i_p}, x_{i_1}]_k$, определяется аналогичным образом только имеет место совпадение первой и последней вершины. Последовательность дуг будем называть **орциклом** (ориентированным циклом), если ребра, соответствующие этим дугам образуют циклы.

Пусть граф $G=(X, V)$ имеет множество вершин X через $\bar{X}_i$ обозначим подмножество $\bar{X}_i \subseteq X$, состоящее из всех вершин, соединенных между собой хотя бы одной цепью. Подграф $G_i=(\bar{X}_i, V_i)$ будем называть компонентой связности, если множество $V_i \subseteq V$ состоит из всех ребер графа G , инцидентных вершинам $\bar{X}_i$. Если подмножество $\bar{X}_i$ совпадает с множеством X , то граф G является связным.

Если неориентированный граф, соответствующий ориентированному графу, является связным, то ориентированный граф также является связным.

В данной работе будем рассматривать только связные графы. Связный граф G является деревом, если он имеет n вершин и $n-1$ дуг(ребер). Ясно, что такой граф не содержит циклов.

Граф будем называть k -деревом, если он имеет k компонент связности и каждая компонента связности является деревом. Одну отдельную вершину также будем считать деревом. Через $V(x)$ обозначим множество ребер, инцидентных вершине x . Вершину $x \in X$ графа $G=(X, V)$ будем называть точкой сочленения, если граф $\hat{G}=(X \setminus x, V \setminus V(x))$ является несвязным.

Пусть связный граф $G=(X, V)$ имеет точку сочленения $x \in X$ и граф с множеством вершин $X \setminus x$ имеет r компонент связности $g_1^*, g_2^*, \dots, g_r^*$. Частями $g_1, g_2, \dots, g_r$ будем называть подграфы (блоки) [37], образованные каждой компонентой связности и всеми ребрами, инцидентными вершине x и другим вершинам соответствующей компоненты связности. Если граф G имеет $k > 1$ точек сочленения $x_1, x_2, \dots, x_k$, то сперва образуем части для точки сочленения x_1 , потом для x_1 и x_2 и т.д. Если граф G не имеет точек сочленения, но при удалении двух вершин и им инцидентных дуг (ребер) становится несвязным, то его будем называть 2-связным. Если граф G не является 2-связным, но при удалении трех вершин и им инцидентных дуг (ребер) он становится несвязным, то будем его называть 3-связным.

Пример I-1. Пусть имеем множество вершин $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ и множество ребер

$$V = \{[x_1, x_2]_1, [x_2, x_3]_2, [x_2, x_5]_3, [x_3, x_4]_4, [x_3, x_5]_5, [x_4, x_6]_6\}.$$

Этот граф является связным, его вершина x_3 является точкой сочленения, а подграфы $g_1=(x_1, V_1)$ и $g_2=(x_2, V_2)$ являются частями, если, например

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, V_1 = \{[x_1, x_2]_1, [x_2, x_3]_2, [x_2, x_5]_3, [x_3, x_5]_5\},$$

$$X_2 = \{x_3, x_4, x_6\}, V_2 = \{[x_3, x_4]_4, [x_4, x_6]_6\}.$$

Деревом этого графа будет подграф $G' = (X, V')$

$$V' = \{[x_1, x_2]_1, [x_2, x_3]_2, [x_3, x_5]_3, [x_3, x_4]_4, [x_4, x_6]_6\},$$

а подграф $G'' = (X, V'')$ будет 4-деревом

$$V'' = \{[x_2, x_3]_2, [x_3, x_5]_3\}.$$

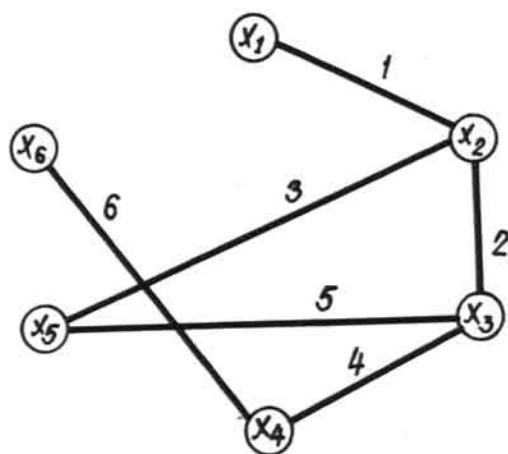


Рис. I-I.

Вершина x_1 имеет степень $d(x_1) = 1$, а вершина x_5 - $d(x_5) = 2$. Нетрудно проверить, что граф $G_1 = (X', V')$

$$X' = \{x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6\}$$

$$V' = \{[x'_1, x'_4]_1, [x'_4, x'_2]_2, [x'_2, x'_3]_3, [x'_2, x'_5]_4, [x'_5, x'_3]_5, [x'_3, x'_6]_6\}$$

является изоморфным исходному графу $G=(X, V)$, а взаимнооднозначное соответствие φ между множествами X и X' следующее

$$\begin{aligned}x'_1 &= \varphi x_6 \\x'_2 &= \varphi x_3 \\x'_3 &= \varphi x_2 \\x'_4 &= \varphi x_4 \\x'_5 &= \varphi x_5 \\x'_6 &= \varphi x_1.\end{aligned}$$

Если задан граф $G=(X, U)$ ($|X|=n$ и $|U|=m$), то можно определить матрицу инциденции вершин и дуг (ребер) этого графа. Вместо обозначения дуг $(x_k, x_e)_j$ или ребер $[x_k, x_e]_j$ будем использовать сокращенные обозначения $u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_m$. Пусть $u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_m$ — дуги, а $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ — вершины графа G , тогда элемент матрицы инциденции можно определить следующим образом

$$s_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{если дуга } u_j \text{ исходит из вершины } x_i; \\ -1, & \text{если дуга } u_j \text{ заходит в вершину } x_i; \\ 0, & \text{если дуга } u_j \text{ не инцидентна вершине } x_i. \end{cases}$$

Для неориентированного графа с ребрами $v_1, v_2, \dots, v_j, \dots, v_m$ полагаем

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } v_j \text{ инцидентно вершине } x_i; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица $S=\|s_{ij}\|$ является матрицей инциденции для дуг и вершин графа, а матрица $R=\|r_{ij}\|$ — матрицей инциденции для ребер и вершин графа [3, 44]. В дальнейшем эти матрицы

будем называть матрицами инциденции. Можно так пронумеровать дуги $u_1, u_2, \dots, u_{m-n+1}, \dots, u_m$, чтобы дуги $u_{m-n+2}, \dots, u_m$ образовали дерево, которое в дальнейшем будем называть деревом-остовом T [12]. Дуги $u_1, u_2, \dots, u_{m-n+1}$ образуют систему хорд H . В дальнейшем будем использовать именно такую нумерацию дуг или ребер графа. Матрицу инциденции можно записать в следующем виде:

$$S = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

где матрица A_{11} имеет размер $(n-1 \times m-n+1)$, матрица A_{12} размер $(n-1 \times n-1)$,

$$\|A_{21} \ A_{22}\| = \|s_{n1} \ s_{n2} \ \dots \ s_{nm}\|.$$

Согласно работы [40] S имеет ранг $n-1$.

Матрицу $\|A_{11} \ A_{12}\|$ будем обозначать через A .

Для ориентированных графов без петель имеют место некоторые теоремы.

Т е о р е м а I-I.

Значение определителя любой подматрицы порядка $n-1$ матрицы A равно ± 1 тогда и только тогда, когда дуги соответствующие столбцам образуют дерево в графе G ; в остальных случаях значение определителя равно 0.

Доказательство см. в [3] гл. I6, теорема 5, [44] теорема 5-2, [1] теорема 8.

Таким образом получаем $|A_{12}| = \pm 1$.

Т е о р е м а I-2.

Для ориентированного графа G значение определителя $|\|A\| \cdot \|A\|^T|$ равно числу деревьев [47]. τ означает траспонирование.

Доказательство см. в [3], гл. I6 теореме 6, [44] теорема 7-I, [1] теорема 7. Наряду с матрицей инциденции определим некоторые другие матрицы, как для ориентированных так и для неориентированных графов. Минимальное множество ребер V' неориентированного графа $G=(X, V)$ будем называть разрезом, если граф $G'=(X, V \setminus V')$ несвязен, причем никакое истинное подмножество множества V' этим свойством не обладает [44]. В книге [4] для понятия разреза употребляется слово коцикл. Все разрез графа можно занумеровать так, чтобы различные разрез имели различные номера.

Определим элемент q_{kj} матрицы разрезов Q следующим образом

$$q_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } k\text{-тый разрез содержит ребро } v_j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что матрица разрезов Q содержит в качестве подматрицы матрицу инциденции графа G . Каждый разрез определяет два непустых множества вершин Y и Z . В множество Y входят те и только те вершины, которые принадлежат одной компоненте связности. Для определения разреза в ориентированном графе необходимо произвольным образом выбрать направление разреза, т.е. направление между множествами Y и Z и заменить в определении слова

"ребер" словом "дуг". Элементы q_{kj} матрицы разрезов Q определим следующим образом

$$q_{kj} = \begin{cases} +1, & \text{если } k\text{-тый разрез содержит дугу } u_j \text{ и} \\ & \text{ее направление совпадает с направлением } k\text{-ого} \\ & \text{разреза,} \\ -1, & \text{если } k\text{-тый разрез содержит дугу } u_j \text{ и} \\ & \text{ее направление не совпадает с направлением} \\ & k\text{-ого разреза,} \\ 0, & \text{если } k\text{-тый разрез не содержит дуги } u_j. \end{cases}$$

Если расширить понятие разреза таким образом, что разрезом понимается также объединение нескольких разрезов, попарно не имеющих общих ребер. Тогда множество всех разрезов графа образует линейное векторное пространство. Для ориентированных графов употребляется обыкновенное сложение разрезов, а для неориентированных графов сложение по модулю 2. Можно определить базу этого линейного векторного пространства. Матрицу, состоящую из базовых разрезов иногда называют фундаментальной и обозначают через Q_f [44]. Для матрицы Q_f справедливы некоторые теоремы.

Т е о р е м а I-3

Ранг матрицы Q_f графа G с n вершинами равен $n-1$.

Это справедливо как для ориентированных, так и для неориентированных графов (следствие 4-I3 и теорема 5-I4) [44, 43].

Матрицу Q_f можно определить через подматрицы A_{11} и A_{12} матрицы A . Тогда получаем $Q_f = \|A_{12}^{-1} \cdot A_{11} E_{n-1}\|$,

где E_{n-1} — единичная матрица порядка $n-1$, а запись $A_{12}^{-1} \cdot A_{11} E_{n-1}$ означает, что к произведению матриц $A_{12}^{-1} \cdot A_{11}$ приписана единичная матрица E_{n-1} . Ясно, что при этом направление каждого разреза соответствует направлению одной дуги дерева-остова Γ и эти направления совпадают.

Т е о р е м а I-4.

Значение каждого определителя порядка $n-1$ матрицы Q_x графа G равно ± 1 , тогда и только и только тогда, когда дуги, соответствующие столбцам образуют дерево, остальных случаев значение определителя равно 0. Доказательство см. (теорема 4-18 и 5.17) [44].

Для графа G можно пронумеровать все циклы и определить матрицу циклов $C = \|c_{\ell j}\|$ следующим образом:

$$c_{\ell j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \ell\text{-тый цикл содержит ребро } v_j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если для каждого орицикла выбрать направление, то элементы матрицы орициклов C можно определить так:

$$c_{\ell j} = \begin{cases} +1, & \text{если } \ell\text{-тый орицикл содержит дугу } u_j \\ & \text{и направление дуги } u_j \text{ совпадает с направлением} \\ & \text{орицикла,} \\ -1, & \text{если } \ell\text{-тый орицикл содержит дугу } u_j \text{ и на-} \\ & \text{правление дуги } u_j \text{ не совпадает с направлением} \\ & \text{орицикла,} \\ 0, & \text{если } \ell\text{-тый орицикл не содержит дугу } u_j. \end{cases}$$

Матрицу орициклов в дальнейшем будем называть матрицей циклов.

Матрицу орциклов в дальнейшем будем называть матрицей циклов. Если понятие цикл расширить т.е. два, три и т.д. отдельных цикла без общих ребер (дуг) также считать циклом, то множество всех таких циклов графа образуют ^{линейное} векторное пространство. Для ориентированных графов употребляется обыкновенное сложение циклов, а для неориентированных графов сложение по модулю 2. Можно определить базу этого линейного векторного пространства. Матрицу, состоящую из базовых циклов иногда называют фундаментальной и обозначают через B_f .

Т е о р е м а I-5.

Ранг матрицы B_f графа $G=(X,U) (|X|=n, |U|=m)$ равен $m-n+1$.

Доказательство см. в [44] (теорема 4-9 и теорема 5-5) и также в [24] IX гл. § 8 [23, 43].

Всегда будем считать, что столбцы матриц A , Q_f и B_f соответствуют одним и тем же дугам (ребрам), т.е. одинаково упорядочены.

Т е о р е м а I-6.

Имеет место следующие равенства

$$\begin{aligned} A \cdot B_f^T &= 0, \\ Q_f \cdot B_f^T &= 0, \end{aligned}$$

где 0 обозначает нулевую матрицу, а T — транспонирование.

Доказательство см. в [44] (теоремы 4-12, 4-14, 5-4 и 5-13).

Матрицу B_f также можно определить при помощи подматриц A_{12} и A_{11} матрицы A .

Теорема I-7.

Для неориентированного графа G и матрицы B_f имеет место соотношение

$$B_f = \| E_{m-n+1} A_{11}^T (A_{12}^{-1})^T \|,$$

где E_{m-n+1} единичная матрица порядка $m-n+1$, а T обозначает транспонирование.

Теорема I-8.

Для ориентированного графа G и матрицы B_f имеет место

$$B_f = \| E_{m-n+1} [-A_{11}^T (A_{12}^{-1})^T] \|.$$

Теоремы I-7 и I-8 непосредственно следуют из теоремы I-6 и равенства $Q_f = \| A_{12}^{-1} \cdot A_{11} E \|$.

Матрицы A , Q_f , B_f для ориентированных графов обладают весьма важным свойством.

Матрицу будем называть вполне унимодулярной матрицей, если значение определителя любой ее квадратной подматрицы равно 0 , $+1$, или -1 . Ясно, что каждый элемент вполне унимодулярной матрицы также равен 0 , $+1$ или -1 . Для ориентированных графов справедлива следующая теорема (теорема 5-24 и 5-25)[44].

Т е о р е м а I-9 .

Матрицы A , Q_f и B_f ориентированного графа G являются вполне унимодулярными [44] .

В литературе такие матрицы называют также E -матрицами [44] или просто унимодулярными матрицами [42] .

П р и м е р I-2. Построим для следующего графа матрицу инцидентности, матрицу линейно независимых разрезов Q_f и матрицу линейно независимых циклов B_f . Ребра v_1, v_2, v_3, v_4 образуют дерево-остов T .

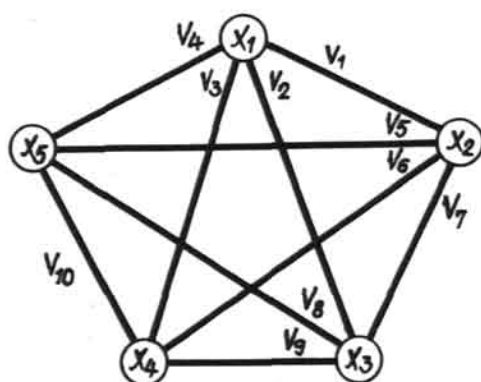


Рис. I-2.

$$R = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$A = \| A_{11} \ A_{12} \| = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \end{array}$$

В данном случае матрица

$$A_{12} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \end{array}$$

и, следовательно, $A = Q_f$, а матрица

$$B_f = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \end{array}$$

Ясно, что выполняется соотношение

$$A \cdot B_f^T = 0$$

В качестве примера рассмотрим граф, получающийся в задаче о трех домах и трех колодцах (граф Томсена гл.2I, § I [25], гл.I § 2, § 4 [6]).

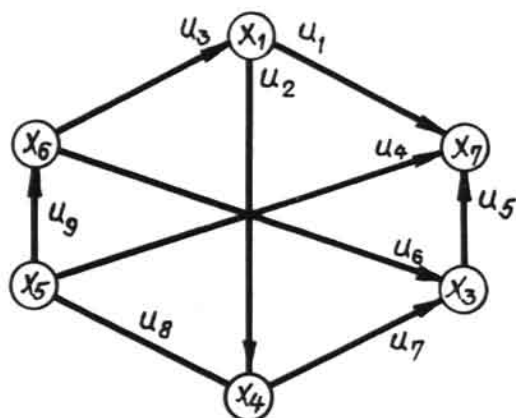


Рис. I-3

$$S = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \\ \begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Дерево-остов Γ образовано дугами u_1, u_5, u_7, u_8, u_9 , матрица A имеет следующий вид

$$A = \| A_{11} \ A_{12} \| = \begin{pmatrix} u_2 & u_3 & u_4 & u_6 & u_7 & u_5 & u_7 & u_8 & u_9 \\ \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{12}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{12}^{-1} \cdot A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$B_f = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_6 \ u_7 \ u_5 \ u_7 \ u_8 \ u_9$$

$$Q_f = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Легко проверить, что

$$A \cdot B_f^T = 0,$$

$$Q_f \cdot B_f^T = 0.$$

Введем операцию $\gamma_1[24]$, которую будем называть раздвоением ребра. Пусть граф $G=(X, V)$ имеет ребро $v_k = [x_i, x_j]$. Граф $\gamma_1 G$ содержит новую вершину z и вместо ребра v_k два ребра v_k' и v_k'' , т.е.

$\varphi_1 G = (X \cup z, (V \setminus v_k) \cup v_k' \cup v_k'')$, где $v_k' = [x_i, z]$ и $v_k'' = [z, x_j]$, $z \notin X$.

Два графа G_1 и G_2 будем называть гомеоморфными, если конечным числом операций φ_1 они могут быть преобразованы один в другой или в изоморфные графы. Понятие гомеоморфизма встречается в книге [24] и статье [27, 51], но в книге [37] оно имеет совсем другой смысл.

Ясно, что имеет смысл операция φ_1^{-1} , которую будем называть объединением двух ребер. Если граф $G = (X \cup z, V \cup v_k' \cup v_k'')$ имеет вершину z со степенью $d(z) = 2$, и ребра v_k' и v_k'' инцидентны вершине z , т.е. $v_k' = [z, x_i]$ и $v_k'' = [z, x_j]$, то граф $\varphi_1^{-1} G = (X, V \cup v_k)$, где $v_k = [x_i, x_j]$. Как операция φ_1 , так и φ_1^{-1} используются в работе [15].

На рисунке I-4 показан граф Томсена, который в дальнейшем будем называть графом первого типа и гомеоморфный ему граф.



Рис. I-4

На рисунке I-5 показан полный пятивершинный граф, который будем в дальнейшем называть графом второго типа и ему гомеоморфный граф.



Рис. I-5.

Граф $G=(X, V)$ называется плоским, если его можно изобразить на плоскости π так, что каждой вершине $x_i \in X$ графа G соответствует точка $\alpha(x_i)$ на плоскости, а каждому ребру $v_j \in V$ — простая открытая линия $\beta(v_j)$, лежащая в этой плоскости, и выполняются следующие условия :

1. если $x_{i_1} \neq x_{i_2}, x_{i_1}, x_{i_2} \in X$, то $\alpha(x_{i_1}) \neq \alpha(x_{i_2})$,
2. если $v_{j_1} \neq v_{j_2}, v_{j_1}, v_{j_2} \in V$, то линии $\beta(v_{j_1})$ и $\beta(v_{j_2})$ не имеют общих точек,
3. если вершина x_i инцидентна ребру v_j , то точка $\alpha(x_i)$ является концом линии $\beta(v_j)$.

Такое изображение плоского графа будем называть его правильной реализацией. Ясно, что плоский граф может иметь и неправильные реализации, при которых две линии имеют общую точку, не являющуюся вершиной.

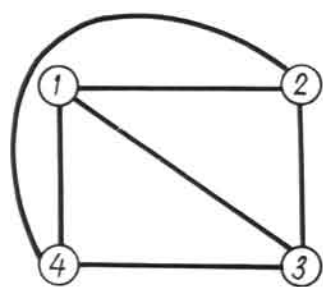
Для ориентированного графа линия $\beta(u_j)$ имеет такое же направление как и дуга u_j . Теперь можно сформулировать основную теорему для плоских графов. Эта теорема в литературе встречается под названием теоремы Понтрягина-Куратовского [3] (теорема 3-17 [44], или теоремы Куратовского XII тл. § 5 [24], [26]).

Т е о р е м а 1-10 .

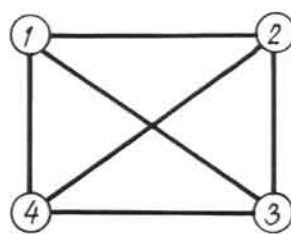
Граф G является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов первого и второго типа или им гомеоморфных (рис. 1-4 и 1-5).

Правильная реализация плоского графа G определяет некоторые важные понятия. При помощи правильной реализации плоского графа можно найти такую систему линейно независимых циклов $\mathcal{X}$, что каждое ребро принадлежит не более чем двум циклам линейно независимой системы. Ребра, образующие каждый цикл из системы $\mathcal{X}$ будем называть краем грани, а область плоскости ограниченную краем грани будем называть гранью. Две грани называются смежными, если их края имеют хотя бы одно общее ребро.

Если любую точку $\alpha(x_i)$ плоскости, соответствующую вершине x_i , принять как центр некоторой окружности с достаточно малым радиусом, то линии $\beta(u_j)$, соответствующие инцидентным вершине x_i ребрам, в определенном порядке пересекают окружности. Для сравнения порядка



I



I

Рис. 1-6.

пересечения окружности всех точек $\alpha(x_i)$, соответствующих всем вершинам графа, необходимо задать ориентацию плоскости π . Порядок пересечения окружности с центром $\alpha(x_i)$ линиями $\beta(v_{j_1}), \beta(v_{j_2}), \dots, \beta(v_{j_k})$ (ребра $j_1, j_2, \dots, j_k$ инцидентны вершине x_i) по отношению к ориентации плоскости π будем называть циклическим порядком [10, 77]. Запись циклического порядка для вершины $x \in X$ графа $G=(X, V)$

$$x[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}]$$

означает, что у точки $\alpha(x)$ линии

$$\beta(v_{j_1}=[x, x_{i_1}]), \beta(v_{j_2}=[x, x_{i_2}]), \dots, \beta(v_{j_k}=[x, x_{i_k}])$$

по отношению к ориентации плоскости π имеют следующий порядок пересечения окружности с центром $\alpha(x)$; за линией $\beta(v_{j_1})$ окружность пересекает линия $\beta(v_{j_2})$ и.т.д. за линией $\beta(v_{j_k})$ окружность пересекает $\beta(v_{j_1})$.

Пример 1-3.

Рассмотрим правильную и неправильную реализацию плоского графа G (полного четырехвершинного графа) и циклические порядки его вершин при заданной ориентации плоскости. (рис.1-1). Для первой - правильной реализации графа получаем следующие циклические порядки:

- 1 [2, 3, 4],
- 2 [1, 4, 3],
- 3 [1, 2, 4],
- 4 [2, 1, 3].

Для второй — неправильной реализации плоского графа получаем другие циклические порядки:

- 1 [2,3,4],
- 2 [3,4,1],
- 3 [1,2,4],
- 4 [1,2,3].

Для правильной реализации имеем следующие грани, образованные ребрами [1,2], [2,3] и [1,3]; [1,3], [3,4] и [1,4]; [1,2], [2,4] и [1,4] и одну бесконечную грань [2,3], [3,4] и [2,4].

Пусть граф G — правильная реализация и каждое ребро принадлежит хотя бы одному циклу. В этом случае можно построить другой граф G_* следующим образом: каждую грань t графа $G=(X,V)$ заменяем вершиной x' графа $G_*(X_*,V_*)$ $x' \in X_*$, кроме того, между вершинами x'_i и x'_j существует ребро $v'_k=[x'_i, x'_j]$, тогда и только тогда, если имеется ребро $v_k \in V$, принадлежащее краям граней t_i и t_j ($i \neq j$). Граф G_* будем называть двойственным графу G [38].

Т е о р е м а I-II .

В правильной реализации плоского графа G края различных конечных граней образуют фундаментальную систему циклов. Теорема I, гл.2I [3].

С л е д с т в и е

Плоский граф G имеет такие правильные реализации, при которых любая грань его является бесконечной. Двойственный

граф $G_* = (X_*, V_*)$ имеет $m - n + 2$ вершин, а число его ребер совпадает с числом ребер графа $G = (X, V)$ ($|V| = |V_*| = m$). Число вершин n , ребер m и граней f плоского графа G связывается соотношением (формула Эйлера)

$$n - m + f = 2.$$

В литературе [41, 2] имеется указание на то, что эту формулу доказал еще Декарт. Поэтому ее следовало бы называть формулой Декарта-Эйлера [14].

Можно определить двойственный граф чисто алгебраическим способом. Для этого необходимо ввести некоторые новые понятия.

Рангом g графа G будем называть разность $g = n - p$, где n — число вершин графа, p — число компонент связности. Если граф G связный, то $p = 1$. Пусть $G(cg)$ подграф дополнительный подграфу g такой, что $G(cg) \cup g = G$. Граф G' будем называть двойственным графу G , если существует такое взаимнооднозначное соответствие между ребрами этих графов, при котором

$$(*) \quad g[G'(ch)] = g(G') - \mu(h),$$

где $\mu(h)$ — цикломатическое число любого подграфа h графа G , $g(G')$ — ранг графа G' , $g[G'(ch)]$ — ранг подграфа $G'(ch)$ графа G' , соответствующего подграфу $G(ch)$.

Х. Уитни доказал эквивалентность этих определений для графов у которых каждое ребро принадлежит какому либо циклу, т.е. построенные графы на основе этих двух определений биизоморфны. Дальше имеется определение биизомор-

Эквивалентность обоих определений для вышеуказанных графов следует из доказательств теорем 29 и 30 [48]. Эти же теоремы можно найти в книге [44] (теоремы 3-16 и 3-15).

Пример I-4. Построим двойственный граф G_* для правильной реализации плоского графа G из примера I-3. Вершины двойственного графа G_* обозначим точками, а ребра — пунктиром. Если например в качестве подграфа выбрать просто вершины 1 и 2 и ребро $[1,2]$, то $\mu(h)=0$. Ранг двойственного графа G_* $\rho(G_*)=n'-p'=4-1=3$, а ранг подграфа $G_*(ch')$ $\rho(ch')=3$. Действительно соотношение (*) выполнено.

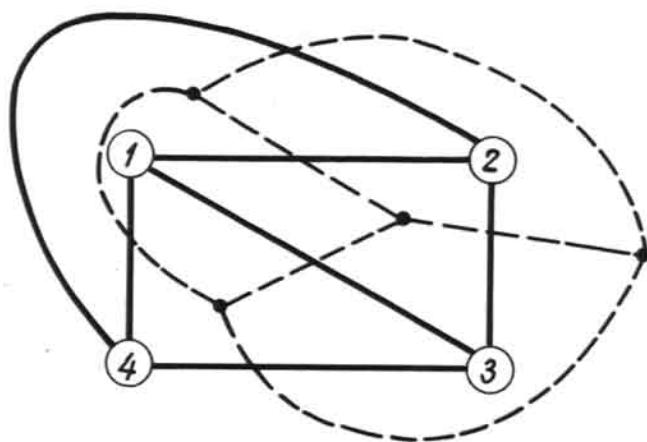


Рис. I-7

Так как между ребрами исходного плоского графа G и двойственного графа G_* существует взаимнооднозначное соответствие, то ребра двойственного графа G_* можно обозна-

читать так же, как и соответствующие ребра исходного графа. Из рисунка I-7 видно, что, например, разрезу исходного графа $\{[2,1], [2,3], [2,4]\}$ соответствует цикл двойственного графа G_* и циклу исходного графа G $\{[1,2], [2,3], [3,4], [4,1]\}$ соответствует разрез двойственного графа G_* .

В работах Х. Уитни [48-50] исследовались плоские графы при помощи двойственного графа. Он сформулировал и доказал теорему связывающую разрез и циклы исходного плоского графа с циклами и разрезами двойственного графа.

Т е о р е м а I-I2 .

Граф G имеет хотя бы один двойственный граф, тогда и только тогда, когда граф G является плоским.

Теорема 29 [48], теорема 3-I5 [44].

Т е о р е м а I-I3.

Графы G и G_* являются двойственными тогда, и только тогда, когда между ребрами этих графов можно установить такое взаимнооднозначное соответствие, при котором разрезу (циклу) в одном графе соответствует цикл (разрез) в другом графе. Теорема 2 [49].

Определим некоторые операции над графами. Пусть граф $G=(X, Y)$ имеет точку сочленения $x \in X$ и распадается на две части g_1 и g_2 . Такое расчленение графа G на несвязный граф G' с двумя частями g_1 и g_2 будем обозначать через y_2 , т.е. $y_2 G(g_1, x, g_2) = G'(g_1, x_1; g_2, x_2)$.

При этом вместо вершины $x \in X$ получаются две вершины x_{i_1} и x_{i_2} в частях g_1 и g_2 соответственно. Ясно, что естественным образом можно определить операцию φ_2^{-1} . Пусть граф $G(g_1, x_{i_1}; g_2, x_{i_2})$ имеет две компоненты связности g_1 и g_2 и в каждой компоненте связности имеется по одной выделенной вершине $x_{i_1}(g_1)$ и $x_{i_2}(g_2)$. Вершины x_{i_1} и x_{i_2} можно объединить в одну вершину и получить связный граф $G(g_1, x, g_2)$ с точкой сочленения x , т.е.

$$\varphi_2^{-1} G(g_1, x_{i_1}; g_2, x_{i_2}) = G(g_1, x, g_2).$$

Для следующей операции φ_3 необходимо рассмотреть граф G и подграфы h и ch , где ch — дополнение подграфа h до исходного графа G . В статье [28] для h или ch употребляется название гамак, если подграфы h и ch имеют точно две общие вершины. Пусть подграфы h и ch имеют только две общие вершины x_{i_1} и x_{i_2} и в подграфе h имеются ребра, инцидентные вершинам x_{i_1} и x_{i_2}

$$\begin{aligned} & [x_{i_1}, x_r], [x_{i_1}, x_t], \dots, [x_{i_1}, x_k] \\ \text{и} & [x_{i_2}, x_p], [x_{i_2}, x_q], \dots, [x_{i_2}, x_e]. \end{aligned}$$

После применения операции φ_3 в подграфе h вершина x_{i_1} заменяется вершине x_{i_2} и наоборот, т.е.

$$\begin{aligned} & [x_{i_2}, x_r], [x_{i_2}, x_t], \dots, [x_{i_2}, x_k] \\ \text{и} & [x_{i_1}, x_p], [x_{i_1}, x_q], \dots, [x_{i_1}, x_e]. \end{aligned}$$

Операцию φ_3 будем в дальнейшем называть инвертированием (перевертыванием) [29, 45, 46]. Тогда

$$G'' = \varphi_3 G.$$

Два графа G_1 и G_2 называются биизоморфными, если применением операций φ_2 , φ_2^{-1} и φ_3 к одному графу получаем граф изоморфный другому. В литературе [29, 50, 51] употребляется название 2-изоморфные графы. Операции φ_2 , φ_2^{-1} и φ_3 будем называть биизоморфными операциями.

Если рассматривать связанные графы, то естественно применять операции φ_2 и φ_2^{-1} поочередно, т.е. всегда после операции φ_2 применяется операция φ_2^{-1} . В дальнейшем два графа G_1 и G_2 будем называть биизоморфными, если применением операции φ_3 , поочередно φ_2 и φ_2^{-1} к одному графу, получаем граф изоморфный другому.

Х. Уитни [50] доказал следующую теорему о биизоморфных графах.

Т е о р е м а I-I4 .

Если существует взаимнооднозначное соответствие между ребрами двух графов G_1 и G_2 , при котором каждому циклу соответствует цикл, то графы G_1 и G_2 биизоморфны. [29, 44]

Для двух связанных биизоморфных графов G_1 и G_2 с матрицами линейно независимых разрезов (циклов) Q_{f1} и Q_{f2} (B_{f1} и B_{f2}), как следствие теоремы I-I4 справедливо следующее утверждение.

Для двух связанных биизоморфных графов G_1 и G_2 имеет место

$$\begin{aligned} & Q_{f1} \sim Q_{f2} \\ \text{и} & \\ & B_{f1} \sim B_{f2}, \end{aligned}$$

где " $\sim$ " означает эквивалентность [36], т.е. перестановками строк и столбцов можно получить тождественные матрицы.

Пример I-5.

Графы G_1 и G_2 рис. I-8 являются биезоморфными.

Пусть в графе G_1 $\{a_1, b, c_1, c_2, c_3, d_3\}$ - дерево-остов Π_1 ,
а $\{x_4, y, z_3, t_1, t_2, t_4\}$ - дерево-остов Π_2 .

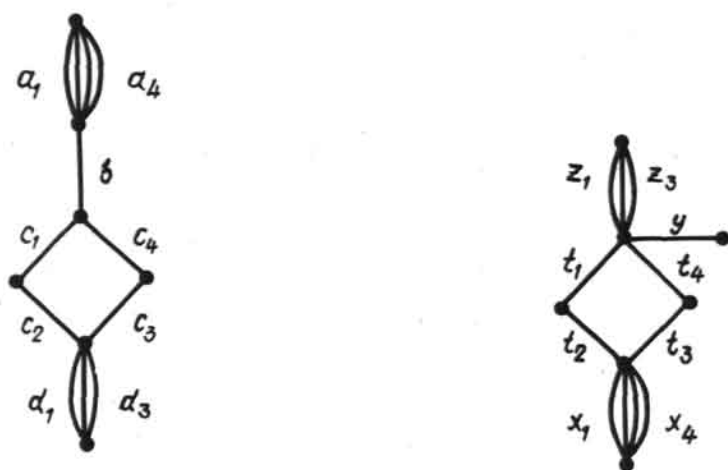


Рис. I-8

При этом получаем следующие матрицы линейно независимых разрезов (циклов). Упорядочим ребра $a_1, a_2, \dots, d_1, d_2, d_3$; $x_1, x_2, \dots, t_1, t_2, t_3, t_4$, так чтобы ребра $\{a_1, b, c_1, c_2, c_3, d_3\}$ и $\{x_4, y, t_1, t_2, t_3, z_3\}$ образовали дерево.

$$Q_{f1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$Q_{f2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$B_{f1} = B_{f2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим операцию φ_4 , которую будем называть стягиванием. Пусть граф $G = (X \cup x_p \cup x_q, V \cup V_1 \cup V_j)$ ($x_p, x_q \notin X$) имеет ребро $v_j = [x_p, x_q]$ и множество ребер V_1 ($v_j \notin V_1$) инцидентных вершинам x_p и x_q

$$V_1 = \{[x_p, x_{i_1}], \dots, [x_p, x_{i_k}], [x_q, x_{j_1}], \dots, [x_q, x_{j_e}]\}.$$

Для удобства и наглядности, например, вместо обозначения вершин x_{i_j} употребляется ее индекс i_j . Тогда под графом $G' = (X \cup z, V \cup V_1) = \varphi_4 G$ будем понимать такой граф, который получается, объединением вершин x_p и x_q в новую вершину z , удалением ребра $[x_p, x_q]$ и множества ребер и образованием нового множества ребер

$$V_1' = \{[z, i_1], [z, i_2], \dots, [z, j_1], \dots, [z, j_e]\}.$$

Через φ_4 также обозначим стягивание более одного ребра, т.е. объединение более одной пары вершин.

Пусть граф

$$G = (X \cup x_{j_1} \cup x_{j_2} \cup \dots \cup x_{j_{2k-1}} \cup x_{j_{2k}}; V \cup v_{i_1} \cup v_{i_2} \cup \dots \cup v_{i_k} \cup V_1) \\ (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{2k}} \notin X)$$

имеет ребра $v_{i_1} = [j_1, j_2], v_{i_2} = [j_3, j_4], \dots, v_{i_k} = [j_{2k-1}, j_{2k}]$ и множество ребер V_1 инцидентным вершинам $j_1, j_2, \dots, j_{2k}$

$$V_1 = \{[j_1, l_{11}], \dots, [j_1, l_{1p_1}], [j_2, l_{21}], \dots, [j_2, l_{2p_2}], \dots, \\ [j_{2k}, l_{2k1}], \dots, [j_{2k}, l_{2kp_{2k}}]\}.$$

Тогда под графом $\varphi_4 G = G' = (X \cup z_1 \cup z_2 \cup \dots \cup z_k, V \cup V_1')$ будем понимать граф, который получается, объединением вершин $j_1 \cup j_2, j_3 \cup j_4, \dots, j_{2k-1} \cup j_{2k}$ в новые вершины $z_1, z_2, \dots, z_k$

($z_1, z_2, \dots, z_k \notin X$) , удалением ребер $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$ и множества V_1 и образованием нового множества ребер

$$V_1' = \{ [z_1, l_{11}], \dots, [z_1, l_{1p_1}], [z_1, l_{21}], \dots, [z_1, l_{2p_2}], \dots, \\ [z_k, l_{2k-11}], \dots, [z_k, l_{2k-1p_{2k-1}}], [z_k, l_{2k1}], \dots, \\ [z_k, l_{2kp_{2k}}] \}.$$

Естественным образом стягивание переносится на ориентированные графы.

П р и м е р I-6. Если в графе G_1 примера I-5 стягивать ребро b , то получаем граф $y_4 G_1$ (рис. I-9).

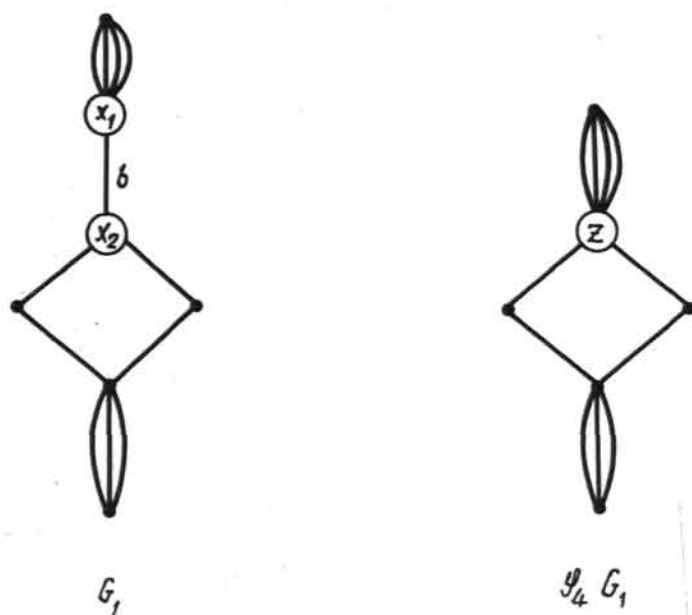


Рис. I-9

§ 2. Различные способы вычисления числа деревьев графа

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые способы определения числа деревьев графа; для этого используются матрицы линейно независимых разрезов Q_f и линейно независимых циклов B_f . В работе А.К.Кельманса [20] также предлагается некоторый метод для нахождения числа деревьев графа. Докажем некоторые теоремы относительно числа деревьев графа.

Т е о р е м а I-15.

Значение определителя $\begin{vmatrix} B_f \\ Q_f \end{vmatrix}$ равно числу деревьев ориентированного графа G [9].

На основании теоремы I-2 можно утверждать, что число деревьев графа G равно значению определителя матрицы $\|A \cdot A^T\|$, где матрица A является матрицей инцидентности графа G , без одной строки. Преобразуем этот определитель

$$\|A \cdot A^T\| = \|A_{11} A_{12}\| \cdot \|A_{11}^T A_{12}^T\| = \|A_{11} \cdot A_{11}^T\| + \|A_{12} \cdot A_{12}^T\|.$$

Теперь преобразуем определитель $\begin{vmatrix} B_f \\ Q_f \end{vmatrix}$. Для этого используем формулы I главы 2 § 5 [17]. Рассмотрим определитель Δ , который разбит на четыре блока

$$\Delta = \begin{vmatrix} N & M \\ L & K \end{vmatrix},$$

где N и K квадратные матрицы. Пусть $|N| \neq 0$, тогда имеем

$$\Delta = |N| \cdot \|K - L \cdot N^{-1} \cdot M\|.$$

Рассмотрим следующий определитель ($|A_{12}| = \pm 1$)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} B_f \\ Q_f \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} E_{m-n+1} & -A_{11}^T \cdot (A_{12}^{-1})^T \\ A_{12}^{-1} \cdot A_{11} & E_{n-1} \end{vmatrix} = \\ &= \left| \|E\| + \|A_{12}^{-1}\| \cdot \|A_{11} \cdot A_{11}^T\| \cdot \|A_{12}^{-1}\|^T \right| = \\ &= \left| \|A_{12}\| \cdot \left\{ \|E\| + \|A_{12}^{-1}\| \cdot \|A_{11} \cdot A_{11}^T\| \cdot \|A_{12}^{-1}\| \right\} \cdot \|A_{12}\|^T \right| = \\ &= \left| \|A_{12} \cdot A_{12}^T\| + \|A_{11} \cdot A_{11}^T\| \right|. \end{aligned}$$

Это доказывает справедливость теоремы I-I5.

Т е о р е м а I-I6.

Число деревьев ориентированного графа G равно значению определителей

$$|B_f \cdot B_f^T| = |Q_f \cdot Q_f^T|.$$

Преобразуя определитель $\begin{vmatrix} B_f \\ Q_f \end{vmatrix}$, получаем

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} B_f \\ Q_f \end{vmatrix} &= \left| \|E\| + \|A_{12}^{-1} \cdot A_{11}\| \cdot \|A_{11}^T \cdot (A_{12}^{-1})^T\| \right| = \\ &= \left| \|E\| + \|A_{11}^T \cdot (A_{12}^{-1})^T\| \cdot \|A_{12}^{-1} \cdot A_{11}\| \right|. \end{aligned}$$

Так как

$$B_f = \|E \quad [-A_{11}^T \cdot (A_{12}^{-1})^T]\|, \quad \text{то}$$

$$B_f^T = \left\| \begin{array}{c} E \\ -A_{12}^{-1} \cdot A_{11} \end{array} \right\|.$$

Преобразуем определитель

$$|B_f \cdot B_f^T| = \left| \left(\|E\| + \|0\| \cdot \|A_{11}^{-1} \cdot (A_{12}^{-1})^T\| \right) \cdot \left(\left\| \begin{smallmatrix} E \\ 0 \end{smallmatrix} \right\| + \left\| -A_{12}^{-1} \cdot A_{11} \right\| \right) \right| =$$

$$= \left| \|E\| + \|A_{11}^{-1} \cdot (A_{12}^{-1})^T\| \cdot \|A_{12}^{-1} \cdot A_{11}\| \right|.$$

Получаем

$$\left| \begin{smallmatrix} B_f \\ Q_f \end{smallmatrix} \right| = |B_f \cdot B_f^T|.$$

Аналогичными преобразованиями получаем, что

$$|Q_f \cdot Q_f^T| = \left| \|A_{12}^{-1} \cdot A_{11}\| \cdot \|A_{11}^{-1} \cdot (A_{12}^{-1})^T\| + \|E\| \right| \quad \text{и}$$

$$\left| \begin{smallmatrix} B_f \\ Q_f \end{smallmatrix} \right| = |Q_f \cdot Q_f^T|.$$

Это доказывает теорему I-16.

В дальнейшем каждый определитель порядка $m-n+1(n-1)$ подматрицы матрицы B_f (Q_f) будем называть наибольшим.

С л е д с т в и е . Каждый наибольший определитель матрицы B_f ориентированного графа G равен $\pm I$, тогда и только тогда, когда дуги, соответствующие столбцам образуют систему хорд [9].

На основании теоремы I-9 матрицы B_f и Q_f вполне унимодулярны. Используя теорему Лапласа, разложим определитель $|B_f|$ по строкам матрицы Q_f . Тогда у каждого наибольшего определителя матрицы Q_f , отличного от нуля, дуги, соответствующие столбцам, образуют дерево (теорема I-4) и значение таких определителей равно ± 1 . Ясно, что число различных наибольших определителей, значение которых равно ± 1 , совпадает с числом деревьев графа. Значение определителей $|B_f| = |B_f \cdot B_f^T| = |Q_f \cdot Q_f^T|$ равно числу деревьев графа и B_f вполне унимодулярная, то следствие справедливо.

Это является более коротким доказательством теоремы 4-II [44].

Если необходимо узнать число деревьев неориентированного графа, то можно произвольным образом ориентировать ребра и получить ориентированный граф, для которого имеют место теоремы I-15 и I-16.

На основании теоремы I-13 можно утверждать, что матрицы B_f и Q_f плоского графа G являются матрицами $Q_{f*} = B_f$ и $B_{f*} = Q_f$ для двойственного графа G_* . При этом используется то взаимнооднозначное соответствие между дугами графов G и G_* , которое определяет граф G_* как двойственный.

Если ребра данного плоского графа можно произвольным образом ориентировать, то ориентация ребер двойственного графа зависит от ориентации какого либо ребра и соотношений

$$Q_{f*} = B_f, \quad B_{f*} = Q_f.$$

Под ориентированием ребра $[x, y]_i \in V$ графа $G = (X, V)$ будем понимать замену ребра $[x, y]_i$ дугой $(x, y)_i$ или $(y, x)_i$.

Т е о р е м а I-17.

Число деревьев двойственного графа G_* равно числу деревьев плоского графа G [9]. Это следует из теоремы I-15.

Т е о р е м а I-18.

Ребра двойственного графа G_* , соответствующие хордам исходного плоского графа G , образуют дерево.

Это следует из того, что $Q_{f*} = B_f$ и следствия теоремы I-16. Этот же результат следует из теоремы I-13 и работы [19].

Будем обозначать через A_* матрицу инциденции двойственного графа G_* , без одной строки. Из матриц Q_f и Q_{f*} сложением строк и умножением их на $-I$ можно получить матрицы A и A_* .

Т е о р е м а I-19.

Значение определителя $\begin{vmatrix} A_* \\ A \end{vmatrix}$ с точностью до знака равно числу деревьев плоского графа G .

Справедливость теоремы следует из равенства $Q_{f*} = B_f$ и того, что выше указанные операции не меняют абсолютного значения определителя.

Т е о р е м ы I-I5 по I-I8 имели место для связных мультиграфов, без петель. В дальнейшем покажем, каким образом определяются матрицы B_f и Q_f для графов с петлями.

Пусть граф G не имеет петель. Матрицы B_f и Q_f можно построить по матрице A , у которой ребра, соответствующие последним $n-1$ столбцам, образуют дерево-остов T , а ребра соответствующие $m-n+1$ первым столбцам, образуют систему хорд H (n — число вершин, а m — число ребер графа G). Пусть граф $G_1 = (X, V_1)$ имеет одну петлю $v_k = [x_k, x_k]$. Построим матрицы Q_f и B_f для графа $G = (X, V)$ ($V = V_1 \cup v_k$) без петли v_k и определим матрицы Q_{f1} линейно независимых разрезов и B_{f1} линейно независимых циклов следующим образом

$$B_{f1} = \begin{bmatrix} 1 & 0_1 \\ 0_2 & B_f \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad Q_{f1} = \begin{bmatrix} 0_3 & Q_f \end{bmatrix},$$

где 0_3 — матрица столбец, содержащая $n-1$ нулевых элементов, 0_2 — матрица столбец, содержащая $m-n+1$ нулевых элементов, а 0_1 — матрица строка, содержащая m нулевых элементов. Запись $0_3 Q_f$ означает, что к матрице 0_3 приписывается матрица Q_f . Аналогичным образом получаем матрицы линейно независимых разрезов и линейно независимых циклов, когда граф имеет более одной петли.

Из определения матриц Q_{f1} и B_{f1} ясно, что теоремы (I-I5) + (I-I8) справедливы и для графов с петлями.

П р и м е р I-7.

Пусть граф G имеет матрицу инциденции (рис.1-10)

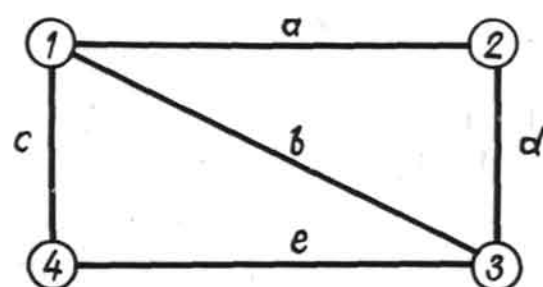


Рис. 1-10.

$$R = \begin{pmatrix} & a & b & c & d & e \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ориентируем граф G как рис. I-II.

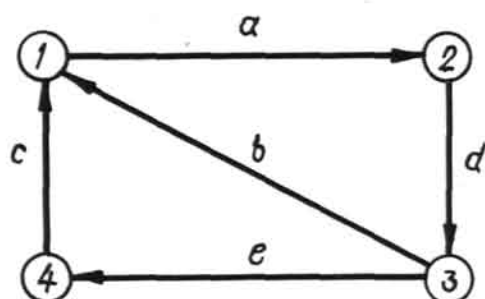


Рис. I-II

Тогда получаем

$$A = \begin{pmatrix} & a & b & c & d & e \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы B_f и Q_f имеют следующий вид:

$$B_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Q_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определим число деревьев этого графа различными способами

$$|Q_+ \cdot Q_+^T| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$|B_+ \cdot B_+^T| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$|A \cdot A^T| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

Применим теорему Лапласа и разложим определитель

$$\begin{vmatrix} B_+ \\ Q_+ \end{vmatrix}$$

по первым двум строкам

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} B_+ \\ Q_+ \end{vmatrix} &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^8 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^9 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{10} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{12} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8. \end{aligned}$$

На рис. I-12 видны деревья и соответствующие системы хорд.

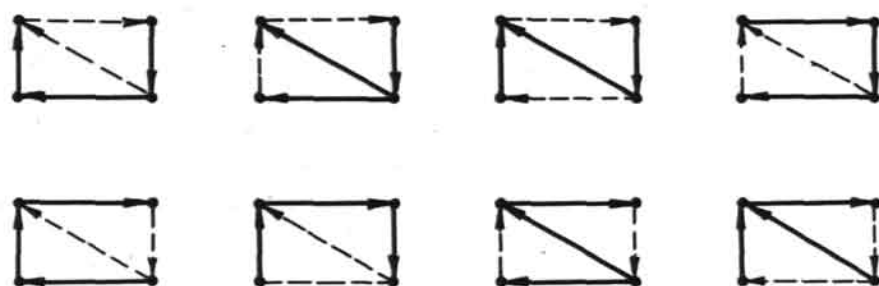


Рис. I-I2.

Построим для ориентированного графа Рис. I-I0 двойственный граф рис. I-I3 .

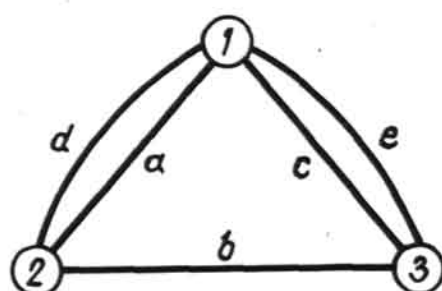


Рис. I-I3

с матрицей инциденции

$$R_* = \begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}.$$

Ориентируем двойственный граф так, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$B_{f*} = Q_f \quad \text{и} \quad Q_{f*} = B_f.$$

При построении ориентированного двойственного графа, выберем для ребра $a = [1, 2]$ направление из первой вершины во вторую, из равенства $Q_{f*} = B_f$ получаем направление ребер c, d, e и b . Таким образом, получаем следующие матри-

$$A_* = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} = Q_{f*}, \quad B_{f*} = \begin{array}{c|ccccc} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

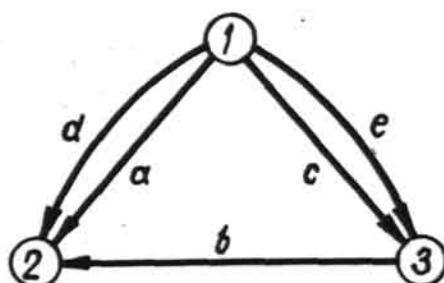


Рис. 1-14.

$$\begin{vmatrix} B_f \\ Q_f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8.$$

$$\begin{vmatrix} A_* \\ A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

Рисунок I-15 показывает деревья и хорды двойственного графа.

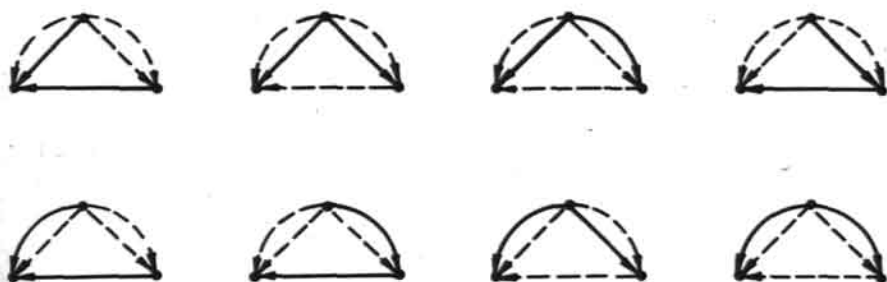


Рис. I-15.

Глава 2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ НЕКОТОРЫХ МАТРИЦ ГРАФА

§ I. Характеристические полиномы матриц без разрезов и орциклов

В теории графов важным направлением является исследование свойств различных систем инвариантов. Для этого, как правило, строятся полиномы, коэффициенты которых составляют систему изучаемых инвариантов. Важное место занимают вопросы о том, как различные системы инвариантов определяют граф, как построить граф с заданной системой инвариантов. Исследуются классы графов, для которых система инвариантов в некотором смысле определяет граф однозначно.

На важность исследований в этом направлении впервые указал Х.Уитни в своих работах [51,52] .

В этом направлении работают ряд отечественных ученых. В первую очередь необходимо отметить работы А.А.Зыкова и Л.М.Лихтенбаума , а также молодого московского математика А.К. Кельманса.

В работах [53,54,55] А.А.Зыкова рассматриваются размерностные и распределительные полиномы. В других работах [56-59] А.А.Зыкова исследовались некоторые функции от графов, определяемые линейными уравнениями.

В работах Л.М.Лихтенбаума [31-34] исследуются характеристические полиномы матрицы соседства вершин, матрицы

соседства ребер и матрицы смежности и их степеней. Матрицу соседства вершин графа получаем умножением матрицы инциденции R и ее транспонированной R^T . Матрицу соседства ребер получаем умножением матриц $R^T \cdot R$. Если в матрице соседства вершин элементы главной диагонали заменить нулями, то получаем матрицу смежности. Доказано несколько теорем о свойствах коэффициентов этих характеристических полиномов.

Работы А.К.Кельманса [20-22], связанные с исследованием характеристических полиномов матриц, получаемых заменой произвольной строки матрицы соседства вершин графа единицами. Им доказано, что свободный член характеристического полинома равен числу деревьев графа.

Работами по изучению различных систем инвариантов в Риге руководит Э.Я.Гринберг. Им же создан прием [18], для нахождения неизоморфных связных графов, имеющих одинаковую некоторую систему инвариантов.

В работе А.Беце [5] изучается характеристический полином $P(\lambda) = (-1)^n |A - \lambda E|$ матрицы смежности графа. Для каждого коэффициента полинома $P(\lambda)$ находится его содержательный смысл в терминах теории графов.

В этой главе рассматривается система инвариантов, соответствующая коэффициентам характеристических полиномов матриц линейно независимых разрезов и линейно независимых циклов графа.

Рассмотрим связный ориентированный граф. Изучим свойства коэффициентов характеристических полиномов матриц $\|Q_+, Q_+^T\|$, $\|B_+, B_+^T\|$ и $\|B_+, Q_+\|$, где Q_+ и B_+ являются матрицами линейно независимых разрезов и линейно независимых циклов графа G , T - означает транспонирование.

Пусть граф $G = (X, T \cup H)$ имеет множество вершин X и множество дуг, состоящее из дуг дерева-остова T и хорд H

$$(|X| = n, |T \cup H| = m, |T| = n-1, |H| = m-n+1).$$

Иногда вместо вершины x_i или дуги u_j будем писать индексы i или j соответственно. Вместе с графом G рассмотрим систему частичных графов

$$G_h = (X, T \cup H \setminus h), |h| = k, k = 1, 2, \dots, m-n,$$

у которых дуги дерева-остова T одни и те же, как и у графа G , а из множества хорд H удалено по одной или несколько (k) хорд. Таким образом рассматриваются все частичные графы, получаемые отбрасыванием одной из всех возможных комбинаций k хорд из системы хорд H .

Установим связь между матрицами линейно независимых циклов и матрицами линейно независимых разрезов таких графов. Напишем в развернутом виде матрицы B_+ и Q_+ для графа G .

$$B_+ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m-n+1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \alpha_{ij} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$Q_f = \begin{pmatrix} & 1 & 2 & \dots & m-n+1 \\ & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{ji} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & 0 & \dots & 1 \\ & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{ji} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases}$ $j = 1, 2, \dots, n-1, i = 1, 2, \dots, m-n+1, (\|\alpha_{ji}\| = A_{12}^{-1} \cdot A_{11})$.

Дуги системы хорд H обозначены через $1, 2, \dots, m-n+1$, а дуги дерева-остова — через $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$.

Через B_{fh} обозначим подматрицу матрицы B_f , у которой удалены k строк $i_1, i_2, \dots, i_k$ и k столбцов $i_1, i_2, \dots, i_k$, соответствующих множеству хорд $h = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ($\|h\| = k, k = 1, 2, \dots, m-n$). Через Q_{fh} обозначим подматрицу матрицы Q_f , не содержащую столбцы $i_1, i_2, \dots, i_k$.

Если в частичном графе G_h и исходном графе G одни и те же дуги образуют дерево-остов Γ , то дерево-остов Γ однозначно определяет матрицы линейно независимых разрезов и следовательно матрицы линейно независимых циклов этих графов. Имеет место

Л е м м а 2-1. Для частичных графов $G_h = (X, T \cup H \setminus h)$

($|h| = k, k = 1, 2, \dots, m-n$) матрицы линейно независимых разрезов и линейно независимых циклов равны соответственно матрицам

Q_{fh} и B_{fh} графа $G = (X, T \cup H)$.

Рассмотрим граф $G = (X, T \cup H)$ с деревом-остовом Γ $\Gamma = \{t_1 = (i_p, j_q), t_2 = (i_r, j_s), \dots, t_{n-1} = (i_v, j_w)\}$ и графы $G_t, |t| = \ell$, $\ell = 1, 2, \dots, n-2$, $G_t |t| = 1$ обозначает граф, получаемый из графа G стягиванием двух смежных вершин и удалением

только одной дуги дерева-остова Γ инцидентной этим двум вершинам. G_t ($|t|=2$) обозначает граф, получаемый из графа G стягиванием, например, вершин j_p и j_q , j_r и j_s и удалением дуг $t_1 = (j_p, j_q)$ и $t_2 = (j_r, j_s)$ дерева-остова Γ ($t_1, t_2 \in \Gamma$). Через G_t ($|t|=n-2$) обозначены графы, получаемые из графа G стягиванием $n-2$ пар вершин и удалением $n-2$ дуг дерева-остова Γ . Ясно, что при таком стягивании множество хорд H не меняется, но некоторые хорды могут преобразовываться в петли.

Пусть B_{+t} , $|t|=e$, $e=1, 2, \dots, n-2$ такие подматрицы матрицы B_+ , у которых отброшены $1, 2, \dots, n-2$ столбцов, соответствующих дугам дерева-остова Γ . Пусть Q_{+t} такие подматрицы Q_+ , у которых не имеются $1, 2, \dots, n-2$ столбцов и строк, соответствующих дугам дерева-остова Γ .

Л е м м а 2-2. Для графа G_t матрицы линейно независимых разрезов и линейно независимых циклов равны соответственно матрицам Q_{+t} и B_{+t} графа G .

Дуги дерева-остова Γ графа G составляют дерево-остов для графа G_t . Матрица инциденции R_t графа G_t отличается от матрицы инциденции R графа G тем, что содержит на одну строку меньше и одна строка является суммой двух строк матрицы инциденции R , соответствующих стянутым вершинам. При образовании матриц линейно независимых разрезов используются не все n строк матрицы инциденции, а только любые $n-1$ строки. Это доказывает справедливость леммы для $|t|=1$. При помощи индукции получаем справедливость леммы для $|t|=2, 3, \dots, n-2$.

Теперь перейдем к рассмотрению характеристических полиномов упомянутых матриц. Будем исследовать полиномы

$$Q_f^*(\lambda) = |Q_f \cdot Q_f^T + \lambda E|, \quad B_f^*(\lambda) = |B_f \cdot B_f^T + \lambda E|$$

и

$$P(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} B_f \\ Q_f \end{pmatrix} + \lambda E \right|,$$

где через E обозначены единичные матрицы порядка $n-1$, $m-n+1$ и m соответственно.

$$Q_f^*(\lambda) = \lambda^{n-1} + a_{n-2}^* \lambda^{n-2} + \dots + a_1^* \lambda + a_0^*,$$

$$a_\ell^* = \sum_{|t|=\ell} |Q_{ft} \cdot Q_{ft}^T|, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, n-2,$$

где $Q_{ft} = Q_f$, если t пустое множество ($|t|=0$).

$$B_f^*(\lambda) = \lambda^{m-n+1} + b_{m-n}^* \lambda^{m-n} + \dots + b_k^* \lambda + \dots + b_1^* \lambda + b_0^*,$$

$$b_k^* = \sum_{|h|=k} |B_{fh} \cdot B_{fh}^T|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-n,$$

где $B_{fh} = B_f$, если h пустое множество ($|h|=0$).

$$P(\lambda) = \lambda^m + c_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0.$$

Коэффициенты полинома $P(\lambda)$ равны сумме чисел деревьев различных подграфов, получаемых из исходного графа при стягивании дуг дерева-остова Π или удалении дуг из системы хорд H , или при использовании этих обеих операций. В частности $c_0 = a_0^* = b_0^*$ (теоремы I-15 и I-16), $c_1 = a_1^* + b_1^*$ и $c_m = m$ (m — число дуг

исходного графа).

Л е м м а 2-3. Для графа G и полинома $Q_t^*(\lambda)$, $|Q_t^* \cdot Q_t^\Gamma|$ равен числу деревьев графа G_t , образованного стягиванием соответствующих $|t|$ дуг дерева-остова Γ ($|t|=0, 1, 2, \dots, n-2$). В частности a_0^* равно числу деревьев исходного графа $G_\phi = G$.

Справедливость леммы следует из теоремы I-16 и леммы 2-2.

С л е д с т в и е

Для графа G и полинома $Q_t^*(\lambda)$ коэффициент a_ℓ^* равен числу деревьев всех графов, образованных стягиванием любых ℓ из $n-1$ дуг дерева-остова Γ ($\ell=0, 1, 2, \dots, n-2$).

Л е м м а 2.4. Для графа G и полинома $B_t^*(\lambda)$, $|B_t^* \cdot B_t^\Gamma|$ равен числу деревьев графа G_h , получаемого при удалении соответствующих $|h|$ хорд из системы хорд H ($|h|=0, 1, 2, \dots, m-n$). В частности b_0^* равно числу деревьев исходного графа $G_\phi = G$. Справедливость леммы следует из теоремы I-16 и леммы 2-1.

С л е д с т в и е

Для графа G и полинома $B_t^*(\lambda)$ коэффициент b_k^* равен числу деревьев всех графов G_h , получаемых при удалении любых k из $m-n+1$ хорд системы H ($k=0, 1, 2, \dots, m-n$).

Теперь установим связь между коэффициентом a_ℓ^* полинома $Q_t^*(\lambda)$ и $\ell+1$ - деревьями, а также между коэффициентом b_k^* полинома $B_t^*(\lambda)$ и связными частичными графами графа G с цикломатическим числом $\mu = k$.

Л е м м а 2-5. Если граф G_{t_i} получен стягиванием дуги $t_i = (j_p, j_q)$ дерева-остова Γ , то число деревьев графа G_{t_i} равно числу 2-деревьев графа G таких, что вершины j_p и j_q не принадлежат одной компоненте связности.

Так как в дереве между любыми двумя различными вершинами имеется только одна цепь, то дуги, образовавшие дерево в графе G_{t_i} образуют 2-дерево в графе G , причем вершины j_p и j_q не принадлежат одной компоненте связности. Значение определителя $|Q_{t_i} \cdot Q_{t_i}^T|$ равно числу деревьев графа G_{t_i} . Это и доказывает справедливость леммы.

При стягивании различных дуг дерева-остова Γ могут образоваться такие графы $G_{t_{i1}}$ и $G_{t_{i2}}$, у которых одни и те же дуги образуют дерево как в графе $G_{t_{i1}}$, так и в графе $G_{t_{i2}}$. Так как мы стягиваем по одной все дуги дерева-остова Γ , то на основании лемм 2-3 и 2-5 справедлива

Т е о р е м а 2-1.

Для графа G и полинома $Q_f^*(\lambda)$ коэффициент a_f^* не меньше числа всех 2-деревьев графа G .

Точно такие же рассуждения приводят к справедливости следующих общих леммы и теоремы 2-2.

Л е м м а 2-6. Если граф G_t ($|t| = \ell, \ell = 1, 2, \dots, n-2$), получен стягиванием дуг $(j_p, j_q), (j_r, j_s), \dots, (j_v, j_w)$ дерева-остова Γ , то число деревьев графа G_t равно числу $\ell + 1$ - деревьев графа G таких, что вершины $j_p \vee j_q, j_r \vee j_s,$

и т.д. j_v и j_w не принадлежат одной компоненте связности.

Т е о р е м а 2-2.

Для графа G и полинома $Q_f^*(\lambda)$ коэффициент a_e^* не меньше числа всех $e+1$ - деревьев графа G ($e=0, 1, 2, \dots, n-2$).
Теперь перейдем к рассмотрению полинома $B_f^*(\lambda)$.

Л е м м а 2-7. Число деревьев графа $G_h = (X, T \cup H \setminus h)$ равно числу всех связных частичных графов графа G с цикломатическим числом $\mu=1$, содержащих хорду h .

Каждый определитель порядка $m-n$ матрицы B_{fh} равен ± 1 тогда и только тогда, когда дуги, соответствующие столбцам, образуют систему хорд графа G_h (следствие теоремы I-16). Следовательно, дуги, не входящие в систему хорд образуют дерево этого графа и вместе с хордой h образуют связный частичный граф графа G . Так как значение определителя $|B_{fh}, B_{fh}^T|$ равно числу всех систем хорд графа G_h , то из этого следует справедливость леммы.

Так как удаляется по одной все хорды из системы хорд H , то на основании леммы 2-4 и 2-7 получаем

Т е о р е м у 2-3.

Для графа G и полинома $B_f^*(\lambda)$ коэффициент b_1^* не меньше числа всех связных частичных графов с цикломатическим числом $\mu=1$.

Л е м м а 2-3. Число деревьев графов G_n равно числу всех связных частичных графов графа G с цикломатическим числом $\mu = \kappa (|h| = \kappa, \kappa = 0, 1, 2, \dots, m-n)$.

Т е о р е м а 2-4 .

Для графа G и полинома $B_f^*(\lambda)$ коэффициент b_κ^* ($\kappa = 0, 1, 2, \dots, m-n$) не меньше числа всех частичных связных графов с цикломатическим числом $\mu = \kappa$.

Коэффициенты полиномов $Q_f^*(\lambda)$, $B_f^*(\lambda)$ и $P(\lambda)$ зависят от выбора дерева-остова Γ исходного графа G . Это показывает следующий

П р и м е р 2-1. Пусть дан граф.

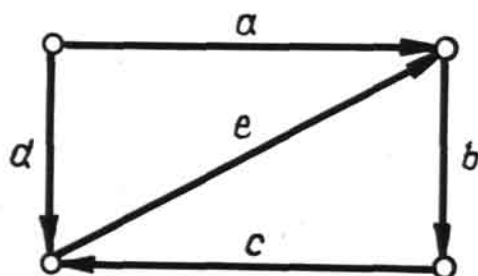


Рис.2-1

Выберем два различных дерева-остова Γ_I и Γ_{II} ($\Gamma_I = \{a, b, c\}$ и $\Gamma_{II} = \{c, d, e\}$), тогда получаем следующие матрицы линейно независимых циклов и матрицы ли-

нейно независимых циклов и матрицы линейно независимых разрезов

$$B_{fI} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Q_{fI} = \begin{matrix} & d & e & a & b & c \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

$$B_{fII} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Q_{fII} = \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Для этих матриц получаем следующие полиномы

$$Q_{fI}^*(\lambda) = \lambda^3 + 8\lambda^2 + 15\lambda + 8$$

$$B_{fI}^*(\lambda) = \lambda^2 + 7\lambda + 8$$

$$P_I(\lambda) = \lambda^5 + 5\lambda^4 + 15\lambda^3 + 25\lambda^2 + 22\lambda + 8$$

$$Q_{fII}^*(\lambda) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 14\lambda + 8$$

$$B_{fII}^*(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 8$$

$$P_{II}(\lambda) = \lambda^5 + 5\lambda^4 + 14\lambda^3 + 22\lambda^2 + 20\lambda + 8.$$

В дальнейшем покажем, что можно определить другие полиномы, коэффициенты которых не зависят от выбора дерева-остова.

Рассмотрим матрицы линейно независимых циклов B_{f_0} и линейно независимых разрезов Q_{f_0} , в которых вместо элементов $\pm I$, имеются обозначения дуг с соответствующим знаком. Напомним, что в матрицах B_f и Q_f столбцы, соответствующие дугам

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_{m-n+1}, u_{m-n+2}, \dots, u_m\}$$

графа $G = (X, U)$, расположены в следующем порядке

$$1, 2, \dots, m-n+1, m-n+2, \dots, m$$

и дуги $u_{m-n+2}, \dots, u_m$ образуют дерево-остов Γ . Тогда

$$Q_{f_0} = Q_f \cdot U_0,$$

$$B_{f_0} = B_f \cdot U_0,$$

где

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{m-n+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & u_m \end{pmatrix}.$$

Для матриц Q_{f_0} и B_{f_0} построим полиномы

$$\hat{Q}(\lambda) = |Q_{f_0} \cdot Q_{f_0}^{\Gamma} + \lambda E|$$

и

$$\hat{B}(\lambda) = |B_{f_0} \cdot B_{f_0}^{\Gamma} + \lambda E|,$$

где через E обозначены единичные матрицы порядков $n-1$ и $m-n+1$ соответственно

$$Q(\lambda) = \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_e \lambda^e + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

$$B(\lambda) = \lambda^{m-n+1} + b_{m-n} \lambda^{m-n} + \dots + b_k \lambda^k + \dots + b_1 \lambda + b_0,$$

причем

$$a_e = N \left\{ \sum_{|t|=e} |Q_{tot} \cdot Q_{tot}^{\Pi}| \right\}, \quad e=0, 1, 2, \dots, n-2,$$

$$b_k = N \left\{ \sum_{|h|=k} |B_{tot} \cdot B_{tot}^{\Pi}| \right\}, \quad k=0, 1, 2, \dots, m-n,$$

где через $N\{P(u_1, u_2, \dots, u_m)\}$ обозначено число различных членов полинома $P(u_1, u_2, \dots, u_m)$.

Далее докажем некоторые свойства коэффициентов a_e и b_k полиномов $Q(\lambda)$ и $B(\lambda)$ графа G с деревом-остовом

$$\Pi = \{u_{m-n+2}, \dots, u_m\}.$$

Теорема 2-5.

Для графа G и полинома $Q(\lambda)$ значение коэффициентов a_e ($e=0, 1, 2, \dots, n-2$) равно числу всех $e+1$ -деревьев графа G .

Под I -деревом будем понимать дерево графа G .

Из теоремы I-4 следует, что значение любого определителя порядка $n-1-e$ матрицы Q_{tot} ($e=0, 1, 2, \dots, n-2, |t|=e$)

отлично от нуля тогда и только тогда, когда дуги, соответствующие $n-1-\ell$ столбцам, образуют дерево в графе G_t ($G_\phi = G$). Эти же дуги образуют $\ell+1$ - дерево в графе G . Поэтому $|a_{tot} \cdot a_{tot}^T|$ есть полином, у которого каждый член состоит из обозначений $n-1-\ell$ вторых степеней дуг, которые образуют $\ell+1$ - дерево графа G . На основании леммы 2-6 и теоремы 2-2 следует справедливость теоремы 2-5.

С л е д с т в и е 2-5-1.

Значение коэффициента a_{n-2} полинома $Q(\lambda)$ равно общему числу дуг графа G , принадлежащих хотя бы одному дереву.

Если граф G не имеет петель, то $a_{n-2} = m$.

С л е д с т в и е 2-5-2.

Число всех частичных графов графа G с цикломатическим числом $\mu=0$ равно $Q(1)$.

Т е о р е м а 2-6.

Для графа G и полинома $B(\lambda)$ значение коэффициента b_k ($k=0, 1, 2, \dots, m-n$) равно числу всех частичных связанных графов с цикломатическим числом $\mu=k$.

При $k=0$ получаем число деревьев графа G (теорема I-16).

На основании следствия теоремы I-16 получаем, что значение определителя матрицы B_{tot} порядка $m-n+1-k$ ($k=0, 1, 2, \dots, m-n$, $B_{tot} = B_{to}$) отлично от нуля тогда и

только тогда, когда дуги, соответствующие $m-n+1-k$ столбцам, образуют систему хорд в графе G_n . Каждой системе хорд графа G_n соответствует в графе G частичный связный граф с $n-1+k$ дугами и цикломатическим числом $\mu=k$. Ясно, что $|B_{foh} \cdot B_{foh}^T|$ является полиномом, у которого каждый член состоит из произведений $m-n+1-k$ вторых степеней обозначений дуг, которые образуют систему хорд графа G_n . На основании леммы 2-8 и теоремы 2-4 следует справедливость теоремы 2-6.

С л е д с т в и е 2-6-1.

Значение коэффициента b_{m-n} полинома $B(\lambda)$ равно числу дуг графа G , принадлежащих хотя бы одному циклу.

Если считать исходный граф G частичным графом с цикломатическим числом $\mu=m-n+1$, то справедливо

С л е д с т в и е 2-6-2.

Число всех частичных связных графов графа G равно $B(1)$.

П р и м е р 2-2. Вычислим полиномы $Q(\lambda)$ и $B(\lambda)$ для графа из примера 2-1 (рис. 2-1)

$$B_{fo} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

$$b_0 = |B_{fo} \cdot B_{fo}^T| = \begin{vmatrix} d^2 + a^2 + b^2 + c^2 & -b^2 - c^2 \\ -b^2 - c^2 & e^2 + b^2 + c^2 \end{vmatrix}$$

Вместо вторых степеней будем писать обозначения дуг.

Получаем

$$b_0 = de + db + dc + ae + ab + ac + be + ce$$

$$b_0 = b_0^* = 8$$

$$|B_{fod} \cdot B_{fod}^T| = e + b + c$$

$$|B_{foe} \cdot B_{foe}^T| = d + a + b + c$$

$$b_1^* = a + 2b + 2c + d + e$$

$$b_1^* = 7 \quad b_1 = 5$$

$$B(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 8$$

$$Q_{fo} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$a_0 = |Q_{fo} \cdot Q_{fo}^T| = \begin{vmatrix} d+a & d & d \\ d & d+e+b & d+e \\ d & d+e & d+e+c \end{vmatrix}$$

$$a_0 = abc + abd + abe + acd + ace + bcd + bde + cde$$

$$a_0 = a_0^* = 8$$

$$|Q_{toa} \cdot Q_{toa}^T| = \begin{vmatrix} d+e+b & d+e \\ d+e & d+e+c \end{vmatrix} = bc + bd + be + cd + ce$$

$$|Q_{tob} \cdot Q_{tob}^T| = ac + ad + ae + cd + de$$

$$|Q_{toc} \cdot Q_{toc}^T| = ab + ad + ae + bd + de$$

$$a_1^* = ab + ac + 2ad + 2ae + bc + 2bd + be + 2cd + ce + 2de$$

$$a_1^* = 15 \quad a_1 = 10$$

$$|Q_{toab} \cdot Q_{toab}^T| = d + e + c$$

$$|Q_{toac} \cdot Q_{toac}^T| = d + e + b$$

$$|Q_{tobc} \cdot Q_{tobc}^T| = d + a$$

$$a_2^* = a + b + c + 3d + 2e$$

$$a_2^* = 8 \quad a_2 = 5$$

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 10\lambda + 8$$

§ 2. Проблема и простейший класс биизоморфизма

Мы покажем, что коэффициенты характеристических полиномов можно считать системой инвариантов класса биизоморфных графов. Попытка найти два не биизоморфных графа, у которых эта система инвариантов совпадала бы, еще не увенчалась успехом. В конце этого параграфа приводятся таблицы не биизоморфных графов, у которых совпадение имеет место для одной пары одноименных полиномов.

Если связные графы G' и G'' биизоморфны, то на основании теоремы I-I4 и ее следствия приходим к следующему утверждению:

Т е о р е м а 2-7.

Если связные графы G' и G'' биизоморфны, то имеет место

$$Q'(\lambda) = Q''(\lambda),$$

$$B'(\lambda) = B''(\lambda),$$

где $Q'(\lambda), B'(\lambda)$ полиномы графа G' и $Q''(\lambda), B''(\lambda)$ полиномы графа G'' .

С л е д с т в и е

У биизоморфных графов равны: число $\ell+1$ — деревьев ($\ell=0, 1, 2, \dots, n-2$) и число связных частичных графов с цикломатическим числом $\mu=\kappa$ ($\kappa=0, 1, 2, \dots, m-n$, n — число вершин, m — число дуг графа).

В связи с теоремой 2-7 возникают два вопроса :

1) является ли совпадение полиномов $Q(\lambda)$ и $B(\lambda)$ двух графов достаточным условием для того, чтобы графы были биизоморфными (проблема биизоморфизма);

2) существует ли непустой класс графов, у которых совпадение коэффициентов полиномов влечет за собой биизоморфизм этих графов.

Можно построить плоские графы, у которых совпадают только полиномы $B(\lambda)$, для их двойственных графов совпадают только полиномы $Q(\lambda)$ (рис.2-2 и 2-3).

П р и м е р 2-3 .

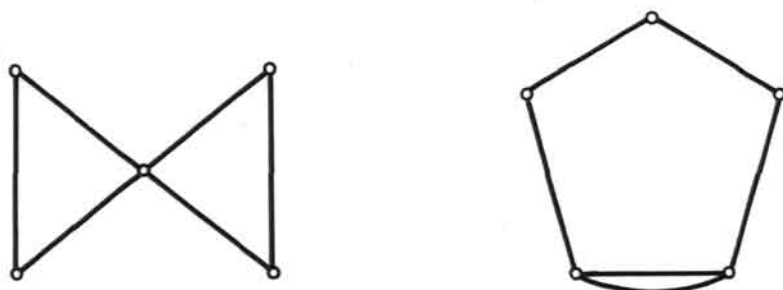


Рис.2-2

Графы (рис.2-2) имеют полином $B(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9$



Рис.2-3

Графы (рис.2-3) имеют полином $Q(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9$.

Исследуя ~~мультиграф~~ мультиграф с четырьмя вершинами ($n = 4$), при помощи вычислительной машины БЭСМ-2М были получены графы, у которых совпадают полиномы $Q(\lambda)$. Результат исследования показан в таблице 2-1. При этом число дуг мультиграфа было ограничено $m \leq 14$.

На рисунке 2-4 показаны различные типы четырехвершинных графов. В заглавии таблиц указаны типы графов и основные образующие ребра этих типов. Каждая таблица содержит обозначения ребер (a, b, c, d, e, f), а

числа показывают число параллельных им ребер. Например, в таблице У-VI числа (1,1, 1,0 , 0,0) указывают, что ребра a , b и c графа У имеют по одному параллельно-му ребру.

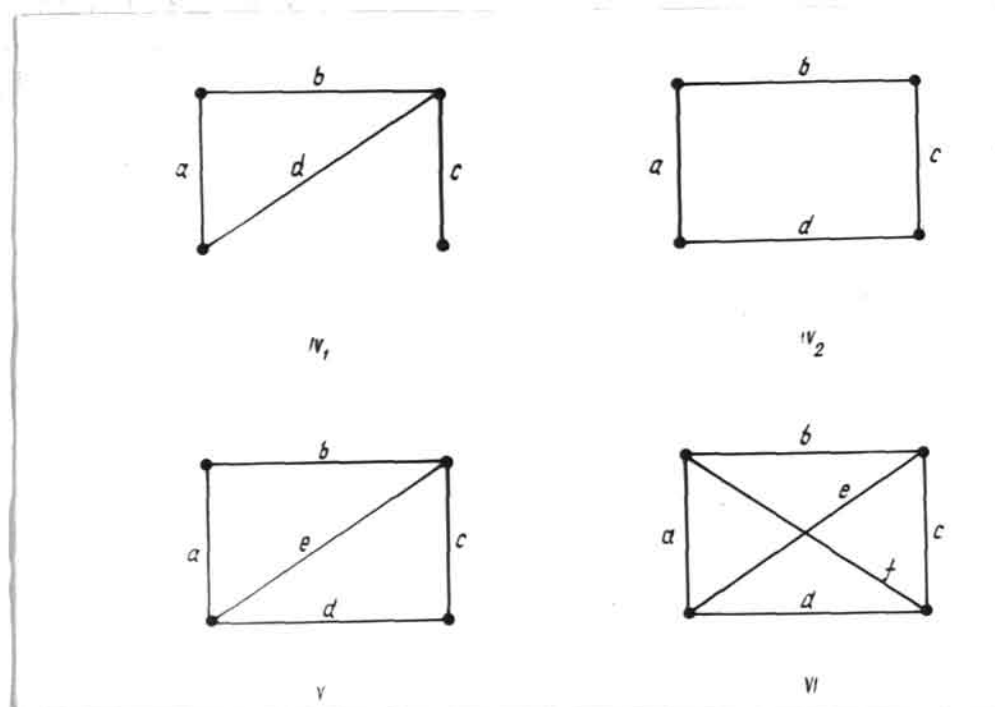


Рис.2-4.

Таблицы содержат также коэффициенты a_1 и a_0 поли-
нома $Q(\lambda)$ и коэффициент b_1 полинома $B(\lambda)$.

Таблица $I\bar{U}_I - I\bar{U}_I$, $I\bar{U}_I - I\bar{U}_2$, и $I\bar{U}_2 - \bar{U}_I$

№ №	a	b	c	d	e	f	Число дере- вьев α_0	Число 2-де- ревьев α_1	Кoeffи- циент при λ $B(\lambda), b_1$
I	3	3	3				96	60	448
	4	I	3	I					440
	5	4	2						693
2	6	2	2	I			I23	77	675
3	3	3	5						816
	4	I	5	I			I44	78	804
I	I	I	4				40	33	I30
	3	3							I24
I	3	3	3				II2	60	496
	5		2						469
	5	3	3						864
2	6		3				I60	78	825

Таблица У - УІ

№ №	a	b	c	d	e	f	Число де- ревьев a_0	Число 2-де- ревьев a_1	Коэффи- циент b_1
I	I	I	I				32	25	62
	2								59
2		2	2				40	30	99
	3								93
3	I	I	I	I			48	32	112
	2		I						109
	2	2	I						162
4							57	38	
	3	I							156
	2	I	I	I					178
5							64	39	
	2		2						175
		4	3						311
6							79	59	
	3	I							293
	3	3	I						332
7							88	53	
	4	2							323
	4	I	I	I					358
8							96	53	
	4		2						355
	2	3	2						375
9							99	54	
	4	I	I						359

Рассмотрим полиномы $Q(\lambda)$ и $B(\lambda)$ для некоторых простых типов графов.

I. Две вершины и соединяющее их ребро :

$$Q'(\lambda) = \lambda + 1, \quad B'(\lambda) \equiv 1.$$

II. Одна вершина и петля

$$Q''(\lambda) \equiv 1, \quad B''(\lambda) \equiv \lambda + 1.$$

III. Цикл из n ($n \geq 3$) вершин и $m = n$ ребер, образовавших этот цикл

$$Q'''(\lambda) = \frac{(\lambda+1)^n - 1}{\lambda}, \quad B'''(\lambda) = \lambda + n.$$

IV. Две вершины и m ($m \geq 2$) параллельных ребер

$$Q''''(\lambda) = \lambda + m, \quad B''''(\lambda) = \frac{(1+\lambda)^m - 1}{\lambda}.$$

Исследуем свойства полиномов $Q(\lambda)$ и $B(\lambda)$ для графов, имеющих точку сочленения.

Пусть $Q(\lambda)$ и $B(\lambda)$ — полиномы графа G с одной точкой сочленения и частями g_1 и g_2 , а $Q_1(\lambda)$, $B_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)$, $B_2(\lambda)$ полиномы, соответствующие этим частям.

Л е м м а 2-9. Для графа G и частей g_1 и g_2 справедливы следующие равенства :

$$Q(\lambda) = Q_1(\lambda) \cdot Q_2(\lambda)$$

и

$$B(\lambda) = B_1(\lambda) \cdot B_2(\lambda).$$

Так как любое ребро части g_1 , не принадлежит ни одному циклу части g_2 и наоборот, то приходим к справедливости леммы.

С л е д с т в и е .

Для графа G , имеющего $k > 0$ точек сочленения $x_1, x_2, \dots, x_k$ и частей $g_1, g_2, \dots, g_k$ ($k > e$), которым соответствуют полиномы $Q_1(\lambda), B_1(\lambda); Q_2(\lambda), B_2(\lambda); \dots; Q_k(\lambda), B_k(\lambda)$ справедливы следующие равенства:

$$Q(\lambda) = Q_1(\lambda) \cdot Q_2(\lambda) \cdot \dots \cdot Q_k(\lambda)$$

и

$$B(\lambda) = B_1(\lambda) \cdot B_2(\lambda) \cdot \dots \cdot B_k(\lambda).$$

Л е м м а 2-10.

Для двух графов G_1 и G_2 с полиномами $Q_1^{(i)}(\lambda), B_1^{(i)}(\lambda)$ и $Q_2^{(i)}(\lambda), B_2^{(i)}(\lambda)$ соответственно (i принимает одно из значений I, II, III, IV) из соотношений

$$Q_1^{(i)}(\lambda) = Q_2^{(i)}(\lambda)$$

и

$$B_1^{(i)}(\lambda) = B_2^{(i)}(\lambda)$$

следует, что графы G_1 и G_2 биезоморфны.

Пусть несвязный граф $G_1(g_1, x_{j_1}; g_2, x_{j_2})$ имеет две компоненты связности g_1 и g_2 и в каждой компоненте связности имеется по одной выделенной вершине $x_{j_1}(g_1)$ и $x_{j_2}(g_2)$. При помощи операции φ_2^{-1} вершины x_{j_1} и x_{j_2} можно объединить в одну вершину и получить связный граф G с точкой сочленения x . При помощи операции φ_2^{-1} можно образовать из вышеупомянутых четырех типов графов графа более сложного класса A_0 . Для графов из класса A_0 можно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 2-8.

Если для двух графов G_1 и G_2 класса A_0 имеет место

$$Q_1(\lambda) = Q_2(\lambda)$$

и

$$B_1(\lambda) = B_2(\lambda),$$

то эти графы биизоморфны.

Действительно полиномы $Q'(\lambda)$, $Q''(\lambda)$, $Q'''(\lambda)$ с одной стороны и полиномы $B'(\lambda)$, $B''(\lambda)$, $B'''(\lambda)$ с другой стороны попарно не имеют общих корней, следовательно попарно взаимно просты. Разложение полиномов $Q(\lambda)$ и $B(\lambda)$ для любого графа рассматриваемого класса можно написать в виде:

$$Q(\lambda) \equiv (\lambda+1)^\alpha \cdot 1^\beta \cdot \prod_{i=1}^r \frac{(\lambda+1)^{n_i} - 1}{\lambda} \cdot \prod_{k=1}^j (\lambda + m_k),$$

$$B(\lambda) \equiv 1^\alpha \cdot (\lambda+1)^\beta \cdot \prod_{i=1}^r (\lambda + n_i) \cdot \prod_{k=1}^j \frac{(\lambda+1)^{m_k} - 1}{\lambda}.$$

Совокупность этих двух разложений однозначно определяют числа α , β , n_i ($i=1, 2, \dots, r$), m_k ($k=1, 2, \dots, j$), т.е. определяет граф с точностью до биизоморфизма.

П р и м е р 2-4. Графы G_1 и G_2 (рис.2-5) имеют следующие полиномы

$$Q(\lambda) = 1 \cdot (\lambda+1)^2 \cdot \left[\frac{(\lambda+1)^4 - 1}{\lambda} \right] = \lambda^5 + 6\lambda^4 + 15\lambda^3 + 20\lambda^2 + 14\lambda + 4,$$

$$B(\lambda) = 1^2 \cdot (\lambda+1) \cdot (\lambda+4) = \lambda^2 + 5\lambda + 4.$$

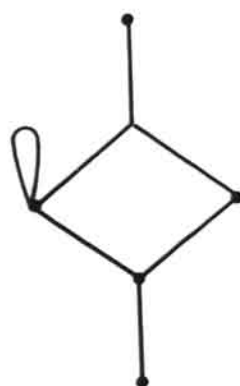
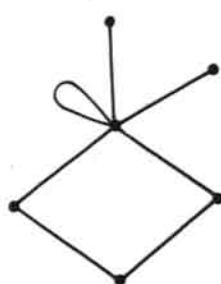


Рис. 2-5

Глава 3. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ И АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ПЛОСКИХ ГРАФОВ

§ I. Несколько теорем о плоских графах

В этом параграфе доказано, что плоский граф имеет некоторую квадратную неособенную матрицу $\|Y\|$ порядка m такую, что $|\|Y\|| = \pm 1$. Более коротким способом доказана теорема 3-2 [30,35]. Найдено необходимое и достаточное условие существования такой правильной реализации плоского графа G , при которой заданные вершины в нулевом порядке следуют вдоль края бесконечной грани.

Пусть плоский граф G имеет n вершины и m дуг. Ясно, что граф G имеет двойственный граф (теорема I-12) G_* с $m-n+2$ вершинами и m дугами. Обозначим для графа G матрицы линейно независимых разрезов (циклов) через $Q_f(B_f)$. Поскольку между дугами графа G и G_* существует взаимнооднозначное соответствие, то можно дуги двойственного графа G_* обозначить так же, как и дуги графа G . При этом получаем (теорема I-13), что

$$\begin{aligned} Q_f &= B_{f*} \\ \text{и} \\ B_f &= Q_{f*}, \end{aligned}$$

где B_{f*} и Q_{f*} — матрицы линейно независимых циклов и линейно независимых разрезов графа G_* . Пусть графы G и G_* имеют матрицы инциденции A и A_* с $n-1$ и $m-n+1$ строками соответственно. Справедлива теорема 3-1.

Для плоского ориентированного графа G существует единственная матрица $\|Y\|$ размера $m \times m$ с опреде-

лителем $\|Y\| = \pm 1$ такая, что

$$B_f \cdot Y = A^*$$

и

$$Q_f \cdot Y = A.$$

Из теоремы I-15 получаем, что значение определителя $\begin{vmatrix} B_f \\ Q_f \end{vmatrix}$ равно числу деревьев графа G . На основании теоремы I-19 получаем, что значение определителя $\begin{vmatrix} A^* \\ A \end{vmatrix}$ равно ± 1 числу деревьев графа G . Это доказывает, что значение определителя $\|Y\|$ равно ± 1 . Единственность такой матрицы $\|Y\|$ следует из того, что линейная система

$$\begin{vmatrix} B_f \\ Q_f \end{vmatrix} \cdot \|Y\| = \begin{vmatrix} A^* \\ A \end{vmatrix}$$

имеет единственное решение $\left(\begin{vmatrix} B_f \\ Q_f \end{vmatrix} \neq 0 \right)$.

Для графа G матрицу линейно независимых циклов с рангом $m-n+1$, содержащую в каждом столбце не больше двух отличных от нуля элементов, обозначим через $B_f^{(2)}$.

Т е о р е м а 3-2.

Граф G имеет матрицу типа $B_f^{(2)}$ тогда и только тогда, когда он плоский.

Если граф G плоский, то он имеет двойственный граф G_* (теорема I-12). При выбранном соответствии ребер матрица инциденции A_* двойственного графа G_* с $m-n+1$ строками является матрицей типа $B_f^{(2)}$ графа G . Это следует из теоремы I-13.

Пусть граф G имеет матрицу линейно независимых циклов типа $B_f^{(2)}$. Для некоторого графа G' с $m-n+2$ вершинами матрицу $B_f^{(2)}$ можно считать матрицей инциденции с $m-n+1$ строками. Матрица $B_f^{(2)}$ имеет хотя бы один стол-

бец, содержащий только один элемент отличный от нуля, так как в противном случае матрица $B_f^{(2)}$ не имела бы ранг $m-n+1$ (теорема I-3). Теперь существует такое взаимно-однозначное соответствие между дугами графов G и G' при котором разрез графа G в графе G' соответствуют дуги, образующие цикл. По теореме I-13 графы G и G' являются двойственными, а по теореме I-12 они - плоские. Это является другим доказательством теоремы [30,35].

Пусть плоский граф G имеет полиномы $Q(\lambda)$ и $B(\lambda)$. Граф G_* двойственный графу G имеет полиномы $Q_*(\lambda)$ и $B_*(\lambda)$.

Т е о р е м а 3-3.

Для плоского графа G и двойственного графа G_* справедливо следующее соотношение:

$$Q(\lambda) = B_*(\lambda)$$

и

$$B(\lambda) = Q_*(\lambda).$$

С л е д с т в и е 3-3-I.

Пусть графы G и G_* двойственны. Тогда между дугами этих графов существует такое взаимнооднозначное соответствие, при котором каждому частичному связному графу графа G с цикломатическим числом $\mu = k$ соответствует $k+1$ -дерево графа G_* , каждому $\ell+1$ -дереву графа G соответствует частичный связный граф графа G_* с цикломатическим числом $\mu = \ell$ ($k=0, 1, 2, \dots, m-n$, $\ell=0, 1, 2, \dots, n-2$).

Это является другим доказательством части теоремы 2 [50].

С л е д с т в и е 3-3-2.

Число всех $\ell+1$ - деревьев графа G равно числу всех частичных связанных графов с цикломатическим числом $\mu=\ell$ двойственного графа G_* .

С л е д с т в и е 3-3-3.

Число всех частичных связанных графов графа G с цикломатическим числом $\mu=k$ равно числу всех $k+1$ -деревьев двойственного графа G_* .

С л е д с т в и е 3-3-4.

Число всех частичных связанных графов графа G равно числу всех частичных графов двойственного графа G_* с цикломатическим числом $\mu=0$.

Пусть справедлива следующая гипотеза: два плоских графа G и G' с полиномами $Q(\lambda)$ и $B(\lambda)$, $Q'(\lambda)$ и $B'(\lambda)$ соответственно биезоморфны тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$Q(\lambda) = Q'(\lambda)$$

и

$$B(\lambda) = B'(\lambda).$$

Если бы удалось доказать эту гипотезу, то за определение двойственного графа можно было бы взять формулировку следствия 3-3-1 теоремы 3-3 (поскольку все двойственные графы графа G биезоморфны - теорема 3-18 [44]).

П р и м е р 3-1.

Рассмотрим графы из примера 1-7. Определим для графа G

(рис. I-II) и двойственного графа G_* (рис. I-I4) матрицу $\|y\|$.

Пусть

$$B_f = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$Q_f = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_* = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Тогда

$$\|y\| = \begin{vmatrix} \frac{5}{8} & \frac{2}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{6}{8} & \frac{4}{8} & -\frac{4}{8} & -\frac{2}{8} & 0 \\ \frac{7}{8} & -\frac{10}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{2}{8} & \frac{2}{8} & \frac{9}{8} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{6}{8} & \frac{6}{8} & -\frac{5}{8} & 1 \end{vmatrix}$$

и

$$|\|y\|| = \left(\frac{1}{8}\right)^4 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -4 & -2 \\ 7 & -10 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{8}\right)^4 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ 16 & 8 & 0 & 0 \\ 12 & -8 & 0 & 4 \\ -8 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{32} \begin{vmatrix} 16 & 1 & 0 \\ 12 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Ясно, что для графа G матрица $B_f^{(2)} = A_*$, а для графа G_* матрица $B_{f*}^{(2)} = A$.

Пусть для графа $G=(X, V)$ задано циклически упорядоченное множество вершин $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ($i_1 \prec i_2 \prec i_3 \prec \dots \prec i_k \prec i_1$). Будем искать такую правильную реализацию, при которой вершины $i_1, i_2, \dots, i_k$ расположены на краю бесконечной грани. Порядок следования вершин вдоль края указан. Вершина i_1 предшествует вершине i_2 , вершина i_2 предшествует вершине i_3 и т.д. вершина i_k предшествует вершине i_1 ($i_1 \prec i_2 \prec i_3 \prec \dots \prec i_k$). Такую правильную реализацию плоского графа G будем обозначать через (γ) . Для сформулированной задачи строим некоторый граф G' . Далее покажем, что сформулированная задача имеет решение тогда и только тогда, когда граф G' является плоским. Теперь покажем, как построить граф G' . К графу $G=(X, V)$ добавляются одна вершина z ($z \in X$), множества ребер

$$V' = \{[z, i_1], [z, i_2], \dots, [z, i_k]\}$$

и V'' такое, что

$$\begin{aligned} [i_1, i_2] \in V &\Rightarrow [i_1, i_2] \in V'' \\ [i_2, i_3] \in V &\Rightarrow [i_2, i_3] \in V'' \\ &\dots \dots \dots \\ [i_k, i_1] \in V &\Rightarrow [i_k, i_1] \in V''. \end{aligned}$$

Теперь имеем граф $G'=(X \cup z, V \cup V' \cup V'')$.

Теорема 3-4.

Граф $G=(X, Y)$ является плоским и имеет реализацию (γ) , тогда и только тогда, когда граф $G'=(X \cup z, Y \cup Y' \cup Y'')$ является плоским.

По построению графа G' ясно, что если плоский граф G имеет реализацию (γ) , то граф G' является плоским.

Теперь докажем достаточность условия. Так как граф G' плоский, то существует его правильная реализация. Если в правильной реализации графа G' каждый цикл

$$\Delta_1 = \{[z, i_1], [i_1, i_2], [i_2, z]\},$$

$$\Delta_2 = \{[z, i_2], [i_2, i_3], [i_3, z]\},$$

$$\dots$$

$$\Delta_k = \{[z, i_k], [i_k, i_1], [i_1, z]\}$$

является краем грани, то теорема доказана.

Предположим, что в правильной реализации графа G' один цикл, например $\Delta_2 = \{[z, i_2], [i_2, i_3], [i_3, z]\}$ не является краем грани. Ясно, что тогда в правильной реализации графа G' имеется некоторый частичный подграф $G_\Delta = (X_\Delta, Y_\Delta)$ графа G расположенный в плоскости, ограниченной циклом Δ_2 . Из определения графа G' ясно, что любая вершина $x \in X_\Delta$ не смежна с вершиной z . Так как граф G' плоский, то вершины графа G_Δ смежны только между собой и с вершинами i_2 и i_3 . Вследствии вышесказанного, существует такая правильная реализация (γ') графа G' , при которой цикл Δ_2 является краем грани. Ясно, что циклы $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ при реализации (γ') остаются краями граней графа G' .

Точно такие же рассуждения имеют место, когда несколько циклов Δ не являются краями некоторых граней. Следовательно, имеется такая правильная реализация графа $G''=(X, V \cup V'')$, при которой цикл

$$\Delta_0 = \{[i_1, i_2], [i_2, i_3], \dots, [i_k, i_1]\}$$

является краем некоторой грани.

Граф G'' не имеет вершины z и ребер инцидентных ей (V'). На основании следствия теоремы I-II получаем справедливость теоремы.

Пример 3-2.

Пусть плоский граф $G=(X, V)$ имеет пять вершин и девять ребер

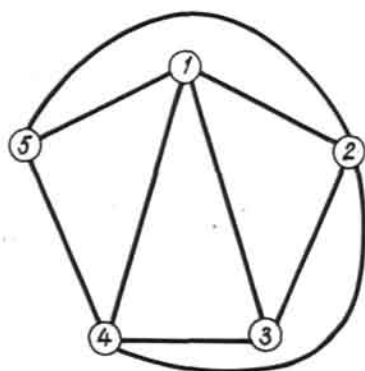
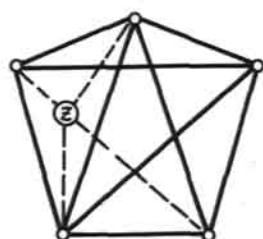


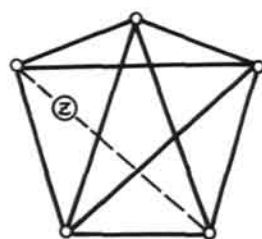
Рис.3-1

Имеется ли у графа G такая правильная реализация, чтобы вершины 1,3,4,5 находились на краю бесконечной грани?

Построим граф $G'=(X \cup z, V \cup V')$ (рис.3-2 I).



I



II

Рис.3-2.

Так как граф G' имеет частичный граф (рис.3-2 II) гомеоморфный графу второго типа, то он является неплоским графом. По теореме 3-4 граф G не имеет правильной реализации (γ) с вершинами 1,3,4,5 на краю бесконечной грани.

§ 2. Алгоритмы построения матрицы инцидентности двойственного графа

В связи с автоматизацией проектирования вычислительных машин [74] и их составных частей — электронных схем [64, 73, 78] все большее внимание уделяется вопросу о том, как установить, что данная схема обладает некоторыми топологическими свойствами. Для этого используются понятия теории графов. Каждую электронную схему можно представить как некоторый граф. Один из важнейших вопросов в исследованиях — является ли данный граф плоским. Для решения этого вопроса существует ряд методов. Непосредственное использование теоремы Куратовского-Понтрягина может потребовать проверки большего числа частичных подграфов данного графа. Поэтому такой метод оказывается неэффективным.

Работы по упомянутому направлению можно условно разбить на три группы.

К первой группе принадлежат те работы [61, 64, 66, 71, 72, 77, 81, 85, 86], в которых находится в графе некоторый цикл (гамильтонов цикл, если такой существует). При помощи цикла упрощают граф — получают несколько подграфов, имеющих меньшее число вершин и ребер, чем исходный граф. По свойствам этих подграфов устанавливают, является ли исходный граф плоским или нет. Если граф является плоским, то получают его правильную плоскую реализацию. Не каждый цикл разбивает данный граф на подграфы. Поэтому нахождение нужного цикла может оказаться весьма трудоемкой задачей.

В работах остальных двух групп используются некоторые матрицы данного графа для построения матрицы инциденции двойственного графа.

Ко второй группе $[60, 62, 63, 67, 68, \text{X}, 82]$ принадлежат те методы, которые используют матрицу линейно независимых циклов B_f для построения графа. В работе [65] имеется подробный анализ работ [67, 29]. Кратко остановимся на разъяснении основных идей. В работе [67] предложен метод, который по матрице B_f определяет некоторые соотношения. При анализе этих соотношений устанавливаются инцидентность ребер и вершин. Если в этих соотношениях нет противоречия, т.е. ни одно ребро не инцидентно более чем двум вершинам, то можно построить матрицу инциденции R и этим определить граф.

В работе [29] используется другой подход. Выбирается произвольно один цикл. Выбирается следующий цикл, у которого некоторые ребра, принадлежащие предыдущему графу (циклу), образуют цепь. Если это выполнено, то к двум концам цепи присоединяют остальные ребра цикла и получают следующий граф. Таким способом по матрице B_f получают соответствующую матрицу инциденции.

В работах [62, 63] рассматривается построение графов по определенному виду матрице B_f .

Матрица специального вида B_f исследуется в работе [60]. Матрица B_f является такой, что в любой строке между элементами отличными от нуля нет элемента равного нулю, следовательно, граф имеет гамильтонову цепь. Метод построения графа по такой матрице близок к методу, предложенному в [29].

работе [29].

Оценка числа столбцов матрицы B_f , являющейся матрицей линейно независимых циклов некоторого графа, имеется в работе [87].

К этой группе можно отнести работу [68], в которой рассматривается матрица всех контуров, проходящих через одну дугу и исследуется, как по такой матрице построить граф.

К третьей группе принадлежат работы, которые по матрице линейно независимых разрезов Q_f строят соответствующий граф [69, 70, 75, 76, 79, 80]. В первую очередь необходимо отметить работы [75, 80]. Обзор некоторых работ этой группы имеется в статье [65]. В работе [80] предлагается построение матрицы инциденции по матрице Q_f . На каждом шагу меняется дерево-остов и, следовательно, матрица Q_f . Для нужного изменения дерева-остова может потребоваться некоторый перебор. Метод, предлагаемый в работе [69], при помощи определителя Грамма, находит строки матрицы Q_f , которые совпадают с некоторыми строками матрицы инциденции. Это справедливо только для 3-связных графов, что автор не указывает.

В работе [75] предлагается метод построения ряда подматриц заданной матрицы Q_f . Если эти матрицы удовлетворяют определенным свойствам, то возможно построить матрицу инциденции в противном случае граф неплоский.

В работах [70, 84] разработан метод в котором по матрице всех деревьев находят соответствующую матрицу инциденции.

В этом параграфе предлагается метод, использующий идеи работ [69, 75]. Определяются строки матрицы Q_f , которые совпадают с некоторыми строками матрицы инциденции. Для остальных строк матрица разбивается на две матрицы, которые содержат эту строку. После разбиения получаем некоторую последовательность матриц разрезов, которые используются для построения матрицы инциденции. Если не удастся получить такую последовательность матриц разрезов, то не существует графа, у которого заданная матрица Q_f была бы одной из матриц линейно независимых разрезов и исходный граф является неплоским.

В этом параграфе будем рассматривать только неориентированные графы. Исследуем вопрос о том, является ли данный граф G плоским или нет. Если граф G является 2-связным, то его можно разбить на два связных графа. Сперва покажем как строить эти два графа. Пусть 2-связный граф G становится несвязным, когда удаляются две вершины i_1 и i_2 и ребра инцидентные этим вершинам. Одну компоненту связности будем обозначать через g_1' , а другую — g_2' . Граф g_1' содержит все вершины и ребра компоненты связности g_1' , ребро $[i_1, i_2]$, вершины i_1 и i_2 и ребра, инцидентные этим вершинам и другим вершинам компоненты связности g_1' . Граф g_2' содержит все вершины и ребра компоненты связности g_2' , ребро $[i_1, i_2]$, вершины i_1 и i_2 и ребра инцидентные этим вершинам и другим вершинам компоненты связности g_2' .

Л е м м а 3-1.

2-связный граф G тогда и только тогда плоский, когда графы g_1' и g_2' плоские.

Л е м м а 3-2.

Если плоский граф G является 3-связным, то двойственный граф G_* также является 3-связным.

Предположим, что граф G_* является 2-связным, т.е. при удалении вершин i_1' и i_2' он становится несвязным. Тогда граф G также является 2-связным, ибо при удалении вершин i_1 и i_2 становится несвязным.

Вершины i_1 и i_2 соответствуют двум граням, края которых содержат вершины i'_1 и i'_2 . Это противоречие доказывает справедливость леммы.

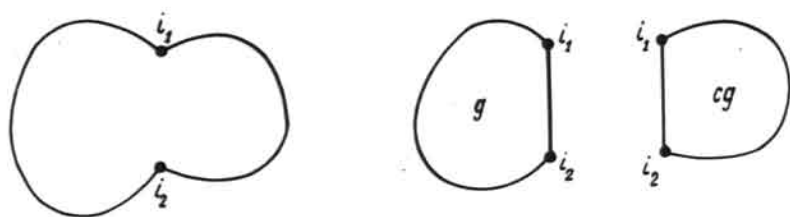


Рис.3-3.

Будем предполагать, что граф G и его двойственный граф G_* обладают следующими свойствами:

- 1) не имеют петель,
- 2) не имеют параллельных ребер,
- 3) являются 3-связными (> 2).

Как указывается на странице [48] в ряде методов по заданной матрице линейно независимых разрезов Q_f определяется граф G . На основании теорем 1-12, 1-13 (теоремы 29 [48] и теоремы 12 [49]) эти методы могут быть использованы для выяснения вопроса о том, является ли данный граф G плоским.

Исследуем в матрице Q_f , соответствующую дереву-остову Γ , подматрицу $A_{12}^{-1} \cdot A_{11} = W$. Ясно, что столбцы матрицы W соответствуют ребрам, образующим систему хорд H . Каждую строку этой матрицы можно считать $m-n+1$ разрядным вектором, т.е. вектором с $m-n+1$ компонентами. Две строки матрицы W будем называть связными, если в одном и том же разряде обе строки имеют 1, т.е. два разреза содержат хотя бы одно общее ребро. Поразрядно логически сложим две связные строки ($1+1=1, 1+0=0+1=1, 0+0=0$), тогда получаем строку (вектор) w_{11} также с $m-n+1$ разрядами. К строке w_{11} поразрядно логически прибавим следующую связную с w_{11} строку матрицы W . При этом образуется новая сумма w_{11}' , которую также будем обозначать через w_{11} . Имеются две возможности, либо таким способом мы не можем сложить все строки матрицы W и тогда система хорд является несвязной, либо мы можем сложить все строки матрицы W и тогда система хорд является связной. В первом случае мы получаем несколько связных систем.

Л е м м а 3-3.

У связного графа G любая система хорд несвязная тогда и только тогда, когда граф G имеет точку сочленения (1-связный). Если граф G имеет точку сочленения, то для любого дерева-остова Γ имеются два множества разрезов $\{\sigma_i\}$ и $\{\sigma_i'\}$ таких, что любая

пара σ_j, σ_j' не имеет общих ребер.

С л е д с т в и е . Если граф G 2-связный ($>$), то любая система хорд связная.

П р и м е р 3-3. Граф $G=(X, T \cup H)$ (рис.3-4) имеет дерево-остов $T=\{1,2,2,4,5,6,7,8\}$ и систему хорд $H=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$, которая является связной.

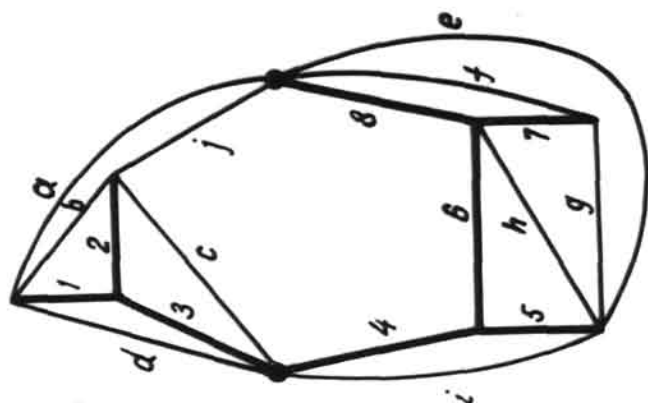


Рис.3-4.

Граф $G_0=(X_0, T_0 \cup H_0)$ (рис.3-5) имеет дерево-остов $T_0=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ и систему хорд $H_0=\{b,c,d,g,h,i\}$, которая является несвязной.

Графу G (рис.3-4) соответствует матрица линейно независимых разрезов

$$Q_f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а графу G_0 (рис.3-5) - матрица

$$Q_{f_0} = \begin{pmatrix} b & c & d & g & h & i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определим условие, при котором строка матрицы Q_f совпадает с некоторой строкой матрицы инциденции R . Для этого используем понятие связности системы хорд H 3-связного графа G . Рассмотрим графы $G_i = (X_i, T_i \cup H_i)$ с матрицами линейно независимых разрезов Q_{f_i} , которые определим следующим образом: отбрасываем одно ребро t дерева-остова T и те хорды из системы хорд H , которые образуют вместе с ребром t разрез; при этом получаем дерево-остов T_i и систему хорд H_i .

Граф G_i имеет матрицу линейно независимых разрезов Q_{f_i} (если граф G_i несвязный, то матрица Q_{f_i} является объединением матриц разрезов каждой компоненты связности), таким образом получаем $n-1$ матриц Q_{f_i} и соответственно

$n-1$ графов G_i . Теперь докажем некоторые теоремы.

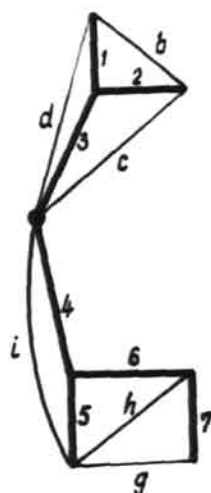


Рис.3-5.

Через $d_{\Gamma}(x)$ будем обозначать степень вершины в дереве-остове Γ .

Л е м м а 3-4.

Строка q_i матрицы линейно независимых разрезов Q_{Γ} , соответствующая ребру $[x_{j_1}, x_{j_2}]$ дерева-остова Γ , тогда и только тогда совпадает с некоторой строкой матрицы инциденции R графа G , когда либо $d_{\Gamma}(x_{j_1}) = 1$, либо $d_{\Gamma}(x_{j_2}) = 1$.

Это следует из определения разреза.

Т е о р е м а 3-5.

Строка q_i матрицы линейно независимых разрезов Q_f 3-связного ($>$) графа G тогда и только тогда совпадает с некоторой строкой матрицы инциденции, когда соответствующий граф G_i имеет связную систему хорд H_i .

Если строка q_i , соответствующая ребру дерева-остова $[x_{j_1}, x_{j_2}] \in T$ матрицы Q_f совпадает со строкой матрицы инциденции R , то по лемме 3-4 следует, что одна из вершин x_{j_1} и x_{j_2} имеет степень 1, например $d_T(x_{j_1}) = 1$.

Так как граф G является 3-связным, то при удалении вершины x_{j_1} и ей инцидентных ребер получаем 2-связный граф G_i . На основании следствия леммы 3-3 получаем, что система хорд H_i является связной.

Если для строки q_i матрицы Q_f получаем связную систему хорд графа G_i , то граф G_i является связным. Граф G_i будет связным только тогда, когда из графа G удаляется вершина, например x_{j_1} , имеющая степень $d_T(x_{j_1}) = 1$.

Это доказывает теорему.

Строки матрицы Q_f , у которых соответствующая система хорд является связной, будем называть висячими, а остальные строки — невисячими. На основании теоремы 3-5 можно определить висячие и невисячие строки матрицы Q_f .

Л е м м а 3-5.

Каждая матрица Q_f линейно независимых разрезов имеет хотя бы две висячие строки.

Так как каждое дерево-остов Γ имеет хотя бы две вершины, например x_p и x_q степени которых $d_\Gamma(x_p)$, $d_\Gamma(x_q)$ равны единице, то это доказывает справедливость леммы.

Л е м м а 3-6.

Если у матрицы, которая содержит все висячие строки матрицы Q_f существует столбец, содержащий три или более отличных от нуля элементов, то Q_f не является матрицей линейно независимых разрезов какого-либо графа.

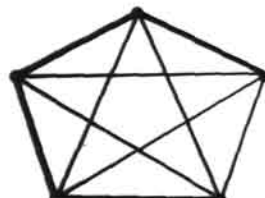
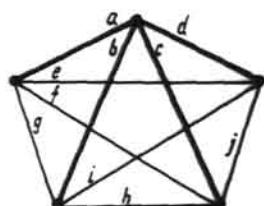
Действительно, висячие строки матрицы Q_f должны совпадать с некоторыми строками матрицы инциденции, если последние можно построить (теорема 3-5). Поскольку любая подматрица матрицы инциденции также не имеет столбца, содержащего более двух единиц, то это доказывает лемму.

П р и м е р 3-4. Рассмотрим полный пятивершинный граф (рис.3-6) и граф Томсена (рис.3-7). Построим матрицы линейно независимых циклов для неизоморфных деревьев-остовов этих графов. Будем считать матрицу B_{f*} матрицей линейно независимых разрезов Q_f некоторого графа G . Определим висячие строки для этих матриц. Висячие строки будем обозначать звездочкой (*), а невисячие строки - кружком (o).

$$B_{f*}^i = Q_f^i = \begin{array}{c|cccccc|c} & e & f & g & h & i & j & a & b & c & d & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & * \end{array}$$

$$B_{f*}^{ii} = Q_f^{ii} = \begin{array}{c|cccccc|c} & b & e & f & h & i & j & a & c & d & g & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & * \end{array}$$

$$B_{f*}^{iii} = Q_f^{iii} = \begin{array}{c|cccccc|c} & b & c & e & f & i & j & a & d & g & h & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & o \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & o \end{array}$$



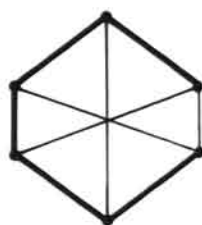
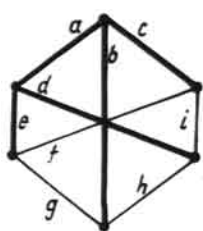


Рис. 3-7.

$$B'_{f*} = Q'_f = \begin{vmatrix} & f & g & h & i & a & b & c & d & e \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & * \end{vmatrix}$$

$$B''_{f*} = Q''_f = \begin{vmatrix} & b & f & h & i & a & c & d & e & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

$$B'''_{f*} = Q'''_f = \begin{vmatrix} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

На основании леммы 3-6 ~~заключаем~~ заключаем, как для полного пятивершинного графа и матриц $B'_{f*} = Q'_f$ и $B''_{f*} = Q''_f$, так для графа Томсена и всех матриц $B_{f*} = Q_f$ невозможно построить граф G^a , ибо в подматрицах висячих строк имеется по столбцу, содержащему более двух единиц.

Теперь будем рассматривать невисячие строки матрицы Q_f . При помощи невисячей строки q_i графа, стягиванием некоторых ребер дерева-остова Γ будем образовывать два графа G_{i_1} и G_{i_2} и соответствующие матрицы линейно независимых разрезов Q_{f_1} и Q_{f_2} . При этом для образования графов G_{i_1} и G_{i_2} и матриц Q_{f_1} , Q_{f_2} будем использовать связанные системы хорд $H_{i_1}, H_{i_2}, \dots, H_{i_k}$, соответствующие строке q_i . Каждая связанная система хорд содержит обозначения ребер дерева-остова Γ , для которых строки матрицы W являются связными. Ясно, что каждой строке матрицы W соответствует одна строка матрицы Q_f . Все связанные системы хорд $H_{i_1}, H_{i_2}, \dots, H_{i_k}$ разбиваются

на два класса $\mathcal{L}_{i_1}$ и $\mathcal{L}_{i_2}$ без общих элементов так, чтобы строка q_i являлась висячей. Граф $G_{i_1}(G_{i_2})$ получается стягиванием тех ребер дерева-остова Γ , которые соответствуют связным системам хорд, принадлежащим классу $\mathcal{L}_{i_2}(\mathcal{L}_{i_1})$. При стягивании ребер дерева-остова из матрицы Q_f вычеркиваются соответствующие строки. Это дает способ образования матриц Q_{f_1} и Q_{f_2} .

Т е о р е м а 3-6.

Если матрица Q_f является матрицей линейно независимых разрезов графа G с висячей строкой q_i , то матрицы Q_{f_1} и Q_{f_2} являются, матрицами линейно независимых разрезов графов G_{i_1} и G_{i_2} соответственно.

Пусть граф G имеет матрицу линейно независимых разрезов Q_f . Тогда любая матрица Q_{f_1} и Q_{f_2} также являются матрицами линейно независимых разрезов некоторых графов, так как эти матрицы являются подматрицами матрицы Q_f . Пусть имеем два графа G_{i_1} и G_{i_2} с матрицами линейно независимых разрезов Q_{f_1} и Q_{f_2} соответственно, матрица Q_{f_1} и матрица Q_{f_2} содержит одинаковую висячую строку q_i . Из этих матриц образуем матрицу линейно независимых разрезов Q_f некоторого графа G . Матрицу Q_f получаем следующим образом: из матрицы Q_{f_1} удаляем строку q_i и к остальным строкам приписываем матрицу Q_{f_2} .

Т е о р е м а 3-7.

Если Q_{f_1} и Q_{f_2} являются матрицами линейно независимых разрезов для графов G_{i_1} и G_{i_2} соответственно с

одинаковой висячей строкой q_i , то матрица Q_f является матрицей линейно независимых разрезов некоторого графа G .

Пусть граф G_{i_1} имеет матрицу инциденции $R_1(Q_{f_1})$ и граф G_{i_2} имеет матрицу инциденции $R_2(Q_{f_2})$. Как матрица R_1 , так и матрица R_2 содержит строку q_i . Из матриц R_1 и R_2 удаляем строку q_i , а оставшиеся строки матриц R_1 и R_2 объединяем в одну матрицу R . Ясно, что матрица R является матрицей инциденции, т.е. в каждом столбце имеет точно две единицы. Из способа образования матрицы R следует, что граф G имеет одну из ^{матриц} разрезов именно матрицу Q_f .

На основании выше доказанных теорем и лемм можно сформулировать алгоритм для выяснения вопроса о том, является ли данный граф G плоским или нет.

Пусть данный 3-связный граф $G_* = (X_*, T_* \cup H_*)$ имеет матрицу линейно независимых циклов B_{f*} . Матрицу B_{f*} считаем матрицей линейно независимых разрезов Q_f некоторого графа $G = (X, T \cup H)$. Ясно, что ребрам дерева-остова T_* соответствующие ребра в графе G образуют систему хорд H , а системе хорд H_* соответствуют ребра, образующие дерево-остов T . По матрице Q_f строим матрицу инциденции R . Если при помощи последующих алгоритмов можно построить матрицу инциденции R , то граф G является двойственным графом графа G_* и данный граф G_* является плоским. Если нельзя построить матрицу инциденции R , то граф G_* является не-плоским.

Метод построения матрицы инциденции Q по матрице линейно независимых разрезов Q_f состоит из нескольких алгоритмов. Матрицу Q_f будем называть помеченной, если найдены все висячие строки, а для невисячих строк-связные системы ^{хорд} Помеченной и законченной будем называть матрицу Q_f , если она является 1) помеченной, 2) имеет хотя бы две висячие строки и 3) в каждом столбце содержит не более двух отличных от нуля элементов. Помеченной и не законченной будем называть матрицу Q_f , если она является 1) помеченной, 2) имеет хотя бы две висячие строки, 3) подматрица матрицы Q_f , состоящая только из висячих строк, не имеет столбцов, содержащих более двух отличных от нуля элементов, 4) в Q_f имеется столбец, содержащий более двух отличных от нуля элементов. При помощи алгоритма I помечаем матрицу Q_f и устанавливаем, является ли она помеченной и законченной или помеченной и не законченной. Алгоритм II раздваивает помеченную и незаконченную матрицу Q_f по связным системам хорд некоторой невисячей строки q_i на две матрицы Q_{f1} и Q_{f2} . Если матрицы Q_{f1} и Q_{f2} являются помеченными и законченными, то алгоритмами III или IV получаем матрицу инциденции графа G . Если одна или обе матрицы Q_{f1} и Q_{f2} являются помеченными и не законченными, то к такой матрице применяются алгоритмы I и II. Если хотя бы одна из матриц Q_{f1} и Q_{f2} является не помеченной и законченной или не помеченной и не законченной, то граф G_* является неплоским.

Таким путем либо получаем последовательность помеченных и законченных матриц разрезов либо устанавливаем, что граф G_* является неплоским.

А л г о р и т м I

Шаг 1. Проверяем столбцы матрицы W (подматрица Q_f)
Если имеется столбец, содержащий более двух единиц, то переходим к шагу 2. Если нет, то образуем матрицу инциденции R . Матрица R содержит все строки матрицы Q_f и сумму этих строк по модулю 2.

Шаг 2. Находим все висячие строки матрицы Q_f , а также для всех не висячих строк связанные системы хорд.

Шаг 3. Проверяем: а) имеются ли хотя бы две висячие строки; б) отсутствуют ли ^{ли}разряды, в которых три или более висячих строк содержат единицу.

Если оба эти условия выполняются, то переходим к шагу 4. Если хотя бы одно условие не выполняется, то вследствие лемм 3-5 и 3-6, матрица Q_f не является матрицей линейно независимых разрезов некоторого графа и данный граф G_* является не-плоским.

Шаг 4. Берем невисячую строку q_i , при помощи алгоритма II образуем матрицы Q_{f1} и Q_{f2} , т.е. применяем раздвоение к матрице Q_f .

Шаг 5. Проверяем столбцы матрицы Q_{f1} . Если имеется столбец, содержащий более двух единиц, то переходим к шагу 6. Если такого столбца нет, то образуем матрицу инциденции R_1 как указано в шаге 1. Таким же способом проверяем столбцы матрицы Q_{f2} и переходим либо к шагу 6,

либо строим матрицу инцидентности R_2 .

Шаг 6. Проверяем для матриц Q_{f1} и Q_{f2} не имеется ли хотя бы один столбец, в котором три или более висячих строк содержат единицу. Если это условие не выполняется для одной из матриц Q_{f1} и Q_{f2} , то на основании лемм 3-5, 3-6 и теорем 3-6, 3-7 матрица Q_f не является матрицей линейно независимых разрезов некоторого графа и данный граф G_* является неплоским. Если это условие выполняется, то переходим к шагу 7.

Шаг 7. Если матрицы Q_{f1} и Q_{f2} помечены и закончены то как в шаге I образуем матрицы инцидентности R_1 и R_2 соответственно. Для помеченной и не законченной матрицы Q_{f1} (или Q_{f2}) переходим к шагу 4.

Шаг 8. Применяем шаг 5 к матрицам, образовавшимся по шагу 7 и либо получаем некоторые матрицы инцидентности либо переходим к следующему шагу.

Шаг 9. К помеченным и не законченным матрицам применяем те же шаги этого алгоритма, которые применялись к матрицам Q_{f1} или Q_{f2} .

После применения алгоритма I и II для плоского графа G получаем последовательность помеченных и законченных матриц разрезов и соответствующих матриц инцидентности. Матрицу Q_f и полученные из Q_f помеченные и не законченные и помеченные и законченные матрицы можно представить как не-

которое корневое дерево (рис.3-8).

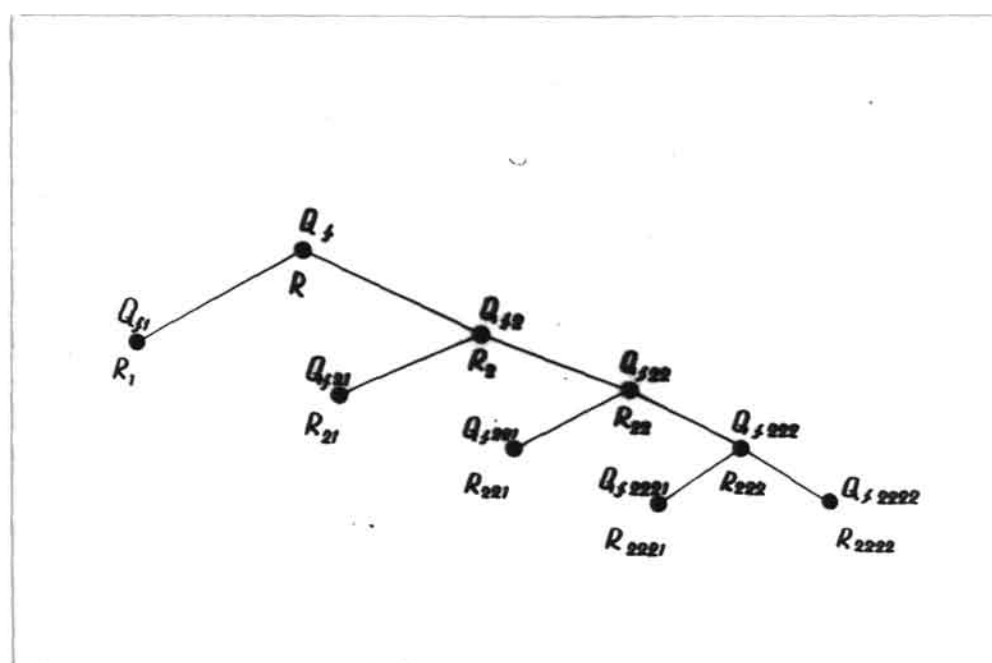


Рис.3-8

Корнем дерева является вершина, соответствующая матрице Q_f . Помеченным и просмотренным матрицам Q_{f1} , Q_{f21} , Q_{f221} , Q_{f2221} , Q_{f2222} (пример 3-6) соответствуют вершины со степенью 1, а помеченным и не просмотренным соответствуют вершины со степенью 3. Теперь рассмотрим алгоритм, который для связанных систем хорд $H_{i,1}, H_{i,2}, \dots, H_{i,k}$ независимой строки q_i матрицы Q_f образует матрицы Q_{f1} и Q_{f2} . Каждая связанная система хорд, например, $H_{i,1}$ содержит обозначения тех строк, которые ее образуют.

А л г о р и т м II.

Шаг I. Проверяем нет ли независимой строки, которая имеет точно две системы хорд $H_{i,1}$ и $H_{i,2}$. Если имеется такая строка, то переходим к шагу 2. Если такой строки

нет, то переходим к шагу 3.

Шаг 2. Из невисячей строки q_i и связанной системы хорд $H_{i,1}$ образуем матрицу $Q_{f,1}$. Из той же строки q_i и другой связанной системы хорд $H_{i,2}$ образуем матрицу $Q_{f,2}$. Как в матрице $Q_{f,1}$, так и в матрице $Q_{f,2}$ назначаем строку q_i висячей. Все висячие строки матрицы Q_f остаются висячими независимо от того, какой из матриц $Q_{f,1}$ и $Q_{f,2}$ они принадлежат. Это справедливо и для невисячих строк за исключением строки q_i . Из связанных систем хорд невисячих строк матрицы $Q_{f,1}$ исключаются обозначения строк, принадлежащих матрице $Q_{f,2}$ и наоборот.

Шаг 3. Находим такую невисячую строку q_j матрицы Q_f , которая имеет минимальное число связанных систем хорд, содержащих обозначения других невисячих строк. Если таких строк несколько, то из них выбирается одна, которая содержит минимальное число связанных систем хорд.

Шаг 4. Распределяем связанные системы хорд невисячей строки q_j на две группы так, чтобы к одной матрице $Q_{f,1}$ или $Q_{f,2}$ не принадлежали бы две различные связанные системы хорд, которые имеют висячие строки с единицами в разрядах, где строка q_j также имеет единицу. Если при этом какую-либо систему хорд можно присоединить как к одной, так и ко второй группе, то ее присоединяем только к одной.

Вследствие того, что нет трех висячих строк, содержащих единицу в одном и том же разряде, распределение всех связанных систем на две группы всегда возможно.

Шаг 5. Из невисячей строки q_j и одной группы связанных хорд образуем матрицу Q_{j1} . Из невисячей строки q_j и другой группы связанных систем хорд образуем матрицу Q_{j2} . Как в матрице Q_{j1} , так и в матрице Q_{j2} строку q_j назначаем висячей. После применения этих двух алгоритмов получаем последовательность помеченных и просмотренных матриц разрезов (Δ_1^*) и соответствующую последовательность матриц инциденции (Δ_2^*) для плоского графа.

А л г о р и т м III.

Шаг I. Из двух матриц инциденции $R_{...i_1}$ и $R_{...i_2}$, содержащих одну одинаковую строку (q) в образовавшиеся последовательности Δ_2^* отбрасываем общую строку q . Получаем матрицы $R_{...i_1}(q)$ и $R_{...i_2}(q)$, и из последовательности Δ_2^* отбрасываем матрицы $R_{...i_1}$ и $R_{...i_2}$.

Шаг 2. Приписываем к матрице $R_{...i_1}(q)$ матрицу $R_{...i_2}(q)$ и получаем матрицу $R_{...i}(q)$.

Шаг 3.

Если в последовательности Δ_2^* нет ни одной матрицы, то по шагу 2 получаем матрицу инциденции R графа G . Если $i=1$ (2) для матрицы $R_{...i}$, то находим в последовательности Δ_2^* матрицу $R_{...2}$ ($R_{...1}$) и применяем к этим матрицам шаг I.

Способ образования матрицы инциденции R показывает, что матрица Q_f будет матрицей линейно независимых разрезов матрицы R . При помощи последовательности Δ_2^* и алгоритма III можно найти матрицу инциденции R двойственного графа G для данного графа G_* . Нетрудно видеть, что матрицу инциденции R можно получить более коротким путем - алгоритмом IV.

А л г о р и т м IV.

Шаг I. Из всех висячих строк матрицы Q_f образуем подматрицу R^0 .

Шаг 2. Для каждой матрицы последовательности Δ_1^* образуем сумму по модулю 2. Эти суммы приписываем к матрице R^0 и получаем матрицу инциденции R графа G . Рассмотрим два примера.

Пример 3-5. Возьмем пятивершинный граф G (пример 3-4, рис.3-6) с деревом-остовом $T=\{a, d, f, h\}$, системой хорд $H=\{b, c, e, g, i, j\}$ и матрицей линейно независимых циклов

$$B_{f*}''' = Q_{f*}''' = \begin{matrix} & b & c & e & g & i & j & a & d & f & h \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} * \\ 0 \\ * \\ * \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}.$$

Эта матрица Q_f''' имеет три висячие строки и три невисячие строки. Как висячие, так и невисячие строки будем обозначать соответствующими буквами дерева-остова $\Gamma = \{b, c, e, g, i, j\}$. Найдем для каждой невисячей строки ее связанные системы хорд. Так для строки c имеем две системы $H_{c,1} = [b]$, $H_{c,2} = [e, g, i, j]$, для строки i — $H_{i,1} = [b]$, $H_{i,2} = [e]$ и $H_{i,3} = [c, g, j]$, для строки j имеем пять связанных систем хорд. Для удобства обозначим матрицу Q_f''' через Q_f . Тогда, применяя алгоритмы I и II, получаем две матрицы Q_{f1} и Q_{f2} .

$$Q_{f1} = \left\| \begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} * \\ * \end{array}$$

$$Q_{f2} = \left\| \begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} * \\ * \\ * \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

Для строки i теперь получаются две системы хорд $H_{i,2} = [e]$ и $H_{i,3} = [c, g, j]$. Применяем опять алгоритм I и II, и получаем матрицы Q_{f21} и Q_{f22} .

$$Q_{f21} = \left\| \begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} * \\ * \end{array}$$

$$Q_{f22} = \left\| \begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} * \\ * \\ * \\ 0 \end{array}$$

Получаем, что матрица Q_{f22} имеет три висячие строки, содержащие в одном разряде единицы, следовательно, матрица

не является матрицей линейно независимых разрезов некоторого графа G^0 и данный граф G_* является неплоским.

Пример 3-6. Пусть 3-связный граф G_* (рис.3-9) имеет дерево-остов $T_* = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, n\}$ и систему хорд $H_* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$.

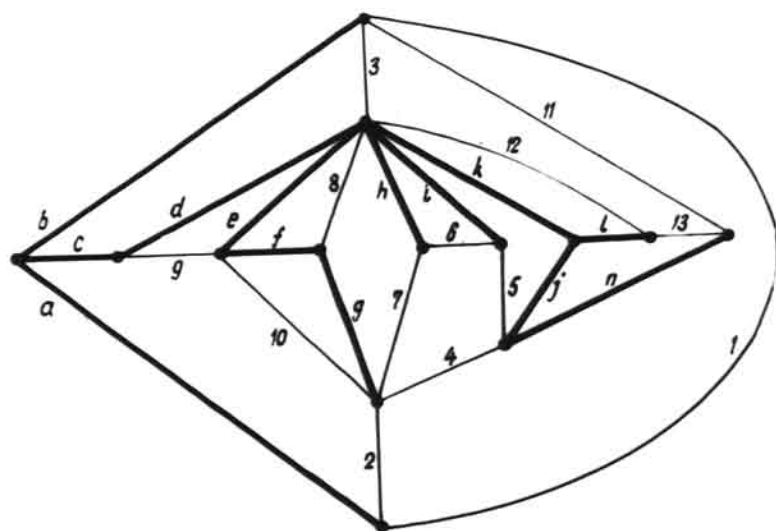


Рис.3-9.

Матрицу линейно независимых циклов B_{f*} запишем в сокращенном виде

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	n
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
11	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1

А л г о р и т м I.

Шаг I. Матрица W имеет столбцы, содержащие более двух единиц.

Шаг 2. Строки 1,3,5,6,8,9,10,12,13 являются висячими. Строки 2,4,7,11 являются невисячими и имеют соответствующие связанные системы хорд

$$H_{2,1} = [1,3,4,5,6,7,11,12,13], H_{2,2} = [8], H_{2,3} = [9], H_{2,4} = [10];$$

$$H_{4,1} = [1,2,3,9,11,12,13], H_{4,2} = [5,6,7], H_{4,3} = [8], H_{4,4} = [10];$$

$$H_{7,1} = [1,2,3,4,5,6,9,11,12,13], H_{7,2} = [8], H_{7,3} = [10];$$

$$H_{11,1} = [1,2,4,5,6,7,8,9,10], H_{11,2} = [3], H_{11,3} = [12,13].$$

Шаг 3. Имеется более двух висячих строк. Нет трех висячих строк, содержащих в одном разряде единицу.

Шаг 4. Берем невисячую строку 2 и применяем алгоритм II для образования матриц Q_{f1} и Q_{f2} . На основании шага 4 этого алгоритма, находим, что к первой группе принадлежат связанные системы $H_{2,1}$ и $H_{2,2}$, а ко второй группе - $H_{2,3}$ и $H_{2,4}$. Таким образом получаем матрицы

$$Q_{f1} = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l & n \\ \begin{matrix} 2 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \parallel & \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \parallel & \begin{matrix} * \\ * \\ * \end{matrix} \end{matrix}$$

$$Q_{f_2} = \begin{array}{c|cccccccccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & * \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 11 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & * \\ 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & * \end{array}$$

Для невисячих строк матрицы Q_{f_2} получаем следующие связанные системы хорд

$$H_{4,1} = [1, 2, 3, 11, 12, 13], H_{4,2} = [5, 6, 7], H_{4,3} = [8];$$

$$H_{7,1} = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12, 13], H_{7,2} = [8];$$

$$H_{11,1} = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], H_{11,2} = [3], H_{11,3} = [12, 13]$$

и переходим к алгоритму I.

Шаг 5. Для матрицы Q_{f_1} строим матрицу инциденции

$$R_1 = \begin{array}{cccccccccccccccccccccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Применяем шаг 6 к матрице Q_{f_2} .

Шаг 7. Применяем алгоритм II к невисячей строке 7 матрицы Q_{f_2} и получаем следующие матрицы

$$Q_{f21} = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l & n \\ \begin{matrix} 7 \\ 8 \end{matrix} & \parallel & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \parallel \end{matrix} \begin{matrix} * \\ * \end{matrix}$$

$$Q_{f22} = \begin{matrix} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \end{matrix} & \parallel & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \parallel & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \parallel & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & \parallel & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & \parallel & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \parallel & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \parallel & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & \parallel & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & \parallel & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{matrix}$$

и связанные системы хорд для строк 4 и II

$$H_{4,1} = [1, 2, 3, 11, 12, 13], H_{4,2} = [5, 6, 7];$$

$$H_{11,1} = [1, 2, 4, 5, 6, 7], H_{11,2} = [3], H_{11,3} = [12, 13].$$

Переходим к алгоритму I.

Шаг 8. Для матрицы Q_{f21} строим матрицу инцидентности

$$R_{21} = \begin{matrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \parallel$$

Шаг 9. К строке 4 матрицы Q_{f22} применяем алгоритм II.

При этом получаем следующие матрицы

$$Q_{f221} = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l & n \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \parallel & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & \parallel & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & \parallel & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \parallel & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} * \\ * \\ * \\ * \end{matrix}$$

$$Q_{f222} = \begin{array}{c|cccccccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & * \\ 11 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & * \\ 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & * \end{array}$$

и связанные системы хорд для строки II

$$H_{11,1} = [1, 2, 4], H_{11,2} = [3], H_{11,3} = [12, 13].$$

Затем переходим к алгоритму I.

Для матрицы Q_{f221} строим матрицу инциденции

$$R_{221} = \begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}.$$

Для матрицы Q_{f222} применяем опять алгоритм II. При этом получаем следующие матрицы

$$Q_{f2221} = \begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & * \\ 11 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & * \end{array}$$

$$Q_{f2222} = \begin{array}{c|cccccccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 11 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & * \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & * \\ 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & * \end{array}$$

Переходим к алгоритму I.

Наконец, для матриц Q_{f2221} и Q_{f2222} строим матрицы инциденции

$$R_{2221} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_{2222} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

После применения алгоритмов I и II мы получили последовательность Δ_2^* матриц инциденции R_{2222} , R_{2221} , R_{221} , R_{21} , R_1 и последовательность Δ_1^* матриц разрезов, содержащих столбцы с не более чем двумя единицами Q_{f2222} , Q_{f2221} , Q_{f221} , Q_{f21} , Q_{f1} . Теперь применяем алгоритм III для образования матрицы инциденции двойственного графа.

А л г о р и т м III.

Шаг I. Образует матрицы $R_{2221}(11)$ и $R_{2222}(11)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 2. Объединяем матрицы $R_{2221}(11)$ и $R_{2222}(11)$ в одну матрицу

Шаг I. Образует матрицы $R_1(z)$ и $R_2(z)$.

Шаг 2. К матрице $R_1(2)$ приписываем матрицу $R_2(2)$, получаем матрицу инцидентности R двойственного графа G .

[illegible]

Из способа построения матриц $Q_{f_{2222}}$, $Q_{f_{2227}}$, $Q_{f_{227}}$, $Q_{f_{27}}$ и Q_{f_1} и матрицы R ясно, что при помощи алгоритма IV также получаем матрицу R с точностью до перестановки строк.

А л г о р и т м IY.

Шаг I. Образую матрицу R^0 .

[illegible]

Шаг 2. Находим сумму по модулю 2 для строк каждой матрицы из последовательности Δ_1^* , Q_{f2222} , Q_{f2227} , Q_{f227} , Q_{f27} , Q_{f7} .

$$\begin{aligned} & \parallel 00100000001110000000000000 \parallel \\ & \parallel 11010000001000000000000001 \parallel \\ & \parallel 00011110000000000000000000 \parallel \\ & \parallel 0000001100000000000001100000 \parallel \\ & \parallel 01000001100001010000000000 \parallel \end{aligned}$$

Присоединяя эти суммы к матрице R^0 , получаем матрицу инциденции.

$$R = \begin{array}{c|cccccccccccc|cccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l & n \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Следовательно граф G_* является плоским.

§ 3. Алгоритмы определения цилиндрических порядков вершин плоского графа

Для определения циклических порядков вершин при наложении плоского графа на плоскость используются матрицы инциденции исходного и двойственного графов. Приводится алгоритм, который определяет такие циклические порядки вершин в случае, когда заданные вершины находятся на краю бесконечной грани. Приводимые алгоритмы весьма удобны для реализации на ЭВМ.

Пусть плоский граф G с матрицей инциденции R имеет двойственный граф G_* с матрицей инциденции R_* . Покажем, как находить циклический порядок для каждой вершины графа G . Пусть ребро v_j графа G соответствует ребро v_{j*} графа G_* , тогда ребрам v_j и v_{j*} в матрицах R и R_* соответствуют j -тые столбцы. Ясно, что матрица инциденции R является матрицей циклов графа G_* , а матрица R_* является матрицей циклов графа G (теорема I-13). Каждый такой цикл является краем грани (теорема I-II) графа G (графа G_*). Ребра, инцидентные вершине x графа G , образуют цикл - край соответствующей грани графа G_* . Ясно, что циклический порядок вершины x является таким же, каким является порядок следования ребер вдоль края соответствующей грани, а порядок следования ребер вдоль краев граней графа G_* определяется по матрице R_* . Будем говорить, что ориентируем ребро $v=[x_i, x_j]$ графа $G=(X, V)$, если

образуем граф $G_1 = (X, V' \cup U)$, где $V' = V \setminus v$ и $u \in U$ ($u = (x_i, x_j)$ либо (x_j, x_i)). Менять ориентацию у дуги (x_i, x_j) на противоположную означает заменить дугу (x_i, x_j) дугой (x_j, x_i) в множестве U .

А л г о р и т м У.

Шаг 1. Выбираем какой-либо цикл из матрицы R двоиственного графа G_* .

Шаг 2. Используя матрицу R_* , ориентируем ребра выбранного цикла так, чтобы получить контур.

Шаг 3. Определяем ориентацию плоскости π , на которой строим плоскую реализацию графов G и G_* , так чтобы она совпала с ориентацией построенного контура.

Шаг 4. Используя матрицу R_* , получаем порядок следования дуг в контуре.

Шаг 5. За следующий цикл из матрицы R выбираем такой, который с предыдущим циклом имеет общие ребра, образующие цепь θ .

Шаг 6. Меняем ориентацию на противоположную у дуг, соответствующих общим ребрам, образовавшим цепь θ .

Шаг 7. Используя матрицу R_* , ориентируем остальные ребра цикла так, чтобы образовался контур, ориентированный так же, как плоскость π . При этом получаем порядок следования дуг в построенном контуре и циклический порядок соответствующей вершины.

Шаг 8. В матрице R_* вычеркиваем столбцы, соответствующие цепи θ и вновь образованную матрицу также обозначаем через R_* .

Шаг 9. Суммируем две строки матрицы R по модулю 2, соответствующие двум выбранным циклам. Эту строку будем называть предыдущим циклом. За новую матрицу R_1 возьмем такую матрицу, в которой вместо вышеупомянутых двух строк содержится их сумма по модулю 2 и остальные строки матрицы R . Ясно, что матрица R_1 в каждом столбце имеет точно два элемента, равные 1.

Шаг 10. Если матрица R_1 нулевая, то переходим к шагу 12. В противном случае переходим к следующему шагу.

Шаг 11. Матрицу R_1 обозначаем через R и переходим к шагу 5.

Шаг 12.

Конец алгоритма.

Если матрицы R и R_* имеют большой порядок, то вместо матриц можно использовать список ребер и дуг.

Рассмотрим пример 3-7.

Пусть граф G имеет матрицу инциденции R и двойственный граф G_* матрицу инциденции R_* .

$$R = \begin{array}{c|ccccccccc|c} & e & f & g & h & i & a & b & c & d & \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & x_1 \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_3 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_5 \end{array}$$

$$R_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 1. В качестве первого цикла берем цикл, состоящий из ребер a, b, c, d .

Шаг 2.

$$R_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 3. Определяем ориентацию плоскости π , совпадающую с первым контуром.

Шаг 4. Порядок следования дуг в контуре a, b, c, d . Следовательно, имеем циклический порядок вершины x_1 .

$$x_1 [x_2, x_3, x_4, x_5]$$

$$(a = [x_1, x_2], b = [x_1, x_3], c = [x_1, x_4], d = [x_1, x_5])$$

Шаг 5. Цикл, состоящий из ребер e, f, g, a , берем в качестве следующего.

Шаг 6. Меняем ориентацию дуги a .

$$R_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 7.

$$R_* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

В новом контуре имеется следующий порядок a, g, f, e следования дуг и соответствующая ему вершина x_2 имеет следующий циклический порядок

$$x_2 [x_1, x_5, x_4, x_3]$$

$$(a=[x_2, x_1], g=[x_2, x_5], f=[x_2, x_4], e=[x_2, x_3]).$$

Шаг 8.

$$R_* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Шаг 9.

$$R_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Шаг 10.

Матрица R_1 не нулевая.

Шаг II. Обозначаем $R_1 = R$ и переходим к шагу 5.

Шаг 5. В качестве следующего цикла выбираем цикл, состоящий из ребер b, e, h . Итак продолжаем до конца, т.е. до шага I2.

На рис.3-10 показано построение контуров и правильное расположение вершин двойственного графа G_* на плоскости π .

Рисунок 3-11 показывает неправильное расположение вершин графа G_* на плоскости π . Правильная реализация графа G и ориентация плоскости π показана на рисунке 3-12.

Найдем такую правильную реализацию на плоскости плоского графа $G = (X, V)$ и вершин $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, при которой вершины $i_1, i_2, \dots, i_k$ следовали бы вдоль края бесконечной грани. Порядок следования вершин задан $(i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_k < i_1)$. Для этого используем граф $G' = (X \cup z, V \cup V' \cup V'')$ (теорема 3-4), его двойственный граф G'_* и их матрицы инциденции R' и R'_* соответственно. Определение циклических порядков вершин графа G' по алгоритму Y может не дать нужного результата.

Выбор первых циклов двойственного графа G'_* не произвольный, как в алгоритме Y , а имеет определенный порядок. За первый цикл выбираем цикл графа G'_* , соответствующий вершине z графа G' , за второй цикл - i_1 , за третий цикл - i_2 , за $k+1$ -й цикл - i_k и т.д.

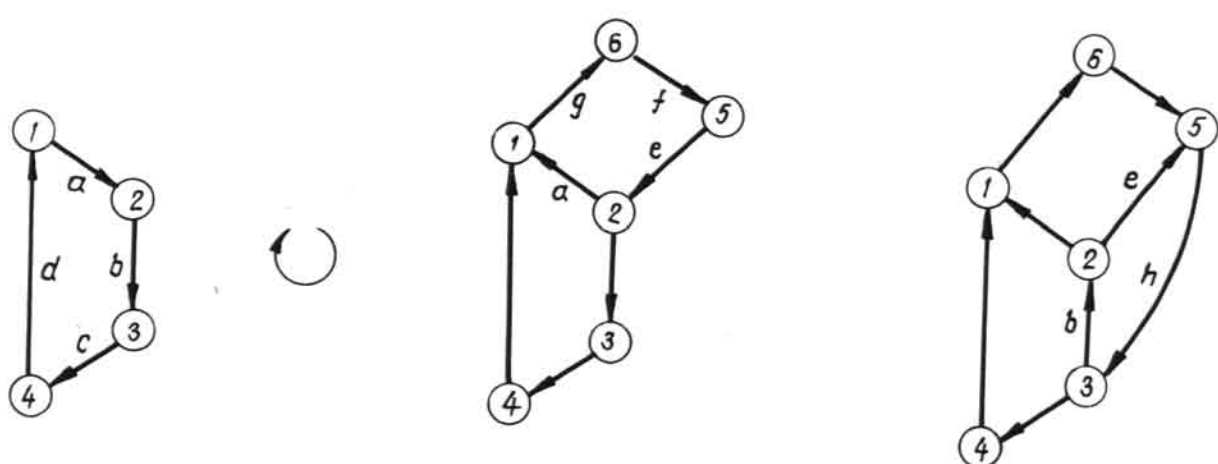
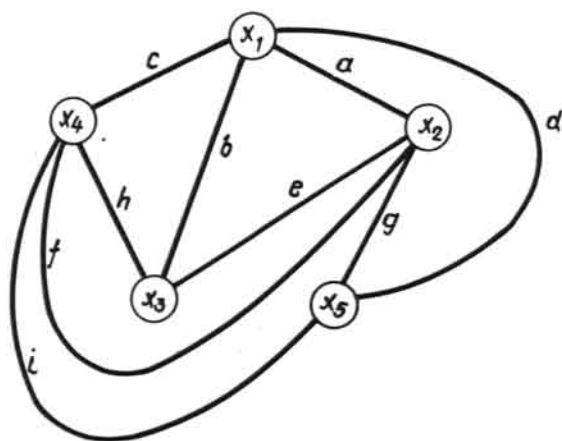


Рис. 3-10.

1231



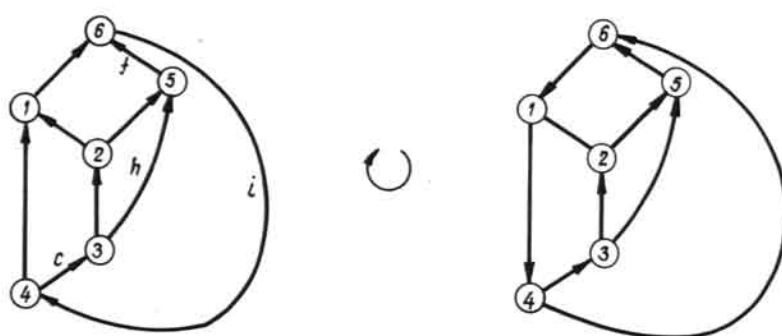


Рис. 3-10

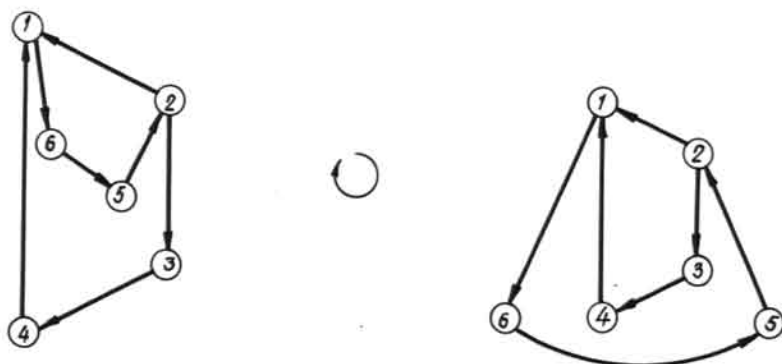


Рис. 3-11.

А л г о р и т м У I.

Шаг I. Применяем алгоритм У к последовательности циклов двойственного графа G'_* , соответствующих вершинам

$$z, i_1, i_2, \dots, i_k, \dots$$

графа G' .

Шаг II. После окончания алгоритма У изменяем ориентацию плоскости π на противоположную, но не меняем циклических порядков вершин графа G' .

Шаг III. Находим циклические порядки вершин графа G по циклическим порядкам вершин графа G' .

В результате I шага для графа $G'' = (X, VUV'')$ получаем, что ребра $[i_1, i_2], [i_2, i_3], \dots, [i_k, i_1]$ образуют край конечной грани. После II шага эта грань преобразуется в бесконечную грань с заданным следованием вершин вдоль края этой грани.

П р и м е р 3-8.

Рассмотрим граф G из предыдущего примера с матрицей инциденции

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix}$$

Необходимо найти правильную реализацию, чтобы вершины x_1 , x_2 , x_3 накопились на крае бесконечной грани. Для графа G' получаем матрицу инциденции

$$R' = \begin{array}{c|cccccccc|cccc|c} & e & f & g & h & i & a & b & c & d & A & B & C & \\ \hline z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & x_1 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \\ x_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_5 \end{array}$$

Для двойственного графа G'_* получаем матрицу инцидентности

$$R'_* = \begin{array}{c|cccccccc|cccc|c} & e & f & g & h & i & a & b & c & d & A & B & C & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}$$

Применяя I шаг алгоритма UI, получаем следующие циклические порядки для вершин графа G'

$$\begin{aligned} z & [x_1, x_2, x_3], \\ x_1 & [z, x_2, x_5, x_4, x_3], \\ x_2 & [z, x_3, x_4, x_5, x_1], \\ x_3 & [z, x_1, x_4, x_2], \\ x_4 & [x_1, x_5, x_2, x_3], \\ x_5 & [x_1, x_2, x_4]. \end{aligned}$$

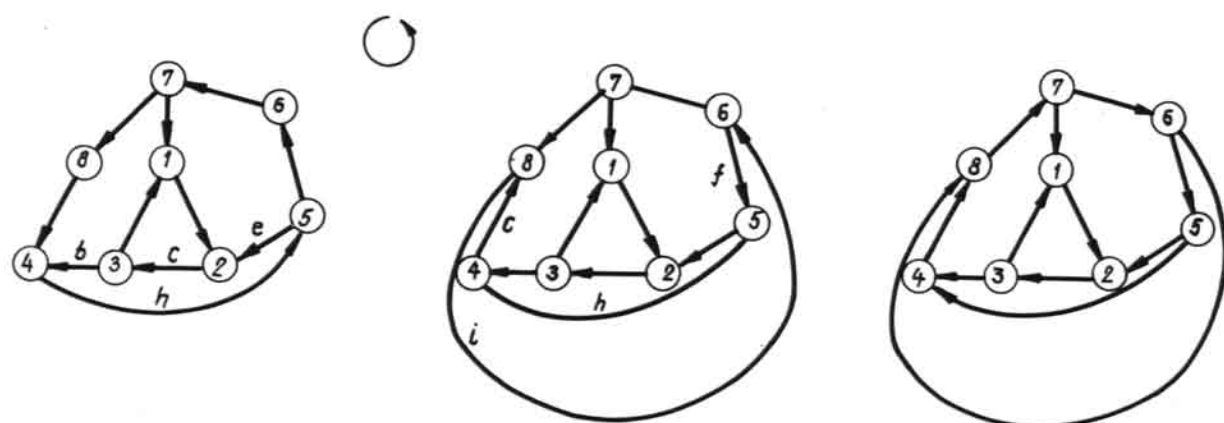
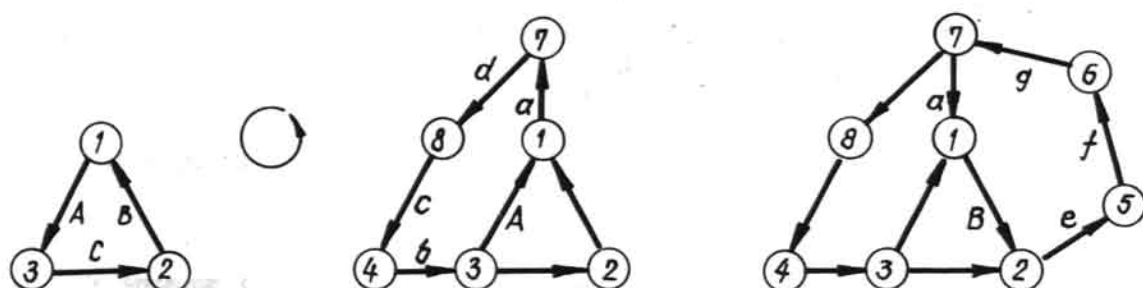


Рисунок 3-13 показывает последовательность графов, образующихся при получении вышеуказанных циклических порядков. Изменяем ориентацию плоскости π на противоположную. Произвольным образом располагаем вершины графа G' на плоскости π . Используя найденные циклические порядки вершин графа G' наложим его на плоскость π .

Из рисунка 3-14 видно, что после отбрасывания вершины z и инцидентных ей ребер, вершины x_1, x_2, x_3 действительно находятся на краю бесконечной грани графа G .

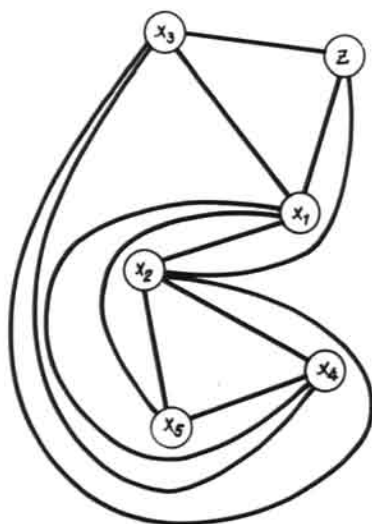


Рис.3-14.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авондо-Бодино Дж. Применение в экономике теории графов.
Прогресс, Москва, 1966.
2. Ahrens W. Mathematische Unterhaltungen und Spiele.
II, Leipzig, 1918.
3. Берк К. Теория графов и ее применение.
И.Л., Москва, 1962.
4. Berge C., Ghouila-Houri A. Programmes, jeux et reseaux
de transport. Dunod, Paris, 1962.
5. Беце А. О коэффициентах характеристического полинома
графа. Латв. матем. ежегодник, вып. 3, Рига,
1968, 75-80.
6. Blaschke W., Bol G. Geometrie der Gewebe. Springer,
Berlin, 1938.
7. Busacker R.G., Saaty T.L. Finite graphs and networks:
an introduction with applications. McGraw-Hill,
1965.

8. Дамбит Я.Я. Существование усиленной базы направленного графа и некоторая задача программирования. Автомат. и вычисл. техн. вып.4, Рига, 1963, 69-79.
9. Дамбит Я.Я. О деревьях связных графов. Латв. матем. ежегодник, вып.1, Рига, 1966, 337-345.
10. Дамбит Я.Я. О наложении графа на плоскость. Латв. матем. ежегодник, вып.2, Рига, 1966, 79-93.
11. Дамбит Я.Я. Свойства коэффициентов характеристических полиномов некоторых матриц графа. УШ Всесоюзный коллоквиум по общей алгебре, резюме сообщ. и докл., Рига, 1967, 44-45.
12. Дамбит Я.Я. Свойства некоторых полиномов матриц циклов и разрезов графа. Латв. матем. ежегодник, вып.4, Рига, 1968, 59-71.
13. Дамбит Я.Я. Простейший класс биезоморфных графов. Латв. матем. ежегодник, вып.5, Рига (в печати).
14. Descartes R. Oeuvres inedites. Foucher de Careil, Paris, 1860.

15. Епифанов Г.В. Сведение плоского графа к ребру преобразованиями звезда - треугольник. Докл. АН. 166, №1, 1966, 19-22.
16. Flament C. Application of graph theory to group structure. Prentice-Hall, 1963.
17. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. М., 1954.
18. Гринберг Э.Я. Характеристические полиномы графа. Докл. на Рижском матем. семин. окт. 1966. (Рукопись).
19. Kazahara Y., Tezuka K., Ling Shun Tong, Kitabashi T. Topological evolution of system determinants. Technol. Repts Osaka Univ., 12, Oct., 1962, 239-248.
20. Кельманс А.К. О числе деревьев графа. Наука, М. 1967, 271-286.
21. Кельманс А.К. О числе деревьев графа I. Автомат. и телемеханика, №12, 1965, 2194-2204.
22. Кельманс А.К. О числе деревьев графа II, Автомат. и телемеханика, №2, 1966, 56-65.

23. Кениг Г., Блекуэли В. Теория электромеханических систем. Энергия, М.Л. 1965.
24. König D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936.
25. Кокстер Г.С. Введение в геометрию. Наука, Москва, 1966.
26. Kuratowski K. Sur le Probleme des Courbes Gauches en Topologie. Fund. Math., 15, 1930, 271-283.
27. Кузнецов А.В. Об одном свойстве функции, реализуемых неплоскими неповторными схемами. Тр. Матем. инст. им. В.А.Стеклова, 51, 1958, 174-185.
28. Кузнецов А.В. О неповторных контактных схемах и неповторных суперпозициях функции алгебры логики. Тр. Матем. инст. им. В.А.Стеклова, 51, 1958, 186-225.
29. Lefgren L. Solution to the realizability problem for irredundant Boolean - branch networks. J. Franklin Inst., 268, 1959, №5, 352-377
(русский перевод: Лефгрэн Л. Решение проблемы реализуемости избыточными булевыми схемами, Киб. сб., №5, ИЛ, 1962, 60-101).

30. Lefschetz S. Planar graphs and related topics. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 54, 1965, N 6, 1763-1765.
31. Лихтенбаум Л.М. Характеристические числа неособенного графа. Тр. III Всесоюзного матем. съезда, т. I, 1956, 135-136.
32. Лихтенбаум Л.М. Теорема двойственности для неособенных графов. Успехи матем. наук, т. 13, вып. 5, 1958, 185-190.
33. Лихтенбаум Л.М. Следы степеней матриц соседства вершин и ребер неособенного графа. Изв. высш. уч. завед. Матем., №5, 1959, 154-163.
34. Лихтенбаум Л.М. Новые теоремы о графах. Сиб. матем. ж., т. III, №4, 1962, 561-568.
35. Mac Lane S. A combinatorial condition for planar graphs. Fund. Math., 28, 1937, 22-32.
36. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра, М., 1962.
37. Оре О. Теория графов. Москва, Наука, 1968.

38. Оре О. Графы и их применение. М., Мир, 1965.
39. Ringel G. Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen. Berlin, 1959.
40. Sainte-Lague M.A. Les Reseaux ou graphes. Memorial des Sciences mathematiques, XVIII, Paris, Gauthier-Villars, 1926.
41. Sainte-Lague M.A. Geometrie de situation et jeux. Memorial des Sciences mathematiques, XLI, Paris, Gauthier-Villars, 1929.
42. Сборник статей под ред. Куна Г.У., Таккера А.У. Линейные неравенства и смежные вопросы. М. ИЛ. 1959.
43. Сему С., Балабанян Н. Анализ линейных цепей. М.Л., Гос. энерг. изд., 1963.
44. Sesky S., Reed M.B. Linear graphs and electrical networks. Addison-Wesley, 1961.
45. Трахтенброт Б.А. Синтез неповторных схем. Докл. АН СССР, 103, 6, 1955, 973-976.

46. Трахтенброт Б.А. К теории неповторных контактных схем. Тр. матем. инст. им. В.А.Стеклова, 51, 1958, 226-269.
47. Trent H.M. A note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graphs. Proc. Nat. Ac. Sc., 40, 1954, 1004.
48. Whitney H. Non - separable and planar graphs. Trans. Am. Math. Soc. 34, 1932, 339-362.
49. Whitney H. Planar graphs. Fund. Math., 21, 1933, 73-84.
50. Whitney H. 2- isomorphic graphs. Am. J. Math., 55, 1933, 245-254.
51. Whitney H. On the classification of graphs. Am. J. Math., 55, 1933, 236-244.
52. Whitney H. A set of topological invariants for graphs. Am. J. Math., 55, 1933, 231-235.
53. Зыков А.А. О некоторых свойствах линейных комплексов. Мат. сб., т. 24, №2, 1949, 163-188.

54. Зыков А.А. Об одной многочленной характеристике линейных комплексов. Тр. III Всесоюзн. матем. съезда, т.2, 1956, 113-114.
55. Зыков А.А. Алгебра комплексов. Мат. сб., т. 41, №2, 1957, 159-176.
56. Зыков А.А. Функции от графов, определяемые линейными уравнениями I. Изв. СО АН СССР, №5, 1959, 3-19.
57. Зыков А.А. Функции от графов, определяемые линейными уравнениями II. Изв. СО АН СССР, №9, 1960, 17-33.
58. Зыков А.А. Функции от графов, определяемые линейными уравнениями III. Изв. СО АН СССР, №12, 1961, 13-27.
59. Зыков А.А. Реберно - вершинные функции и распределительные свойства графов. Докл. АН СССР, т. 139, №4, 1961, 787-790.
60. Ash. R.B., Kim W.H. On realizability of a circuit matrix. IRE Trans. CT - 6, N 2, 1959, 219-223.

61. Auslander L., Parter S. On im bedding graphs in the sphere. J. Math. and Mech., 10, N 3, 1961, 517-523.
62. Auslander L., Trent H.M. Incidence matrix and Linear Graphs. J. Math. and Mech., 8, N 5, 1959, 827-835.
63. Auslander L., Trent H.M. On the realization of a linear graph given its algebraic specification. J. Acoust. Soc. Amer., 33, N 9, 1961, 1183-1192.
64. Bader W. Das topologische Problem der gedruckten Schaltung und seine Lösung. Arch. Elektrotechnik, 49, N 1, 1964, 2-12.
65. Belewitch V. On the realizability of graphs with prescribed circuit matrices. Switch. Theory Space Technol. Stanford Calif. Univ. Press., 1963, 126-144.
66. Demoucron G., Malgrange Y., Pertuiset R. Graphs planaires: reconnaissance et construction de representations planaires topologiques. Rev. franc. rech. operat., 8, N 30, 1964, 33-47.

67. Gold R. Graphs and vector spaces. J. Math. and Phys., 37, N 3, 1958, 193-214.
68. Горбатов В.А. Синтез графов одного класса и применение его при некоторых задачах кибернетики. Кибернетика, Наук, М., 1967, 287-301.
69. Guillemin E.A. How to grow your own trees from given cut-set or tie - set matrices. IRE Trans. CT - 6, Spec. Suppl., 1959, 110-126.
70. Hakimi S.L. On the realizability of set of Trees. IRE Trans. CT-8, 1961, 11-17.
71. Hotz G. Die Einbettung von Streckenkomplexen in die 2 - Sphäre. Z. angen. Math. und Mech., 45, sonderheft T - 42, 1965.
72. Hotz G. Einbettung von Streckenkomplexen in die Ebene. Math. Ann., 167, N 3, 1966, 214-233.
73. Kodres U.R. Formulation and solution of circuit card design problems through use of graph methods. Advance in electronic circuit packaging, vol. 2, Englewood, 1963, 121-142.

74. Линский В.С. Алгоритмическое проектирование вычислительных цифровых устройств. Выч. Ц. АН СССР, М., 1963.
75. Mayeda W. Necessary and Sufficient Conditions for Realizability of Cut-set Matrices. IRE Trans. CT-7, 1960, 79-81.
76. Piekarski M. On the Construction of a Pair of M-Submatrices of a Cut-set Matrices. IEEE Trans., CT-13, 1966, N 1, 114-117.
77. Плесневич Г.С. Расположение графа на плоскости. Выч. системы, вып. 6, 1963, 45-53.
78. Покровский А.Н. Обзор алгоритмов компоновки, размещения моделей и трассировки печатного монтажа при конструировании радиоэлектронной аппаратуры. Вопр. радиоэлектр., серия XII, вып. 4. 1967.
79. Tutte W.T. Matroids and graphs. Trans. Am. Math. Soc., 90, N 3, 1959, 527-552.
80. Tutte W.T. An algorithm for determining whether a given binary matroid is graphic. Proc. Amer. Math. Soc., 10, N 6, 1960, 905-917.

81. Tutte W.T. How to draw a graph. Proc. Lond. Math. Soc., 13, N 52. 1963, 743-767.
82. Tutte W.T. From matrices to graphs. Canad. J. Math., 16, N 1, 1964, 108-127.
83. Wing O., Kim W.H. The path matrix and its realizability. IRE Trans. CT-6, N 3, 1959, 267-272.
84. Wing O., Fischer G. A correspondence between a class of planar graphs and bipartite graphs. IEEE Trans. CT - 12, N 2, 1965, 266-267.
85. Wing O. On drawing a planar graph. IEEE Trans. CT - 13, N 1, 1966, 112-113.
86. Wing O., Fischer G. Computer recognition and extraction of planar graphs from the incidence matrix. IEEE Trans. CT - 13, N 2, 1966, 154-163.
87. Winter (Netter) Z. The maximum possible Number of columns in a circuit matrix. IRE Trans. CT - 7, N 3, 1960, 349-351.

О г л а в л е н и е

	<u>Стр.</u>
В В Е Д Е Н И Е	3
<u>Глава I.</u> НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ДЕРЕВЬЕВ ГРАФА	
§ 1. Обозначения, понятия и теоремы . . .	5
§ 2. Различные способы вычисления числа деревьев графа	36
<u>Глава 2.</u> ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ НЕКОТО- ТОРЫХ МАТРИЦ ГРАФА	
§ 1. Характеристические полиномы без раз- резов и орциклов	47
§ 2. Проблема и простейший класс биизо- морфизма	64
<u>Глава 3.</u> НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ И АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ПЛОСКИХ ГРАФОВ	
§ 1. Несколько теорем для плоских графов	75
§ 2. Алгоритмы построения матрицы инци- денции двойственного графа	84
§ 3. Алгоритмы определения циклических порядков вершин плоского графа . . .	116
Л И Т Е Р А Т У Р А	127