LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

PERSONĀLA DARBĪBAS ANALĪZE AR MASU APKALPOŠANAS SISTĒMAS PALĪDZĪBU

DIPLOMDARBS

Autors: **Dmitrijs Gribulis**
Stud. apl. dg07021
Darba vadītāja: Dr. mat. Nataļja Budkina

RĪGA 2012

ANOTĀCIJA

Diplomdarbs „Personāla darbības analīze ar masu apkalpošanas sistēmas palīdzību” ir veltīts veikala personāla darbības izpētei. Ekonomiskas lejupslīdes apstākļos darbinieku efektivitāte kļūst aizvien aktuālāka, jo ir svarīgi optimizēt izmaksas un darbinieku skaitu.

Tā kā vienu konkrētu iestādi un arī citas līdzīgas var aprakstīt ar dažādam masu apkalpošanas modeļiem, darbā tika apskatītas dažādas visvairāk piemērotas sistēmas. No sakumā ir dots sistēmas teorētiskais apraksts un tālāk aprēķināti sistēmas funkcionēšanas efektivitātes rādītāji, balstoties uz reāliem statistiskiem datiem, kas iegūti veikalā konkrētā laika periodā. Ir apskatīta situācija, kad palielinās apkalpojošo kanālu skaits. Ir veikta sistēmas salīdzināšana un piedāvāts optimālais darbinieku skaits.

Darbs tika veltīts veikala „Suitsupply” darba izpētei, kas tagad ir īpaši aktuāla, sakara ar jauno darbinieku meklēšanu. Savukārt tā analīze būs lietderīga jebkurai citai iestādei ar līdzīgu apkalpošanas sistēmu.

Darba apjoms ir 47. lpp, darbs satur 5 attēlus un 9 tabulas, darbā izmantoti 4 literatūras avoti.

Atslēgvārdi: masu apkalpošanas sistēma ar gaidīšanu, vienmērīga apkalpošanas disciplīna, divfāžu sistēma, sistēmas funkcionēšanas efektivitātes rādītāji

ABSTRACT

The bachelor paper “Queueing theory application to the analysis of staff work” is dedicated to the study of a shop staff work. Due to recession the efficiency of staff work has become essential being vital to the optimization of costs and personnel.

Since one organization can be described from the perspective of different queueing theory models, the author of the present paper uses several most suitable approaches. Firstly, the author describes the theoretical aspect of each system, then calculates the indicators of the efficient functioning of the system in question according to existing statistic data from given working period of the organization. The case of the increased number of service channels is described. The author compares the functioning of different systems and suggests the optimal number of workers.

The present paper deals with the analysis of the shop’s „Suitsupply” functioning, which is especially important due to the shop being in search of new workers. Hence, the results of this study can be applied to other organizations using similar service system.

The volume of the present paper is 47 pages, it contains 5 images and 9 tables and 4 literary sources.

Key words: mass service system with waiting, uniform service discipline, two-phase system, indicators of the efficient functioning.

SATURS

IEVADS

Masu apkalpošanas teorija ir lietišķa matemātikas disciplīna, kas nodarbojas ar tehnisku ierīču vai masu apkalpošanas sistēmu ražotspējas rādītāju pētīšanu. Masu apkalpošanas sistēmas ir sistēmas, kas ir paredzētas pieteikumu apstrādei (apkalpošanai).

Masu apkalpošanas teorijas pielietojuma sfēra ir ļoti plaša. Balstoties uz plašo praktisko uzdevumu loku, ko var atrisināt ar masu apkalpošanas teorijas palīdzību, to izmanto dažādu tehnisku un ekonomisku problēmu analīzē. Šajā darba mēs izmantosim dažādas masu apkalpošanas sistēmas, lai aprakstīt veikala darbību.

Gaidīšanas fenomens, kurš ir sastopams uz katra soļa, ir varbūtības rakstura vajadzību rašanās un attiecīgu apkalpošanas sistēmu rādītāju atšķirību tiešas sekas. Gaidīšanas laiks un rindas garums ir galvenie efektivitātes radītāji, kurus mēs izmantosim, salīdzinot masu apkalpošanas sistēmas.

Masu apkalpošanas teorija zināmā mērā ir varbūtību teorijas sastāvdaļa. Balstoties uz varbūtību teorijas metodēm, tā kļuva par patstāvīgu zinātni. Masu apkalpošanas teorija pēta statistiskās likumsakarības masveida operācijām, kuras ir jāveic, lai apmierinātu viendabīgas vajadzības. Pieprasījums šo vajadzību apmierināšanai tiek izteikts nenoteiktos laika momentos, un apkalpošanas laiks katram pieprasījumam arī nav iepriekš nosakāms. Tāpēc ļoti liela nozīme ir šādu masveida operāciju organizācijai. Sistēmas operāciju raksturojumu variēšanas ceļā var būt sasniegts saprātīgs kompromiss starp klientu vajadzībām un apkalpojošās sistēmas iespējām. Šāda rakstura uzdevumu risināšanai tad arī izveidota masu apkalpošanas teorija.

Darba mērķis ir analizēt veikala darbību ar masu apkalpošanas teorijas palīdzību.

Darba uzdevumi:

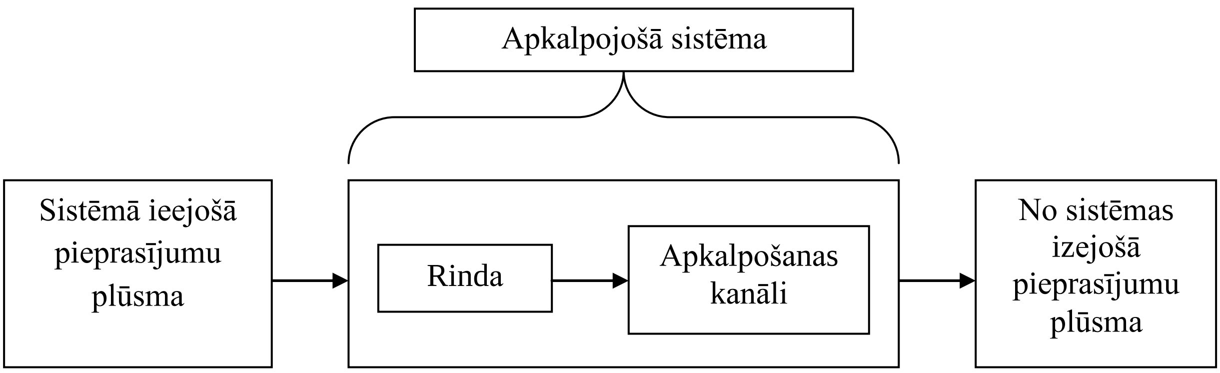
1. Atrast viss piemērotāku masu apkalpošanas sistēmu;
2. Izpētīt veikala personāla darba efektivitāti un noteikt optimālo darbinieku skaitu;
3. Piedāvāt optimālo darba procesa risinājumu.

1. MASU APKALPOŠANAS SISTĒMAS

Masu apkalpošanas teorija pēta sistēmas, kuras veido fizisko objektu kopumu, kurš spēj veikt apkalpošanas operācijas. Sistēmā iekļautos apkalpojošos objektus sauc par *apkalpošanas kanāliem*. Sakaru līnijas, serverus, personas, kas veic noteiktas operācijas, var uzskatīt par apkalpošanas kanāliem. Atkarībā no kanālu skaita, masu apkalpošanas sistēmas iedala divās grupās: *vienkanāla un daudzkanālu sistēmās*. Piemēram, mazumtirdzniecības veikalu ar vienu kases aparātu, automazgātavu ar vienu mazgāšanas iekārtu vai sportistu svēršanās vietu pirms džudo sacensībām varam uzskatīt par vienkanāla sistēmu. Ja sistēmā ir vismaz divi kanāli, tad šādas sistēmas sauc par daudzkanālu sistēmām.

Masu apkalpošanas sistēmu uzdevums ir apkalpot zināmu pieprasījumu skaitu. Par *pieprasījumu* uzskata nepieciešamību pēc noteiktas vajadzības apmierināšanas. Piemēram, automašīnas vadītājs, kas gaida rindā pie automazgātavas, izsaka savu vajadzību nomazgāt automašīnu. Pieprasījuma subjekts ir automašīna, kas tiek reģistrēta pēc mazgāšanas izpildes un izbrauc no automazgātavas. Pieprasījumi pienāk viens pēc otra ar nenoteiktu laika intervālu; tādējādi šos laika intervālus varam uzskatīt par gadījuma lielumiem. *Apkalpošana* ir pieprasījumu izteicēja vajadzību apmierināšana, ievērojot apkalpojošā objekta intereses. Katra pieprasījuma apkalpošanas laiks ir gadījuma lielums. Līdz ar to, masu apkalpošanas sistēmas funkcionē neregulāri. Neregularitāte izsauc rindas veidošanos, atteikumus vai arī atsevišķu kanālu un pat visas sistēmas dīkstāvi. Būtībā masu apkalpošanas sistēmas funkcionēšana var tikt apskatīta kā gadījuma process. Lai racionāli organizētu sistēmas darbu, noskaidrotu tās caurlaides spēju, ir jāizpēta gadījuma process, kas notiek sistēmā, un jāapraksta matemātiskais modelis.

Tātad, masu apkalpošanas sistēma sastāv no pieprasījumu plūsmas (ieejas plūsmas), rindas, apkalpošanas ierīces un apkalpoto pieprasījumu plūsmas (izejošā plūsma). Masu apkalpošanas sistēma shematiski attēlota (1.1.) zīmējumā.



1.1.att. **Masu apkalpošanas sistēmas shematisks attēlojums**

Masu apkalpošanas sistēmas tipi:

Atkarībā no rindas rakstura masu apkalpošanas sistēmas iedala trijās lielas grupās:

1) MAS ar atteikumiem (sistēmas bez gaidīšanas);

2) MAS ar neierobežotu rindas garumu (sistēmas ar gaidīšanu);

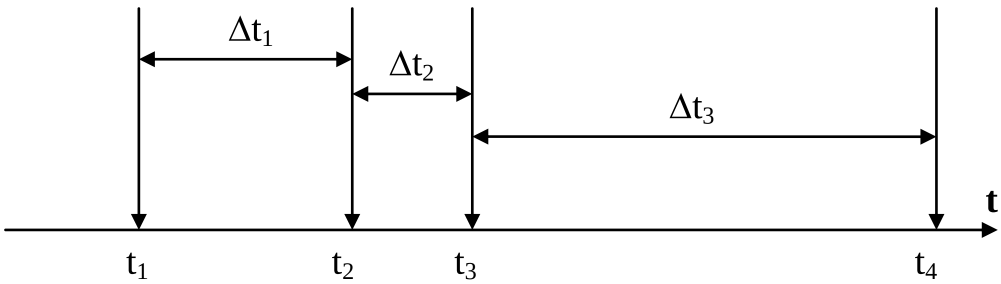
3) Jaukta tipa sistēmas.

Pie otras grupas pieder sistēmas, kurās pieprasījums nesaņem atteikumu, ja visi apkalpošanas kanāli aizņemti, bet stājas rindā un gaida, kamēr atbrīvosies kāds kanāls. Šī sistēmas paraugu mēs arī apskatīsim šajā darbā praktiskajā daļā.

1.1. Pieprasījumu plūsma

Vienkāršākā plūsma.

Pieprasījumu plūsma ir viendabīgu notikumu virkne, kuri iestājas pēc nejaušiem laika intervāliem. Grafiski pieprasījumu plūsmu var attēlot kā punktus t_i , $i = (1,2,\ldots)$, kas atbilst pieprasījumu pienākšanas momentiem uz skaitļu ass O_t $(1.1. att.)$. Attālumus jeb laika intervālus starp diviem pēc kārtas pienākušiem pieprasījumiem var attēlot kā intervālus Δt_j , $j = (1,2,\ldots)$ $(1.2. att.)$.



1.2.att. **Notikumu iestāšanās plūsmas ģeometriskā interpretācija**

Par *plūsmas intensitāti* jeb blīvumu sauc laika vienībā pienākušo pieprasījumu skaitu. Plūsmas intensitāte var būt gan konstanta, gan mainīga $\lambda(t)$.

Ja pieprasījumi pienāk pēc stingri noteiktiem laika intervāliem, tad pieprasījumu plūsmu sauc par *regulāru plūsmu*.

Pieprasījumu plūsmu sauc par *stacionāru plūsmu*, ja varbūtība pienākt k pieprasījumiem laika intervālā Δt nav atkarīga no intervāla sākuma momenta, bet tikai no tā garuma. Stacionārai plūsmai ir pastāvīgs blīvums, ko apzīmē ar λ.

Masu apkalpošanas sistēmu parasti raksturo tādas plūsmas, kur laika intervālu garums starp pieprasījumu pienākšanas momentiem ir gadījuma lielums.

Pieprasījumu plūsmu sauc par plūsmu *bez pēcdarbības*, ja pieprasījumu skaits, kas pienāk intervālā Δt_j , nav atkarīgs no intervālā Δt_{j-1} pienākušo pieprasījumu skaita un tam nav kopīgu punktu ar Δt_j , $j = (1,2, \dots)$. Tas nozīmē, ka pieprasījumi pienāk sistēmā neatkarīgi viens no otra.

Pieprasījumu plūsmu sauc par *ordināru plūsmu*, ja varbūtība, ka bezgalīgi mazā laika intervālā Δt pienāk vismaz divi pieprasījumi, ir ļoti maza salīdzinājumā ar varbūtību, ka pienāks viens pieprasījums:

$$\lim_{\Delta t \to 0} p_{n>1}(\Delta t) = 0$$

No šī nosacījuma izriet, ka pieprasījumi pienāk pa vienam.

Ja pieprasījumu plūsma ir stacionāra, bez pēcdarbības un ordināra, tad šādu plūsmu sauc par *vienkāršāko plūsmu*.

Ja pieprasījumu plūsma ir vienkāršāka, tad var noteikt pieprasījumu skaitu, kas pienāk noteiktajā laika intervālā.

1.2. Apkalpošanas algoritms

Apkalpošanas algoritms nosaka pieprasījuma darbību no ienākšanas brīža līdz brīdim, kad pieprasījums aiziet prom no sistēmas. Apskata algoritma galvenās sastāvdaļas – brīvas ierīces meklēšanu, pieprasījuma rīcību, ja nevar atrast brīvu ierīci, un apkalpošanas ilgumu.

Ir trīs biežāk lietojamie brīvas ierīces meklēšanas veidi: sakārtots, gadījuma, pa riņķi. Sakārtotas meklēšanas gadījumā ierīces, sākot ar pirmo, pēc kārtas pārskata un aizņem pirmo brīvo ierīci. Gadījuma meklēšanā apskatāmo ierīci izvēlas ar vienādu varbūtību no vēl neapskatītajām, kamēr atrod brīvu vai apskata visas. Meklēšanā pa riņķi ierīces apskata secībā no $(i + 1) - \bar{a}s$ līdz $n - tajai$ un tālāk no 1. līdz $i - tajai$, aizņemot pirmo atrasto brīvo, kur i – pēdējās pirms tam aizņemtās ierīces numurs (sākumā – 1), n – ierīču skaits.

Ja brīva ierīce nav atrasta, ir iespējami vairāki darbības varianti, kuri lielā mērā raksturo masu apkalpošanas sistēmu. Apskatīsim galvenos variantus, kuri ir šādi: sistēma ar zudumiem, sistēma ar gaidīšanu.

Sistēmā *ar zudumiem* pieprasījums, kurš neatrod brīvu ierīci, zūd, tas nozīmē – aiziet no sistēmas neapkalpots.

Sistēmā *ar gaidīšanu* pieprasījums, kurš neatrod brīvu ierīci, stājas rindā un gaida, kamēr vajadzīgā ierīce atbrīvosies. Svarīgi zināt, pēc kāda principa pieprasījumi no rindas nonāk apkalpojošajā kanālā. Šo principu sauc par *rindas disciplīnu*. Rindas disciplīna nosaka pieprasījumu atlases noteikumus, pirms tie nonāk apkalpošanas kanālos, un nosaka, vai atsevišķiem pieprasījumiem ir apkalpošanas prioritāte, ja tāda pastāv. Ir vairākas iespējas, kā izvēlēties izsaukumu no rindas, kurš aizņems atbrīvoto ierīci, piemēram, pēc kārtas (kurš pirmais ienāca rindā, tas pirmais aiziet uz apkalpošanu), otrādā kārtībā (kurš pēdējais iestājās rindā, pirmais aiziet uz apkalpošanu), gadījuma kārtībā (izvēlas ar vienādu varbūtību jebkuru izsaukumu no rindas).

1.3. Rindas disciplīna

Rindas disciplīna ir sistēmā ievesto noteikumu kopums, kas nosaka, kādā veidā pieprasījumi nonāk apkalpošanas kanālos. Rindas disciplīna var veidoties stihiski vai ilgstošas prakses rezultātā, bieži vien tā izriet no noteiktām tradīcijām un paradumiem. To var noteikt arī tehnoloģisku, organizatorisku vai ekonomisku apsvērumu rezultātā.

Rindas disciplīna nosaka: pieprasījumu atlases noteikumus, pirms tie nonāk apkalpošanas kanālos, nosaka, vai atsevišķiem pieprasījumiem ir apkalpošanas prioritāte, ja tāda pastāv, tad nosaka prioritāšu skalu un prioritātes izmantošanas nosacījumus.

Pieprasījumu atlases noteikumi mēdz būt dažādi. Vairumā apkalpošanas sistēmā izmanto principu *„pirmais pienācis – pirmais apkalpots”*. Šajā gadījumā pieprasījumi apkalpošanas kanālos nokļūst tādā pašā kartībā, kādā tie nokļuva rindā.

1.4. Apkalpošanas laiks

Bez pieprasījuma plūsmas masu apkalpošanas sistēmas darbu ietekmē vēl daži tās parametri: kanālu skaits n un katra kanāla darba „ražīgums”. Parasti pieņem, ka katrs kanāls vienlaicīgi var apkalpot tikai vienu pieprasījumu. Katru kanālu raksturo laiks, kurā tiek apkalpots viens pieprasījums. Šis laiks ir gadījuma lielums un līdz ar to katram pieprasījumam ir dažāds. Tāpēc, lai raksturotu apkalpošanas kanālu darbu, jānosaka apkalpošanas laika sadalījuma likums $G(t)$. Bez detalizētas apkalpošanas kanāla darba analīzes nevar noteikt konkrētu sadalījuma likuma funkcijas veidu. Šo funkciju nosaka, apkopojot kanālu funkcionēšanas statistiskos datus līdzīgi, kā pieprasījuma plūsmu analīzē.

Parasti teorijā un praksē pieņem, ka apkalpošanas laiks ir pakļauts eksponenciālajam sadalījuma likumam ar sadalījuma blīvuma funkciju $g(t) = \mu e^{-\mu t}$ un sadalījuma funkciju

$$G(t) = 1 - e^{-\mu t}.$$

Ja gadījuma lielums ir pakļauts eksponenciālajam sadalījuma likumam, tad šī likuma parametrs ir apgriezts lielums matemātiskajai cerībai. Tas nozīmē, ka

$$\mu = E_{t\ apk}^{-1}, \qquad E_{t\ apk} = E\,[T_{apk}],$$

kur $E\,[T_{apk}]$ – apkalpošanas laika matemātiskā cerība.

Lielumam T_{apk} ir īpaša nozīme masu apkalpošanas teorijā. Attiecībā pret apkalpošanas laiku, ņemot vērā eksponenciāla sadalījuma īpašību, var formulēt šādu apgalvojumu: ja laika momentā t_0 noris pieprasījuma apkalpošana, tad atlikušā apkalpošanas laika sadalījuma likums nav atkarīgs no tā, cik ilgi pieprasījums apkalpots pirms momenta t_0 .

Varbūtība pieprasījumu apkalpošanu pabeigt bezgalīgi mazā laika intervālā Δt ar precizitāti līdz bezgalīgi mazam lielumam $0(\Delta t)$ ir $\mu\Delta t$. Šī varbūtība nav atkarīga no tā, cik ilgi sistēma ir funkcionējusi.

Katra kanāla darba „ražīgums" sistēmas funkcionēšanas gaitā var mainīties. Tādā gadījumā apkalpošanas ilgums ir nestacionārs lielums. Tā parametru apzīmē ar $\mu\,(t)$. Parasti, ja $t_2 > t_1$, tad $\mu(t_2) < \mu(t_1)$. Ja pieprasījumu plūsmu veido n tipu pieprasījumi, kuru apkalpošanas laika parametri ir $\mu_i\,, (i = 1, 2, \ldots, n)$, tad apkalpošanas laiku sistēmā raksturo hipereksponenciālais sadalījuma likums ar blīvuma funkciju:

$$f\,(t) = p_1\,\mu_1\,e^{-\mu_1 t} + p_2\,\mu_2\,e^{-\mu_2 t} + \ldots + p_n\,\mu_n\,e^{-\mu_n t},$$

kur $p_i\,, (i = 1, 2, \ldots, n)$ – varbūtība, ka sistēmā pienācis *i*-tā tipa pieprasījums.

Izteiksmes labā puse ir eksponenciālo sadalījuma blīvuma funkciju izliekta lineāra kombinācija.

Apkalpošanas laika sadalījumu var noteikt arī citi sadalījuma likumi. Taču nelielā mērā masu apkalpošanas sistēmas caurlaides spēja un citi tās parametri ir atkarīgi no sadalījuma likuma, kam ir pakļauts apkalpošanas laiks, bet vairāk atkarīgi no tā vidējās vērtības $E\,[T_{apk}]$. Tas ir iemesls, kāpēc masu apkalpošanas teorijā bieži vien pieņem, ka apkalpošanas laiks ir sadalīts pēc eksponenciālā likuma, kas stipri vienkāršo sistēmā pielietojamo matemātisko aparātu. Ja uz sistēmu iedarbojas vienkāršākā plūsma un apkalpošanas laiks ir pakļauts eksponenciālajam likumam, tad var uzskatīt, ka sistēmā noris Markova gadījuma process. Tas nozīmē, ka jebkura sistēmas stāvokļa varbūtība laika momentā $t_1 + t$ ir atkarīga tikai no sistēmas stāvokļa momentā t_1 , bet nav atkarīga no tā, kā sistēma ir nonākusi šādā stāvoklī.

Vienkanāla masu apkalpošanas sistēmai ir zināma tāda teorēma Reiča.

Teorēma 1.

Ja ieejošās vienkanāla sistēmā un izejošās no sistēmas plūsmām ir Puasona sadalījuma likums, tad pieprasījuma apkalpošanas laiks vai ir pakļauts eksponenciālajam sadalījuma likumam, vai ar varbūtību 1 ir vienāds ar nulli.

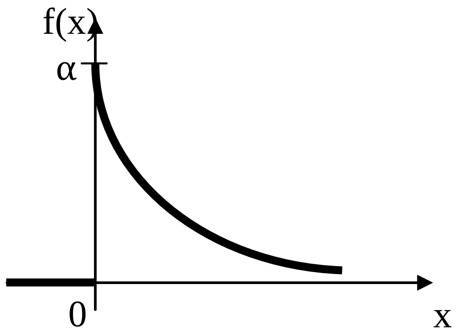
Eksponenciālā sadalījuma īpašības

Par *eksponenciālo* sauc tādu nepārtraukta gadījuma lieluma ξ sadalījuma likumu, kuru nosaka blīvuma funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & ja\ t < 0; \\ \propto e^{-\propto t}, & ja\ t \geq 0, \end{cases}$$

kur $\propto > 0$ ir pastāvīgs parametrs.

Grafiks izskatās šādi:



1.3.att.

Gadījuma lieluma sadalījuma funkcija ir

$$f(x) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1 - e^{-\propto t}, & t \geq 0, \end{cases}$$

Gadījuma lieluma ξ matemātiskā cerība ir $E\xi = \frac{1}{\alpha}$, dispersija ir $D\xi = \frac{1}{\alpha^2}$.

Varbūtība $P(t_1 < \xi < t_2)$ tam, ka nepārtraukta eksponenciāli sadalīta lieluma ξ vērtība piederēs intervālam $(t_1; t_2)$ tiek aprēķināta ar formulu

$$P(t_1 < \xi < t_2) = e^{-\propto t_1} - e^{-\propto t_2}$$

Īpašības:

1. Eksponenciālam sadalījumam ir unikālā īpašība:

$$P(\xi > t + \tau | \xi > \tau) = P(\xi > t)$$

Visam $t \geq 0\ un\ \tau \geq 0$.

2. Mazam pozitīvam h

$$P(\xi < h) = \alpha h + o(h).$$

3. Pieņemsim, ka laika momentā t_0 notiek n operācijas. Neatkarīgi gadījuma lielumi $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ir laiki no momenta t_0 līdz $i - tās$ operācijas beigām. Tie ir eksponenciāli sadalīti ar parametriem α_i ,$i = 1,2, \dots, n$. Tad gadījuma lielums $\gamma = min\{\gamma_i,\ i = 1,2, \dots, n\}$ ir eksponenciāli sadalīts ar parametru $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ un ja ir zināms, ka $\gamma = t$, tad neatkarīgi no t

$$P(\gamma = \gamma_i | \gamma = t) = \frac{\alpha_i}{\alpha},\ i = 1, \dots, n.$$

4. Pieņemsim, ka laika momentā t_0 notiek n operācijas. Neatkarīgie gadījuma lielumi $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ir laiki no momenta t_0 līdz $i - t\bar{a}s$ operācijas beigām. Tie ir eksponenciāli sadalīti ar parametriem α_i ,$i = 1,2, \dots , n$, gadījuma lielums $\gamma = min\{\gamma_i,\ i = 1,2, \dots , n\}$ ir eksponenciāli sadalīts ar parametru $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Apzīmēsim ar ν_h to operāciju skaitu, kas beigsies intervālā $(t_0, t_0 + h)$. Tad

$$P(\nu_h = 0) = 1 - \alpha h + o(h),$$

$$P(\nu_h = 1) = \alpha h + o(h),$$

$$P(\nu_h \geq 1) = \alpha h + o(h),$$

$$P(\nu_h \geq 2) = o(h).$$

Pieradījums. [1, 15.lpp]

2. IESTĀDES APRAKSTS

Ir dots apģērbu veikals, kur kopumā strādā 4 cilvēki, katru dienu divatā. Praktiski nav nekādu ierobežojumu ne uz rindas garumu ne uz ko citu, tātad mēs to arī pieņemam un apskatam masu apkalpošanas sistēmu ar gaidīšanu. Uz sistēmu iedarbojas vienkāršāka ieejas plūsma. Šajā sistēmā visi pieprasījumi, kas ienāks, tiks apkalpoti, bet ja kanāls ir aizņemts, tad pieprasījums gaidīs rindā un tad tiek apkalpots. Pārdevējs vidēji apkalpo vienu pircēju 15 minūtes. Mēs pieņemam, ka apkalpošanas laiks ir sadalīts eksponenciāli.

Klientu skaits ir dots tabulā, no tā mēs secinām cik vidēji klientu ir apkalpotas stundas laikā. Dati ir iegūti veicot tiešu skaitīšanu. Diena ir sadalīta divas daļas, jo ir jūtama starpība starp klientu skaitu no rīta un vakarā. Tātad, mēs pieņemam, ka pirmā dienas daļa ir no 10^{00} līdz 15^{00} un otrā daļa ir no 15^{00} līdz 21^{00}. Cilvēku skaits ir paradīts tabulas.

2.1. tabula

Ienākošo klientu skaits $10^{00} - 15^{00}$

Ienākošo klientu skaits	Vidējais klientu skaits stundā
42	8,39
45	9
41	8,2
35	7
49	9,8
41	8,2
44	8,8
40	8
38	7,6
42	8,4
41	8,2
47	9,4
34	6,8
38	7,6
37	7,4
35	7
45	9
28	5,6
44	8,8
35	7
34	6,8
40	8
36	7,2
38	7,6
44	8,8
48	9,6
29	5,8
42	8,4
41	8,2
39	7,8

2.2. tabula

Ienākošo klientu skaits $15^{00} - 21^{00}$

Ienākošo klientu skaits	Vidējais klientu skaits stundā
77	12,8
78	13
73	12,2
70	11,7
84	14,
73	12,2
71	11,8
75	12,5
68	11,3
75	12,5
72	12,
80	13,3
71	11,8
71	11,8
67	11,2
74	12,3
66	11
63	10,5
72	12,
73	12,2
65	10,8
72	12,
77	12,8
73	12,2
70	11,7
80	13,3
66	11,
70	11,7
79	13,2
73	12,2

Tabulās ir doti dati par novembri, skatīt pielikumā. Lai iegūtu precīzākus rezultātus, izmetām atsevišķas dienas, kas būtiski atšķiras no pārējiem. Tādas dienas ir radījušas dēļ sliktiem laika apstākļiem, svētkiem un citiem notikumiem, kas var ietekmēt cilvēku plūsmu (apzīmētas ar gaiši pelēku krāsu).

Veikalā 1. laika posmā vidēji stundas laikā ienāk 7.89 cilvēki. No tiem vidēji 5 cilvēkiem ir nepieciešama pārdēvēja palīdzība. 2. laika posmā vidēji stundas laikā ienāk 12.08 cilvēki. No tiem vidēji 7 cilvēkiem ir nepieciešama pārdēvēja palīdzība. Cilvēku skaits, kam nepieciešama pārdēvēja palīdzība noteikts atsaucoties uz novērošanu un darba pieredzi. Vidēji viena klienta apkalpošana aizņem 15 minūtes. Apskatīsim situāciju ar šiem vidējiem lielumiem, ņemot vērā šādus pieņēmumus: visiem darbiniekiem ir aptuveni vienāds apkalpošanas ātrums un visi klienti, kam nepieciešama apkalpošana stājās rindā.

3. VIENKANĀLA MASU APKALPOŠANAS SISTĒMA AR GAIDĪŠANU (M/M/1):(GD/∞/∞)

Apkalpošanas sistēmā ir viens kanāls. Tas vienlaicīgi var apkalpot tikai vienu pieprasījumu. Ja pieprasījums nonāk sistēmā, kad kanāls ir aizņemts, tas stājas rindā un gaida savu apkalpošanas kārtu. Pieņemsim, ka pieprasījums nonākot sistēmā, neatstās sistēmu neapkalpots.

Uz sistēmu iedarbojas vienkāršākā plūsma ar intensitāti λ (galīgs lielums) un plūsmas avots nav ierobežots. Apkalpošanas laiks ir gadījuma lielums, kas pakļauts eksponenciālajam sadalījuma likumam ar parametru μ .

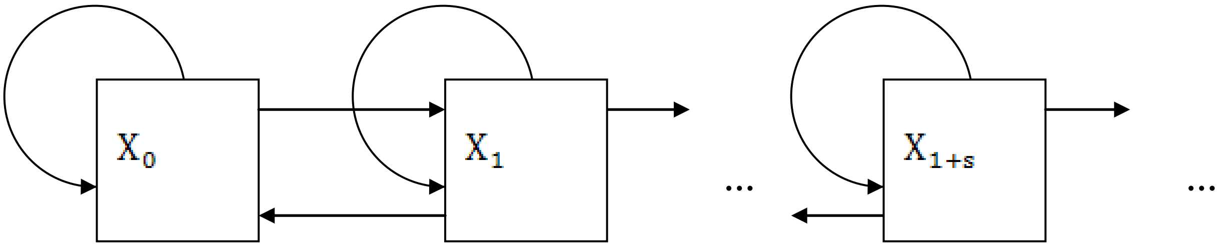
Lai sastādītu sistēmas modeli, noteiksim tās stāvokļus atkarība no sistēmā esošo pieprasījumu skaita:

X_0 – kanāls ir brīvs;

X_1 – sistēmā ir viens pieprasījums, kas tiek apkalpots kanālā;

X_{1+s}– aizņemts kanāls un *s* pieprasījumi stāv rindā, $s = 1{,}2, \ldots$

Shematiski pārejas no viena stāvokļa citā var attēlot tā:



3.1.att. **Sistēmas stāvokļi** $\{X_0, X_1, \ldots, X_{1+s}, \ldots\}$

Pieprasījumu skaits s, kuri atrodas rindā ir neierobežots. Tas nozīmē, ka sistēmas stāvokļu skaits nav ierobežots. No tā izriet, ka arī sistēmu aprakstošo diferenciālvienādojumu skaits nav ierobežots. Bet ņemot vērā, ka modelis attēlo reālus objektus, šī bezgalība ir nosacīta.

Varbūtību vektora

$$p(t) = (p_0(t), p_1(t), \ldots, p_{1+s}(t), \ldots)$$

koordinātes var sanumurēt. Diferenciālvienādojumu, kas raksturos sistēmas stāvokļu varbūtības, iegūšanai izmantosim Kolmogorova vienādojumus. Iegūsim bezgalīga skaita diferenciālvienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - (\lambda+\mu)p_1(t) + \mu p_2(t), \\ \dots \\ \frac{dp_{1+s}(t)}{dt} = \lambda p_s(t) - (\lambda+\mu)p_{1+s}(t) + \mu p_{1+s+1}(t), s > 0 \\ \dots \end{cases} \tag{3.1}$$

Tā kā apkalpošanas sistēma vienmēr atrodas vienā no saviem stāvokļiem, vienādojumu sistēmas atrisinājums atbilst normējošajam noteikumam $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1$.

Augot s, varbūtības $p_{1+s}(t)$ var kļūt bezgalīgi mazas, tāpēc arī attiecīgos vienādojumus var neievērot.

3.1. Atrisinājums pārejas režīmā

Kopš 1953.gada, kad tika iegūts pārejas procesa atrisinājums, tika piedāvāti vairāki šī uzdevuma risinājumu varianti. Tiks izklāstīts vienkāršs atrisinājuma atrašanas veids, kas balstās uz dažu jau esošu metožu pilnveidošanas. Pieņemsim, ka sakuma nosacījumi ir aplūkoti arī vispārīga veidā, ka sākuma momentā sistēmā ir i pieprasījumi, t.i.

$p_k(0) = 0, k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots$, t.i. izslēdzot gadījumu, kad $p_i(0) = 1$.

Ieviesīsim varbūtības ģenerējošu funkciju $p_n(t)$

$$P(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n, \tag{3.2}$$

kura, acīmredzami, konverģē vienības riņķī $|z| \leq 1$.

Kad $n \geq i$,

$$p_n(t) = e^{-(\lambda+\mu)t}\left[\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^{i-n} I_{n-i}\left(2\sqrt{\lambda\mu t}\right) + \right. \\ + \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^{i-n+1} I_{n+i+1}\left(2\sqrt{\lambda\mu t}\right) + \\ \left. + \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} \sum_{k-n+i+2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^{k} I_k\left(2\sqrt{\lambda\mu t}\right)\right], \tag{3.3}$$

kur - vispārināta pirmās kārtas Beseļa funkcija [4]

$$I_v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{v+2k}}{k!\Gamma(v+k+1)}, I_v(z) = i^{-v} I_v(z), \tag{3.4}$$

$$I_v(z) = \frac{z^v}{2^v v!}, \text{ kad } z \to 0, \text{ un } I_v(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \text{ kad } z \to \infty. \tag{3.5}$$

3.2. Risinājums stacionārajam darba režīmam

Apskatīsim sistēmas funkcionēšanu stacionārā režīmā, kad $t \to \infty$. Tāds režīms eksistē, ja $\alpha < 1$, t.i., ja vidējais pieprasījumu skaits, kas attiecas uz viena pieprasījuma vidējo apkalpošanas laiku, nepārsniedz kanāla apkalpošanas iespējas. Ja $\alpha \geq 1$, tad pieprasījumu skaits, kas atrastos rindā, bezgalīgi pieaugtu.

Pieņemsim, ka $\alpha < 1$. Varbūtības $p_k(t)(k = 0,1, \dots)$ ir konstantas, bet to atvasinājumi ir nulles. Iegūsim algebrisku vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\ \lambda p_0 - (\lambda + \mu) p_1 + \mu p_2 = 0 \\ \dots \\ \lambda p_s - (\lambda + \mu) p_{1+s} + \mu p_{1+s+1} = 0, \quad s > 0 \\ \dots \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \tag{3.7}$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}} = 1 - \alpha.$$

Tādējādi varbūtību, ka kanāls būs aizņemts un *s* pieprasījumi atradīsies rindā $(s = 0,1, \dots)$ var izteikt šādi:

$$p_{1+s} = \alpha^{1+s}(1 - \alpha) .$$

Ar šīm varbūtībām var izteikt sistēmas funkcionēšanas efektivitātes rādītājus.

3.3. Littla formula [2, 652.lpp]

Jebkurai masu apkalpošanas sistēmai ar jebkuru pieprasījumu plūsmas veidu un jebkuru apkalpošanas disciplīnu, pie jebkura apkalpošanas laika sadalījuma likuma ir spēkā pirmā Littla formula:

$$\bar{t}_{sist} = \frac{\bar{k}}{\lambda}$$

t.i., vidējais laiks, ko pieprasījums pavada sistēmā, ir vienāds ar sistēmas vidējā pieprasījumu skaita attiecību pret ieejas plūsmas intensitāti.

Ir spēkā arī otrā Littla formula:

$$\bar{t}_{gaid} = \frac{\bar{s}}{\lambda}$$

t.i., vidējais laiks, ko pieprasījums pavadā rindā, ir vienāds ar rindas vidējā pieprasījumu skaita attiecību pret ieejas plūsmas intensitāti.

3.4. Pollaceka-Hinčina formula [2, 680.lpp]

Formula ir spēkā pie visiem apkalpošanas laika sadalījumiem.

$$\overline{k} = \lambda \cdot E(\eta) + \frac{\lambda^2 \cdot (D(\eta) + E^2(\eta))}{2 \cdot (1 - \lambda \cdot E(\eta))}$$

No šīs formulas var iegūt, ka vidējais pieprasījuma skaits rindā ir:

$$\overline{s} = \sum_{s=1}^{\infty} s \cdot p_{1+s} = \overline{k} - \lambda \cdot E(\eta) = \frac{\lambda^2 \cdot (D(\eta) + E^2(\eta))}{2 \cdot (1 - \lambda \cdot E(\eta))}$$

Izmantojot Pollaceka-Hinčina formulu aprēķinam vidējo pieprasījumu skaitu sistēmā

Analizējamā uzdevumā mēs nevaram pielietot šo formulu, jo mēs pieņemam, ka apkalpošanas laiks ir vidēji 1.7 minūtes, un līdz ar to nav iespējams izrēķināt dispersiju. Tomēr, ja ir nepieciešams izmantot Pollaceka-Hinčina formulu, varam veikt tiešus apkalpošanas laika mērījumus pie kases, un no tiem datiem iegūt dispersiju.

3.5. Sistēmas funkcionēšanas efektivitātes rādītāji:

1. Varbūtība, ka izveidosies rinda:

$$p_{rinda} = \sum_{k=2}^{\infty} p_k = (1 - \alpha) \cdot \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} = \alpha^2$$

2. Vidējais aizņemto kanālu skaits:

$$\overline{n}_{aiz} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 - p_0 = \alpha$$

3. Vidējais brīvo kanālu skaits:

$$\overline{n}_b = 1 - \overline{n}_{aiz} = 1 - \alpha$$

4. Kanāla noslodzes koeficients:

$$a_{\overline{n}} = \overline{n}_{aiz} = \alpha$$

5. Vidējais pieprasījumu skaits sistēmā:

$$\overline{k} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

6. Vidējais pieprasījumu skaits rindā:

$$\overline{s} = \sum_{s=1}^{\infty} s p_{1+s} = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha}$$

7. Vidējais pieprasījuma apkalpošanas laiks:

$$\bar{t}_{apk} = \frac{1}{\mu}$$

Pēc Littla formulas var iegūt arī:

8. Vidējais laiks, ko pieprasījums pavada sistēmā:

$$\bar{t} = \frac{\bar{k}}{\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda(1-\alpha)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

9. Vidējais laiks, ko pieprasījums pavada rindā:

$$\bar{t}_g = \frac{\bar{s}}{\lambda} = \frac{\alpha^2}{\lambda(1-\alpha)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Finčs šādas sistēmas gadījumā pieradīja teorēmu:

Teorēma 2.

Vienkanāla masu apkalpošanas sistēmas ar vienkāršāko ieejas plūsmu un eksponenciāli sadalīto apkalpošanas laiku stacionārajam režīmam ir spēkā apgalvojumi:

- pieprasījumu skaits, kas atrodas rindā pēc tam, ka no sistēmas izgāja pieprasījums, robežgadījumā nav atkarīgs no tā, kad no sistēmas izgāja iepriekšējais pieprasījums,
- divi pēc kārtas intervāli starp pieprasījumu izejas momentiem, ir savstarpēji neatkarīgi.

Šī teorēma ir svarīga, kad sistēma sastāv no paralēliem kanāliem un no viena kanāla izejošā plūsma ir cita kanāla ieejošā plūsma.

3.6. Sistēmas risinājums veikala modelim

Ir dots veikals, kur katru dienu strādā divi cilvēki. Izanalizēsim situāciju ja veikalā strādātu tikai viens pārdevējs. Mēs varam mēģināt apskatīt vienkanāla masu apkalpošanas modeli ar gaidīšanu, kas ir pamatsistēma MAS teorijā. Uz sistēmu iedarbojas vienkāršāka ieejas plūsma. Šajā sistēmā visi pieprasījumi, kas ienāks, tiks apkalpoti, bet ja kanāls ir aizņemts, tad pieprasījums gaidīs rindā un tad tiek apkalpots. Pārdevējs vidēji apkalpo vienu pircēju 15 minūtes. Mēs pieņemam, ka apkalpošanas laiks ir sadalīts eksponenciāli.

Veikala 1. laika posmā vidēji stundas laikā ienāk 7.89 cilvēki. No tiem vidēji 5 cilvēkiem ir nepieciešama pārdēvēja palīdzība. 2. laika posmā vidēji stundas laikā ienāk 12.08 cilvēki. No tiem vidēji 7 cilvēkiem ir nepieciešama pārdēvēja palīdzība. Vidēji viena klienta apkalpošana aizņem 15 minūtes. Apskatīsim situāciju ar šiem vidējiem lielumiem, ņemot vērā šādus pieņēmumus: visiem darbiniekiem ir aptuveni vienāds apkalpošanas ātrums un visi klienti stājās vienā rindā.

a) $Laiks\ 10^{00} - 15^{00}$

Sistēmas parametri:

- apkalpošanas kanālu skaits ir $n = 1$;
- ieejas plūsmas intensitāte ir $\lambda = 5$ pircēji/h
- apkalpošanas intensitāte ir $\mu = 4$ pircēji/h

Tad $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 1.25$. Nosacījums $\alpha < n$ nav spēkā un tas nozīmē, ka stacionārs darba režīms neeksistē.

b) $Laiks\ 15^{00} - 21^{00}$

Sistēmas parametri:

- apkalpošanas kanālu skaits ir $n = 1$;
- ieejas plūsmas intensitāte ir $\lambda = 7$ pircēji/h
- apkalpošanas intensitāte ir $\mu = 4$ pircēji/h

Tad $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 1.75$. Nosacījums $\alpha < n$ nav spēkā un tas nozīmē, ka stacionārs darba režīms neeksistē.

Ka mēs redzam, abos gadījumos stacionārs darba režīms neeksistē. Tātad mūsu gadījumā apskatīt tālāk vienkanāla MAS nav nepieciešams. Pāriesim pie citām sistēmām.

4. DAUDZKANĀLU MASU APKALPOŠANAS SISTĒMA AR GAIDĪŠANU (M/M/N):(GD/∞/∞)

Apkalpošanas sistēma sastāv no n kanāliem. Katrs kanāls vienlaikus var apkalpot tikai vienu pieprasījumu. Ja pieprasījums nonāk sistēmā, kad visi kanāli aizņemti, tad tas stājas rindā un gaida savu apkalpošanas kārtu. Ja pieprasījums, nonākot sistēmā, sastop kaut vienu brīvu kanālu, tas tūlīt tiek apkalpots.

Pieņemsim, ka uz sistēmu iedarbojas vienkāršākā plūsma un ka plūsmas avots nav ierobežots, kaut gan plūsmas intensitāte λ ir galīgs lielums. Apkalpošanas laiks ir gadījuma lielums, kas pakļauts eksponenciālajam sadalījuma likumam ar parametru μ. Visiem apkalpošanas kanāliem ir vienāds darba ražīgums.

Sistēmas stāvokļus noteiksim pēc pieprasījumu skaita, kas ir saistīti ar sistēmu. Par saistītiem pieprasījumiem sauksim tādus pieprasījumus, kas atrodas rindā vai tiek apkalpoti.

Tātad sistēma jebkurā laika momentā atrodas vienā no šādiem stāvokļiem:

X_0 – neviens kanāls nav aizņemts;

X_1 – aizņemts viens kanāls;

...;

X_k– aizņemti k kanāli;

...;

X_n – aizņemti visi n kanāli;

...;

X_{n+1} – visi n kanāli aizņemti un viens pieprasījums stāv rindā;

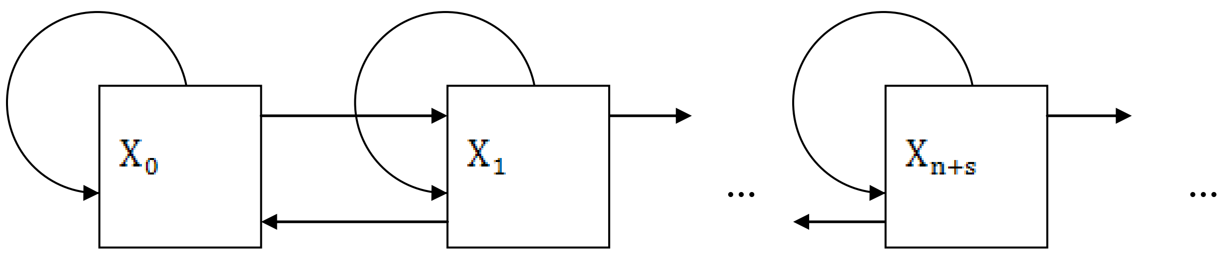
...;

X_{n+s}– visi n kanāli aizņemti un *s* pieprasījumi stāv rindā;

...

[3, 76.lpp]

Shematiski sistēmas stāvokļi un pārejas no viena stāvokļa citā parādītas $(4.1.)$ attēlā.



4.1.att. **Sistēmas stāvokļi** $\{X_0, X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+s}, \ldots\}$

Izmantosim Kolmogorova vienādojumu sistēmu, lai atrastu varbūtību vektoru

$$p(t) = \{p_0(t), p_1(t),\dots, p_n(t), p_{n+1}(t),\dots, p_{n+s}(t),\dots \}.$$

Pieprasījumu skaits *s*, kuri atrodas rindā ir neierobežots un arī sistēmu aprakstošo diferenciālvienādojumu skaits nav ierobežots.

Izmantojot Kolmogorova vienādojumus, iegūst sistēmas stāvokļu varbūtībām bezgalīga skaita diferenciālvienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases}
\dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\
\dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - (\lambda+\mu) p_1(t) + 2\mu p_2(t), \\
\dots \\
\dfrac{dp_k(t)}{dt} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda+k\mu) p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), (1<k<n), \\
\dots \\
\dfrac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda+n\mu) p_n(t) + n\mu p_{n+1}(t), \\
\dots \\
\dfrac{dp_{n+1}(t)}{dt} = \lambda p_{n+s-1}(t) - (\lambda+n\mu) p_{n+s}(t) + n\mu p_{n+s+1}(t), (s>0), \\
\dots
\end{cases} \quad (4.1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1.$$

Integrējot sistēmu (4.1), ir jāievēro, ka teorētiski vienādojumu skaits ir bezgalīgs, bet, augot *s*, varbūtības $p_{n+s}(t)$ var kļūt bezgalīgi mazas, tāpēc arī attiecīgos vienādojumus var neievērot.

Apskatīsim sistēmas funkcionēšanu stacionārā režīmā, kad $t \to \infty$. Tāds režīms eksistē, ja $\alpha < n$, t.i., ja vidējais pieprasījumu skaits, kas attiecas uz viena pieprasījuma vidējo apkalpošanas laiku, nepārsniedz *n* kanālu sistēmas apkalpošanas iespējas. Ja $\alpha \geq n$, tad pieprasījumu skaits, kas atrodas rindā, bezgalīgi pieaugtu. Pieņemsim, ka $\alpha < n$. No vienādojumiem (4.1), pieņemot, ka varbūtības $p_k(t)$ (k=0,1,…,n,…,n+s,…) ir konstantas, bet to atvasinājumi ir nulles, iegūstam algebrisku vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\ \ldots \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0, (1 \le k < n), \\ \ldots \\ \lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu) p_n + n\mu p_{n+1} = 0, \\ \ldots \\ \lambda p_{n+s-1} - (\lambda + n\mu) p_{n+s} + n\mu p_{n+s+1} = 0, (s > 0), \\ \ldots \end{cases} \tag{4.2}$$

Tā kā apkalpošanas sistēma vienmēr atrodas vienā no saviem stāvokļiem, tad

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \tag{4.3}$$

[3, 79.lpp]

Formula

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} p_0 = \frac{\alpha^k}{k!} p_0, \ k = 1,2,\ldots n, \text{ kur } \alpha = \frac{\lambda}{\mu},$$

kas ļauj noteikt jebkuru varbūtību $p_k (k = 1,2,\ldots,n)$, ja ir zināma varbūtība p_0.

$$p_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s}}{n! n^s} p_0, \ s = 1,2,\ldots$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}.$$

Tādējādi varbūtību, ka būs aizņemti k kanāli, var izteikt šādi:

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0 = \frac{\alpha^k}{k!} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}, k = 1,2,\ldots,n.$$

Varbūtību, ka būs aizņemti visi n kanāli un s pieprasījumi atradīsies rindā, uzrakstīsim šādi:

$$p_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s}}{n^s n!} p_0 = \frac{\alpha^{n+s}}{n^s n!} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}, s = 1,2,\ldots.$$

4.1. Sistēmas funkcionēšanas efektivitātes rādītāji

1. **Varbūtība, ka visi kanāli būs aizņemti**

Noteiksim varbūtību no tikumam, ka visi apkalpošanas kanāli būs aizņemti; tātad sistēmā jāatrodas n vai vairāk nekā n pieprasījumiem.

$$p_{aiz} = \frac{\alpha^n}{(n-1)!(n-\alpha)} p_0 .$$

2. **Varbūtība, ka izveidosies rinda**

$$p_{rinda} = \sum_{s=1}^{\infty} p_{n+s} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n+s}}{n! n^s} p_0 = \frac{\alpha^n}{n!} p_0 \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s = \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)} p_0 .$$

3. **Vidējais aizņemto kanālu skaits**

$$\overline{n}_{aiz} = \alpha .$$

Rezultāts izsaka acīmredzamo faktu, ka sistēmā, kurā nav zudumu, vidējais aizņemto kanālu skaits (apkalpotā slodze) sakrīt ar ienākošo slodzi.

4. **Vidējais brīvo kanālu skaits**

$$\overline{n}_b = n - \overline{n}_{aiz} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \frac{\alpha^k}{k!} p_0$$

jeb no iepriekšējā punkta seko, ka $\overline{n}_b = n - \overline{n}_{aiz} = n - \alpha$.

5. **Kanāla noslodzes koeficients**

$$a_{\overline{n}} = \frac{\overline{n}_{aiz}}{n} = \frac{\alpha}{n} .$$

6. **Vidējais pieprasījumu skaits rindā**

$$\overline{s} = \sum_{s=1}^{\infty} s p_{n+s} = \frac{\alpha}{(n-\alpha)} p_{aiz} .$$

7. **Vidējais pieprasījumu skaits sistēmā**

$$\overline{k} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \left(\alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\alpha^n (n^2 - \alpha n + \alpha)}{(n-1)!(n-\alpha)^2} \right) p_0 .$$

Vai $\overline{k} = \alpha + \overline{s}$.

8. **Vidējais pieprasījuma apkalpošanas laiks**

$$\overline{t}_{apk} = \frac{1}{\mu} .$$

9. Vidējais gaidīšanas laiks

Zinot sadalījuma funkciju rindā gaidīšanas laikam, var noteikt pieprasījuma vidējo rindā stāvēšanas laiku $\bar{t}_g$, ja sistēma sastāv no n apkalpošanas kanāliem.

$$\bar{t}_g = \frac{p_{aiz}\bar{t}_{apk}}{n-\alpha}.$$

Salīdzinot $\bar{s}$ un $\bar{t}_g$ izteiksmes, redz, ka $\bar{s} = \lambda\bar{t}_g$. Šai sakarībai ir vienkārša fizikālā interpretācija $-\lambda$ ir vidējais pieprasījumu plūsmas ātrums (laika vienībā vidēji caur sistēmu iziet λ pieprasījumi), $\bar{s}$ rindas vidējais garums, bet $\bar{t}_g$ vidējais šī garuma veikšanai vajadzīgais laiks. Tā ir Littla formula rindai. [2,652.lpp]

10. Vidējais laiks, ko pieprasījums pavada sistēmā

$$\bar{t}_{sist} = \bar{t}_g + \frac{1}{\mu}$$

jeb pēc Littla formulas $\bar{t}_{sist} = \frac{\bar{k}}{\lambda}$.

11. Gaidīšanas laika sadalījuma funkcija

$$P(\gamma > t) = p_{aiz} e^{-(n\mu-\lambda)t}.$$

Līdz ar to sadalījuma funkcija gaidīšanas laikam ir

$$F(t) = 1 - P(\gamma > t) = 1 - p_{aiz} e^{-(n\mu-\lambda)t} \quad (t \geq 0)$$

Tā ir varbūtība, ka rindā stāvēšanas laiks nepārsniegs lielumu t, t.i., rindā gaidīšanas laika γ sadalījuma funkcija, ja sistēma funkcionē stacionārā režīmā.

Lai noteiktu vislabāko apkalpošanas veidu, projektējot sistēmas, var izmantot šādu zaudējumu funkciju:

$$C_T(n) = (\bar{s}C_g + C_d\bar{n}_b + C_e n)T,$$

kur T – laika intervāls, kurā analizē sistēmas funkcionēšanu;

C_g – izmaksas, kas ir saistītas ar viena pieprasījuma atrašanos rindā vienu laika vienību;

C_d – izmaksas, kuras rodas kanāla dīkstāves gadījumā, vienā laika vienībā;

C_e – viena kanāla ekspluatācijas izmaksas vienā laika vienībā.

Mainot parametrus formulā, iegūst dažādas zaudējumu funkcijas vērtības, un var ņemt parametru vērtības tā, lai šīs funkcijas vērtība būtu minimāla. Parasti izvēlas kanālu skaitu. [3, 87.lpp]

4.2. Sistēmas risinājums veikala modelim

Ir dots apģērbu veikals, kur kopumā strādā 4 cilvēki, katru dienu divatā. Praktiski nav nekādu ierobežojumu ne uz rindas garumu ne uz ko citu, tātad mēs to arī pieņemam un apskatam vienkanāla masu apkalpošanas sistēmu ar gaidīšanu. Uz sistēmu iedarbojas vienkāršāka ieejas plūsma. Šajā sistēmā visi pieprasījumi, kas ienāks, tiks apkalpoti, bet ja kanāls ir aizņemts, tad pieprasījums gaidīs rindā un tad tiek apkalpots. Pārdevējs vidēji apkalpo vienu pircēju 15 minūtes. Mēs pieņemam, ka apkalpošanas laiks ir sadalīts eksponenciāli.

Veikala 1. laika posmā vidēji stundas laikā ienāk 7.89 cilvēki. No tiem vidēji 5 cilvēkiem ir nepieciešama pārdēvēja palīdzība. 2. laika posmā vidēji stundas laikā ienāk 12.08 cilvēki. No tiem vidēji 7 cilvēkiem ir nepieciešama pārdēvēja palīdzība. Vidēji viena klienta apkalpošana aizņem 15 minūtes. Apskatīsim situāciju ar šiem vidējiem lielumiem, ņemot vērā šādus pieņēmumus: visiem darbiniekiem ir aptuveni vienāds apkalpošanas ātrums un visi klienti stājās rindā.

Risinājums

1) Apskatam esošo sistēmu, kad $n = 2$.

a) *Laiks* $10^{00} - 15^{00}$

Sistēmas parametri:

- apkalpošanas kanālu skaits ir $n = 2$;
- ieejas plūsmas intensitāte ir $\lambda = 5$ pircēji/h
- apkalpošanas intensitāte ir $\mu = 4$ pircēji/h

Tad $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 1.25$

Sākuma pārbaudīsim, vai eksistē stacionārs darba režīms. Nosacījums $\alpha < n$ ir spēkā un tas nozīmē, ka stacionārs darba režīms eksistē.

Tālāk pēc formulām aprēķināsim sistēmas efektivitātes radītājus.

1. Dīkstāves varbūtība:

$$p_d = p_0 = 0.23$$

Tas nozīmē, ka 23% no sava darba laika pārdevējs neapkalpo klientus. Tas ir apmēram 14 minūtes stundā, kas dažreiz nav pietiekami daudz, lai paspēt izdarīt atlikušus darbus veikalā. Piemēram, ja ir nepieciešams sazvanīt klientus, sakārtot atliktas drēbes, aizpildīt atgriešanas aktus un citus līdzīgus darbus.

2. Varbūtība, ka izveidosies rinda:

$$p_{rinda} = 0.3$$

Ar varbūtību 30% pie kases izveidosies rinda.

3. Varbūtība, ka visi kanāli būs aizņemti:

$$p_{aiz} = 0.48$$

Ar varbūtību 48% visi kanāli būs aizņemti.

4. Vidējais aizņemto kanālu skaits:

$$\bar{n}_{aiz} = 1.25$$

5. Vidējais brīvo kanālu skaits:

$$\bar{n}_b = 0.75$$

6. Kanāla noslodzes koeficients:

$$a_{\bar{n}} = 0.63$$

7. Vidējais pieprasījumu skaits rindā (rindas garums):

$$\bar{s} = 0.8$$

Gandrīz 1 cilvēks vienmēr atradīsies rindā, kas būtiski nav daudz.

8. Vidējais pieprasījumu skaits sistēmā:

$$\bar{k} = 2.05$$

2 cilvēki vienmēr atradīsies sistēmā.

9. Vidējais pieprasījuma apkalpošanas laiks:

$$\bar{t}_{apk} = 0.25 \approx 15\ min$$

Tas laiks jau bija iedots uzdevuma un ir iegūts ar tiešo mērījumu palīdzību.

10. Izmantojot pirmo Littla formulu, aprēķinam vidējo laiku, ko pieprasījums pavada sistēmā:

$$\bar{t} = 0.41 \approx 24.6\ min$$

11. Izmantojot otro Littla formulu, aprēķinam vidējo laiku, ko pieprasījums pavada rindā:

$$\bar{t}_g = 0.16 \approx 9.6\ min$$

Tas ir viens no mums svarīgākajiem kritērijam, jo mazāk cilvēks stāv rindā, jo ātrāk viņš tiek pie apkalpošanas. Un kā secinājums ir vairāk apmierināts, netērējot pārāk ilgu laiku uz stāvēšanu rindā.

b) *Laiks* $15^{00} - 21^{00}$

Sistēmas parametri:

- apkalpošanas kanālu skaits ir $n = 2$;
- ieejas plūsmas intensitāte ir $\lambda = 7$ pircēji/h
- apkalpošanas intensitāte ir $\mu = 4$ pircēji/h

Tad $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 1.75$ - stacionārs darba režīms eksistē, jo $\alpha < n$.

1. Dīkstāves varbūtība:

$$p_d = p_0 = 0.06$$

Tas nozīmē, ka 6% no sava darba laika pārdevējs neapkalpo klientus. Tas ir apmēram 4 minūtes stundā, kas ir ļoti mazs rezultāts, lai darbinieks varētu kvalitatīvi veikt visus pienākumus.

2. Varbūtība, ka izveidosies rinda:

$$p_{rinda} = 0.64$$

Ar varbūtību 64% pie kases izveidosies rinda.

3. Varbūtība, ka visi kanāli būs aizņemti:

$$p_{aiz} = 0.73$$

Ar varbūtību 73% visi kanāli būs aizņemti.

4. Vidējais aizņemto kanālu skaits:

$$\bar{n}_{aiz} = 1.75$$

5. Vidējais brīvo kanālu skaits:

$$\bar{n}_b = 0.25$$

6. Kanāla noslodzes koeficients:

$$a_{\bar{n}} = 0.875$$

Pietiekamu liela vērtība, kas noteikti var samazināt apkalpošanas kvalitāti, jo darbiniekiem nepaliek daudz laika, lai pievērst uzmanību katram klientam.

7. Vidējais pieprasījumu skaits rindā (rindas garums):

$$\bar{s} = 5.11$$

Aptuveni 5 cilvēki vienmēr atradīsies rindā, kas ir pietiekami daudz. Tomēr klientu apmierinātība būs atkarīga no laika, ko viņš pavada rindā.

8. Vidējais pieprasījumu skaits sistēmā:

$$\bar{k} = 6.86$$

Gandrīz 7 cilvēki vienmēr atradīsies sistēmā.

9. Vidējais pieprasījuma apkalpošanas laiks:

$$\bar{t}_{apk} = 0.25 \approx 15\ min$$

Tas laiks jau bija iedots uzdevuma un ir iegūts ar tiešo mērījumu palīdzību.

10. Izmantojot pirmo Littla formulu, aprēķinam vidējo laiku, ko pieprasījums pavada sistēmā:

$$\bar{t} = \frac{\bar{k}}{\lambda} = 0.98 \approx 58.8\ min$$

11. Izmantojot otro Littla formulu, aprēķinam vidējo laiku, ko pieprasījums pavada rindā:

$$\bar{t}_g = \frac{\bar{s}}{\lambda} = 0.73 \approx 43.8\ min$$

Iegūts rezultāts ir slikts, kaut vai reālajā dzīvē tas laiks ir mazāks. Ne katram klientam ir tik daudz pacietības, lai gaidīt tik ilgi. Tātad kāda daļa var vienkārši neizturēt un atstāt veikalu. Lai tādi gadījumi nenotiktu, palielināsim kanālu skaitu un apskatīsim rezultātus.

2) Tagad apskatam situāciju, kad palielinājās darbinieku skaits līdz $\mathrm{n} = 3$.

a) Laiks $10^{00} - 15^{00}$

Sistēmas parametri:

- apkalpošanas kanālu skaits ir $n = 3$;
- ieejas plūsmas intensitāte ir $\lambda = 5$ pircēji/h
- apkalpošanas intensitāte ir $\mu = 4$ pircēji/h

Tad $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 1.25$ - stacionārs darba režīms eksistē, jo $\alpha < n$.

1. Dīkstāves varbūtība:

$$p_d = p_0 = 0.28$$

Tas nozīmē, ka 28% no sava darba laika pārdevējs neapkalpo pircējus. Tas ir apmēram 17 minūtes stundā, kas ir jau pietiekami daudz, lai paspēt izdarīt atlikušus darbus.

2. Varbūtība, ka izveidosies rinda:

$$p_{rinda} = 0.07$$

Ar varbūtību 7% pie kases izveidosies rinda, kas ir pietiekami mazs.

3. Varbūtība, ka visi kanāli būs aizņemti:

$$p_{aiz} = 0.16$$

Ar varbūtību 16% visi kanāli būs aizņemti.

4. Vidējais aizņemto kanālu skaits:

$$\bar{n}_{aiz} = 1.25$$

5. Vidējais brīvo kanālu skaits:

$$\bar{n}_b = 1.75$$

6. Kanāla noslodzes koeficients

$$a_{\bar{n}} = 0.42$$

Rezultāts daudz labāk nekā iepriekšēja sistēma, tad arī apkalpošanas kvalitāte turēsies augstākajā līmenī.

7. Vidējais pieprasījumu skaits rindā (rindas garums):

$$\bar{s} = 0.11$$

Apmēram 0.11 cilvēki vienmēr atradīsies rindā, skaitlis ir tuvs nullei, un tad varam secināt, ka rindas gandrīz nebūs. Tas pirmkārt ir ļoti labi klientiem, bet darbadevējam tik maza pārdēvēja noslodze varētu būt arī neizdevīga.

8. Vidējais pieprasījumu skaits sistēmā:

$$\bar{k} = 1.36$$

1.36 cilvēks vienmēr atradīsies sistēmā.

9. Izmantojot pirmo Littla formulu, aprēķinam vidējo laiku, ko pieprasījums pavada sistēmā:

$$\bar{t} = 0.27 \approx 16.2\ min$$

10. Izmantojot otro Littla formulu, aprēķinam vidējo laiku, ko pieprasījums pavada rindā:

$$\bar{t}_g = 0.02 \approx 1.2\ min$$

Gaidīšanas laiks rindā ir nedaudz vairāk par vienu minūti. Veikalam tas ir ļoti labs radītājs, un var teikt, ka tas laiks nav būtisks vispār.

b) Laiks $15^{00} - 21^{00}$

Sistēmas parametri:

- apkalpošanas kanālu skaits ir $n = 3$;
- ieejas plūsmas intensitāte ir $\lambda = 7$ pircēji/h
- apkalpošanas intensitāte ir $\mu = 4$ pircēji/h

Tad $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 1.75$ - stacionārs darba režīms eksistē, jo $\alpha < n$.

1. Dīkstāves varbūtība:

$$p_d = p_0 = 0.17$$

Tas nozīmē, ka 17% no sava darba laika pārdevējs neapkalpo pircējus. Tas ir apmēram 10 minūtes stundā.

2. Varbūtība, ka izveidosies rinda:

$$p_{rinda} = 0.15$$

Ar varbūtību 15% pie kases izveidosies rinda, kas ir pietiekami mazs.

3. Varbūtība, ka visi kanāli būs aizņemti:

$$p_{aiz} = 0.36$$

Ar varbūtību 36% visi kanāli būs aizņemti.

4. Vidējais aizņemto kanālu skaits:

$$\bar{n}_{aiz} = 1.75$$

5. Vidējais brīvo kanālu skaits:

$$\bar{n}_b = 1.25$$

6. Kanāla noslodzes koeficients

$$a_{\bar{n}} = 0.58$$

Rezultāts daudz labāk nekā iepriekšēja sistēma, tad arī apkalpošanas kvalitāte turēsies augstākajā līmenī.

7. Vidējais pieprasījumu skaits rindā (rindas garums):

$$\bar{s} = 0.50$$

Apmēram 0.50 cilvēki vienmēr atradīsies rindā, skaitlis ir mazs, tātad rinda gandrīz nebūs.

8. Vidējais pieprasījumu skaits sistēmā:

$$\bar{k} = 2.25$$

2.25 cilvēks vienmēr atradīsies sistēmā.

9. Izmantojot pirmo Littla formulu, aprēķinam vidējo laiku, ko pieprasījums pavada sistēmā:

$$\bar{t} = 0.32 \approx 19.2\ min$$

10. Izmantojot otro Littla formulu, aprēķinam vidējo laiku, ko pieprasījums pavada rindā:

$$\bar{t}_g = 0.07 \approx 4.2\ min$$

Gaidīšanas laiks rindā ir nedaudz vairāk par 4 minūtēm, kas ir ļoti labs rezultāts.

Sistēmas galvenie rezultāti ir paradīti tabulās:

4.1. tabula

Laika posms $10^{00} - 15^{00}$

$n = 2$	$n = 3$
$p_0 = 0.23$	$p_0 = 0.28$
$a_{\bar{n}} = 0.63$	$a_{\bar{n}} = 0.42$
$\bar{s} = 0.8$	$\bar{s} = 0.11$
$\bar{t}_g \approx 9.6\ min$	$\bar{t}_g \approx 1.2\ min$

4.2. tabula

Laika posms $15^{00} - 21^{00}$

$n = 2$	$n = 3$
$p_0 = 0.06$	$p_0 = 0.17$
$a_{\bar{n}} = 0.875$	$a_{\bar{n}} = 0.58$
$\bar{s} = 5.11$	$\bar{s} = 0.50$
$\bar{t}_g \approx 43.8\ min$	$\bar{t}_g \approx 4.2\ min$

Salīdzinot šis divas sistēmas, katrā laika periodā, mēs redzam, kā kanālu skaita palielināšana ļoti labi ietekme rezultātu. Efektivitātes rādītāji kļuva daudz labāki. Pie tam varam secināt, ka laika posmā $10^{00} - 15^{00}$ rezultāti jau no sakuma bija diezgan labi, un to uzlabošanas nav nepieciešamas. Savukārt laika posmā $15^{00} - 21^{00}$ kanālu skaita palielināšana ir obligāta, jo strādāt tāda veidā tālāk nav racionāli, un gaidīšanas laiks rindā ir nepieļaujami liels.

5. MASU APKALPOŠANAS SISTĒMA AR GAIDĪŠANU UN VIENMĒRĪGO APKALPOŠANAS DISCIPLĪNU

Labākus rezultātus var iegūst, ja apkalpošanā vienmēr piedalās visi kanāli, bet visus pieprasījumus apkalpo apmēram vienāds kanālu skaits. Šādu apkalpošanas disciplīnu nosauksim par „vienmērīgu apkalpošanu”. Ja sistēmā atrodas viens pieprasījums, tad visi n kanāli apkalpo šo pieprasījumu. Ja sistēmā atrodas vismaz n pieprasījumi, tad katrā kanālā apkalpo vienu pieprasījumu. Ja sistēmā atrodas $k < n$ pieprasījumi, tad vidēji katru pieprasījumu apkalpo k/n kanāli.

Pieprasījums saņem atteikumu vai stājas rindā, ja nav iespējams to apkalpot. Tas notiks gadījumā, kad katrs kanāls apkalpos vienu pieprasījumu. Ja pieprasījuma apkalpošanas ātrums palielinās proporcionāli kanālu skaitam, kas to apkalpo, tad nav svarīgi, cik kanālu apkalpo katru pieprasījumu. Nepieciešamas tikai, lai apkalpošanas procesā piedalītos visi n kanāli un lai apkalpotu visus k sistēma esošos pieprasījumus, ja $k \leq n$.

Pieņemsim, ka uz n kanālu masu apkalpošanas sistēmu ar m vietām rindā iedarbojas vienkāršākā plūsma ar parametru λ un pieprasījuma apkalpošanas laiks ir sadalīts atbilstoši eksponenciālajam sadalījuma likumam ar parametru μ. Pie tam vidējā apkalpošanas intensitāte pieaug proporcionāli kanālu skaitam, kas piedalās pieprasījuma apkalpošanā. Apkalpošanu raksturo vienmērīga apkalpošanas disciplīna:

X_0 – sistēmā nav pieprasījumu;

X_1 – sistēmā ir viens pieprasījums, ko apkalpo n kanāli;

...

X_k – sistēmā ir k $(0 \leq k \leq n)$ pieprasījumi, ko apkalpo n kanāli;

...

X_n – sistēmā ir n pieprasījumi, katrs kanāls apkalpo vienu pieprasījumu;

...

X_{n+s} – sistēmā ir $n + s$ $(0 < s < m)$ pieprasījumi, no tiem n pieprasījums apkalpo, pārējie gaida apkalpošanu;

...

X_{n+m} – sistēmā atrodas $n + m$ pieprasījumi, n pieprasījums apkalpo, pārējie gaida apkalpošanu.

Mūsu gadījumā tiek izmantota masu apkalpošanas sistēma ar bezgalīgi daudzām vietām rindā. [3, 156.lpp]

5.1. Sistēmas funkcionēšanas efektivitātes rādītāji

$$p_0 = 1 - \varkappa$$

$$p_k = \varkappa^k p_0$$

1. **1.** Dīkstāves varbūtība

$$p_d = p_0$$

2. **2.** Varbūtība, ka izveidosies rinda

$$p_{rinda} = 1 - p_0 - p_1 - p_2$$

3. **3.** Vidējais aizņemto kanālu skaits

$$\bar{n}_{aiz} = n - \bar{n}_{br}$$

4. **4.** Vidējais brīvo kanālu skaits

$$\bar{n}_{br} = n \cdot p_0$$

5. **5.** Kanāla noslodzes koeficients

$$a_{\bar{n}} = \frac{\bar{n}_{aiz}}{n} = 1 - p_0$$

6. **6.** Vidējais pieprasījumu skaits rindā

$$\bar{s} = \sum_{s=1}^{\infty} s \cdot p_{n+s} = \varkappa^{n+1} p_0 \frac{1}{(1-\varkappa)^2}$$

7. **7.** Vidējais pieprasījumu skaits sistēmā

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = p_0 \sum_{k=1}^{\infty} k \varkappa^k$$

8. **8.** Laiks, ko pieprasījums pavada sistēmā

$$\bar{t} = \frac{\bar{k}}{\lambda}$$

9. **9.** Laiks, ko pieprasījums pavada rindā

$$\bar{t}_g = \frac{\bar{s}}{\lambda}$$

5.2. Sistēmas risinājums veikala modelim

Ir dots apģērbu veikals, kur kopumā strādā 4 cilvēki, katru dienu divatā. Praktiski nav nekādu ierobežojumu ne uz rindas garumu ne uz ko citu, tātad mēs to arī pieņemam un apskatam vienkanāla masu apkalpošanas sistēmu ar gaidīšanu. Uz sistēmu iedarbojas vienkāršāka ieejas plūsma. Šajā sistēmā visi pieprasījumi, kas ienāks, tiks apkalpoti, bet ja kanāls ir aizņemts, tad pieprasījums gaidīs rindā un tad tiek apkalpots. Pārdevējs vidēji apkalpo vienu pircēju 15 minūtes. Mēs pieņemam, ka apkalpošanas laiks ir sadalīts eksponenciāli.

Veikala 1. laika posmā vidēji stundas laikā ienāk 7.89 cilvēki. No tiem vidēji 5 cilvēkiem ir nepieciešama pārdēvēja palīdzība. 2. laika posmā vidēji stundas laikā ienāk 12.08 cilvēki. No tiem vidēji 7 cilvēkiem ir nepieciešama pārdēvēja palīdzība. Vidēji viena klienta apkalpošana aizņem 15 minūtes. Apskatīsim situāciju ar šiem vidējiem lielumiem, ņemot vērā šādus pieņēmumus: visiem darbiniekiem ir aptuveni vienāds apkalpošanas ātrums un visi klienti stājās rindā.

1) Apskatam sistēmu, kad $\mathrm{n} = 2$.

a) Laiks $10^{00} - 15^{00}$

Sistēmas parametri:

- apkalpošanas kanālu skaits ir $n = 2$;
- ieejas plūsmas intensitāte ir $\lambda = 5$ pircēji/h
- apkalpošanas intensitāte ir $\mu = 4$ pircēji/h

Tad $\varkappa = \frac{\lambda}{n\mu} = 0.625$ - stacionārs darba režīms eksistē, jo $\varkappa < 1$.

1. Dīkstāves varbūtība:

$$p_d = p_0 = 0.375$$

Tas nozīmē, ka 38% no sava darba laika pārdevējs neapkalpo pircējus.

2. Varbūtība, ka izveidosies rinda:

$$p_{rinda} = 0.24$$

Ar varbūtību 24% pie kases izveidosies rinda.

3. Vidējais aizņemto kanālu skaits:

$$\bar{n}_{aiz} = 1.25$$

4. Vidējais brīvo kanālu skaits:

$$\bar{n}_{br} = 0.75$$

5. Kanāla noslodzes koeficients

$$a_{\bar{n}} = 0.63$$

6. Vidējais pieprasījumu skaits rindā (rindas garums):

$$\bar{s} = 0.64$$

Mazāk nekā 1 cilvēks vienmēr atradīsies rindā, kas nav daudz.

7. Vidējais pieprasījumu skaits sistēmā:

$$\bar{k} = 1.17$$

Vairāk nekā 1 cilvēks vienmēr atradīsies sistēmā.

8. Izmantojot pirmo Littla formulu, aprēķinam vidējo laiku, ko pieprasījums pavada sistēmā:

$$\bar{t} = 0.23 \approx 13.8\ min$$

9. Izmantojot otro Littla formulu, aprēķinam vidējo laiku, ko pieprasījums pavada rindā:

$$\bar{t}_g = 0.13 \approx 7.8\ min$$

Iegūts rezultāts ir labs, un mūs apmierina.

b) Laiks $15^{00} - 21^{00}$

Sistēmas parametri:

- apkalpošanas kanālu skaits ir $n = 2$;
- ieejas plūsmas intensitāte ir $\lambda = 7$ pircēji/h
- apkalpošanas intensitāte ir $\mu = 4$ pircēji/h

Tad $\varkappa = \frac{\lambda}{n\mu} = 0.875$ - stacionārs darba režīms eksistē, jo $\varkappa < 1$.

1. Dīkstāves varbūtība:

$$p_d = p_0 = 0.125$$

Tas nozīmē, ka 13% no sava darba laika pārdevējs neapkalpo pircējus.

2. Varbūtība, ka izveidosies rinda:

$$p_{rinda} = 0.67$$

Ar varbūtību 67% pie kases izveidosies rinda.

3. Vidējais aizņemto kanālu skaits:

$$\bar{n}_{aiz} = 1.75$$

4. Vidējais brīvo kanālu skaits:

$$\bar{n}_b = 0.25$$

5. Kanāla noslodzes koeficients

$$a_{\bar{n}} = 0.875$$

6. Vidējais pieprasījumu skaits rindā (rindas garums):

$$\bar{s} = 5.36$$

Vairāk nekā 5 cilvēki vienmēr atradīsies rindā, kas ir daudz.

7. Izmantojot otro Littla formulu, aprēķinam vidējo laiku, ko pieprasījums pavada rindā:

$$\bar{t}_g = \frac{\bar{s}}{\lambda} = 0.77 \approx 46.2\ min$$

Iegūts rezultāts ir slikts, tāpat kā divkanālu sistēmā ar gaidīšanu. Lai uzlabot rezultātu, palielināsim kanālu skaitu un apskatīsim rezultātus.

2) Apskatam situāciju, kad palielinājās darbinieku skaits līdz $\mathrm{n} = 3$.

a) Laiks $10^{00} - 15^{00}$

Sistēmas parametri:

- apkalpošanas kanālu skaits ir $n = 3$;
- ieejas plūsmas intensitāte ir $\lambda = 5$ pircēji/h
- apkalpošanas intensitāte ir $\mu = 4$ pircēji/h

Tad $\varkappa = \frac{\lambda}{n\mu} = 0.42$ - stacionārs darba režīms eksistē, jo $\varkappa < 1$.

1. Dīkstāves varbūtība:

$$p_d = p_0 = 0.58$$

Tas nozīmē, ka 58% no sava darba laika pārdevējs neapkalpo pircējus.

2. Varbūtība, ka izveidosies rinda:

$$p_{rinda} = 0.04$$

Ar varbūtību 4% pie kases izveidosies rinda.

3. Vidējais aizņemto kanālu skaits:

$$\bar{n}_{aiz} = 1.26$$

4. Vidējais brīvo kanālu skaits:

$$\bar{n}_b = 1.74$$

5. Kanāla noslodzes koeficients

$$a_{\bar{n}} = 0.42$$

6. Vidējais pieprasījumu skaits rindā (rindas garums):

$$\bar{s} = 0.05$$

Rezultāts ir ļoti mazs, var teikt, kā rindas gandrīz nav.

7. Izmantojot otro Littla formulu, aprēķinam vidējo laiku, ko pieprasījums pavada rindā:

$$\bar{t}_g = \frac{\bar{s}}{\lambda} = 0.01 \approx 0.6\ min$$

Klientam gandrīz nav jāgaida rindā. Tas ir labi priekš viņa, bet nav izdevīgi veikala īpašniekam, jo ir nepieciešams maksāt vel vienam darbiniekam.

b) Laiks $15^{00} - 21^{00}$

Sistēmas parametri:

- apkalpošanas kanālu skaits ir $n = 3$;
- ieejas plūsmas intensitāte ir $\lambda = 7$ pircēji/h
- apkalpošanas intensitāte ir $\mu = 4$ pircēji/h

Tad $\varkappa = \frac{\lambda}{n\mu} = 0.58$ - stacionārs darba režīms eksistē, jo $\varkappa < 1$.

1. Dīkstāves varbūtība:

$$p_d = p_0 = 0.42$$

Tas nozīmē, ka 42% no sava darba laika pārdevējs neapkalpo pircējus.

2. Varbūtība, ka izveidosies rinda:

$$p_{rinda} = 0.12$$

Ar varbūtību 12% pie kases izveidosies rinda.

3. Vidējais aizņemto kanālu skaits:

$$\bar{n}_{aiz} = 1.74$$

4. Vidējais brīvo kanālu skaits:

$$\bar{n}_b = 1.26$$

5. Kanāla noslodzes koeficients

$$a_{\bar{n}} = 0.58$$

6. Vidējais pieprasījumu skaits rindā (rindas garums):

$$\bar{s} = 0.27$$

Mazāk kā 1 cilvēks vienmēr atradīsies rindā.

7. Izmantojot otro Littla formulu, aprēķinam vidējo laiku, ko pieprasījums pavada rindā:

$$\bar{t}_g = \frac{\bar{s}}{\lambda} = 0.04 \approx 2.4\ min$$

Sistēmas galvenie rezultāti ir paradīti tabulās:

5.1. tabula

Laika posms $10^{00} - 15^{00}$

$n = 2$	$n = 3$
$p_0 = 0.375$	$p_0 = 0.58$
$a_{\bar{n}} = 0.63$	$a_{\bar{n}} = 0.42$
$\bar{s} = 0.64$	$\bar{s} = 0.05$
$\bar{t}_g \approx 7.8\ min$	$\bar{t}_g \approx 0.6\ min$

5.2. tabula

Laika posms $15^{00} - 21^{00}$

$n = 2$	$n = 3$
$p_0 = 0.125$	$p_0 = 0.42$
$a_{\bar{n}} = 0.875$	$a_{\bar{n}} = 0.58$
$\bar{s} = 5.36$	$\bar{s} = 0.27$
$\bar{t}_g \approx 46.2\ min$	$\bar{t}_g \approx 2.4\ min$

Salīdzinot šis divas sistēmas, katrā laika periodā, mēs redzam, kā kanālu skaita palielināšana uzlaboja rezultātus. Efektivitātes rādītāji kļuva daudz labāki. Pie tam atkal varam secināt, ka laika posmā $10^{00} - 15^{00}$ rezultāti jau no sakuma bija diezgan labi, un to uzlabošanas nav nepieciešamas. Vel viens darbinieks tikai palielinās izmaksas, kas šajā gadījumā sevi neattaisno. Savukārt laika posmā $15^{00} - 21^{00}$ kanālu skaita palielināšana ir obligāta, jo strādāt tāda veidā tālāk nav racionāli, un gaidīšanas laiks rindā ir nepieļaujami liels.

Tātad pēc apskatītājam sistēmām varam jau secināt, ka palielināt darbinieku skaitu ir nepieciešams tikai otrajā laika posma. Nākamajā solī apskatīsim divfāžu sistēmu tieši šī laika posmā.

6. DIVFĀŽU MASU APKALPOŠANAS SISTĒMA

Šajā nodaļā mēs aplūkosim divfāžu sistēmu, kur katrai fāzei atbilst sava sistēma. Spriežot pēc jau apskatītajam sistēmām laika posmā $15^{00} - 21^{00}$ veikalā ir nepieciešami 3 darbinieki. Tātad ir vērts apskatīt divfāžu sistēmu tieši šī laika perioda, kur pirmā fāze sastāv no 2 pārdevējiem un otrā fāze sastāv no 1 kasiera.

1. MAS fāze: 2 kanālu MAS ar gaidīšanu

Mums ir dota divkanālu masu apkalpošanas sistēma ar gaidīšanu. λ paliek nemainīga, bet μ kļuva lielāks, jo tagad pārdevējiem nav jāstrādā pie kases un viņi var vairāk klientus apkalpot zālē.

Sistēmas parametri:

- apkalpošanas kanālu skaits ir $n = 2$;
- ieejas plūsmas intensitāte ir $\lambda_1 = 7$ pircēji/h
- apkalpošanas intensitāte ir $\mu_1 = 6$ pircēji/h

Tad $\alpha = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = 1.17$ - stacionārs darba režīms eksistē, jo $\alpha < n$.

1. Dīkstāves varbūtība:

$$p_d = p_0 = 0.26$$

Tas nozīmē, ka 26% no sava darba laika pārdevējs neapkalpo klientus. Tas ir apmēram 16 minūtes stundā.

2. Varbūtība, ka izveidosies rinda:

$$p_{rinda} = 0.25$$

Ar varbūtību 25% pie kases izveidosies rinda.

3. Varbūtība, ka visi kanāli būs aizņemti:

$$p_{aiz} = 0.43$$

Ar varbūtību 43% visi kanāli būs aizņemti.

4. Vidējais aizņemto kanālu skaits:

$$\bar{n}_{aiz} = 1.17$$

5. Vidējais brīvo kanālu skaits:

$$\bar{n}_b = 0.83$$

6. Kanāla noslodzes koeficients:

$$a_{\bar{n}} = 0.585$$

7. Vidējais pieprasījumu skaits rindā (rindas garums):

$$\bar{s}_1 = 0.61$$

Mazāk, nekā 1 cilvēks vienmēr atradīsies rindā, kas būtiski nav daudz.

8. Vidējais pieprasījumu skaits sistēmā:

$$\bar{k}_1 = 1.78$$

Gandrīz 2 cilvēki vienmēr atradīsies sistēmā.

9. Vidējais pieprasījuma apkalpošanas laiks:

$$\bar{t}_{apk} = 0.25 \approx 15\ min$$

Tas laiks jau bija iedots uzdevuma un ir iegūts ar tiešo mērījumu palīdzību.

10. Izmantojot pirmo Littla formulu, aprēķinam vidējo laiku, ko pieprasījums pavada sistēmā:

$$\bar{t} = \frac{\bar{k}}{\lambda} = 0.25 \approx 15\ min$$

11. Izmantojot otro Littla formulu, aprēķinam vidējo laiku, ko pieprasījums pavada rindā:

$$\bar{t}_{g1} = \frac{\bar{s}}{\lambda} = 0.09 \approx 5.4\ min$$

Rezultāts ir labs un apmierinošs, jo mazāk cilvēks stāv rindā, jo ātrāk viņš tiek pie apkalpošanas. Tagad pārējam pie otras fāzes.

2. MAS fāze: 1 kanālu MAS ar gaidīšanu

Mums ir dota vienkanāla masu apkalpošanas sistēma ar gaidīšanu. λ paliek mazāks, jo ne visi klienti pēc pārdevēja nāks pie kases, daļa no tam pametīs veikalu. Pēc novērošanas vīdēji divi cilvēki atstās veikalu pēc pirmās fāzes. Savukārt μ kļuva vēl lielāks, ja attiecīgi mazāk cilvēku ies pie kases.

Sistēmas parametri:

- apkalpošanas kanālu skaits ir $n = 1$;
- ieejas plūsmas intensitāte ir $\lambda_2 = 5$ pircēji/h
- apkalpošanas intensitāte ir $\mu_2 = 10$ pircēji/h

Tad $\alpha = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0.5$ - stacionārs darba režīms eksistē, jo $\alpha < n$.

1. Dīkstāves varbūtība:

$$p_d = p_0 = 1 - \alpha = 0.5$$

Tas nozīmē, ka 50% no sava darba laika kasiere neapkalpo pircējus. Tas ir apmēram 30 minūtes stundā, kas ir pietiekami daudz, lai paspēt izdarīt atlikušus darbus pie kases.

2. Varbūtība, ka izveidosies rinda:

$$p_{rinda} = 0.25$$

Ar varbūtību 25% pie kases izveidosies rinda.

3. Vidējais aizņemto kanālu skaits

$$\bar{n}_{aiz} = 0.5$$

4. Vidējais brīvo kanālu skaits

$$\bar{n}_b = 0.5$$

5. Kanāla noslodzes koeficients

$$a_{\bar{n}} = 0.5$$

6. Vidējais pieprasījumu skaits sistēmā:

$$\bar{k}_2 = 1$$

1 cilvēks vienmēr atradīsies sistēmā.

7. Vidējais pieprasījumu skaits rindā (rindas garums):

$$\bar{s}_2 = 0.5$$

8. Vidējais pieprasījuma apkalpošanas laiks:

$$\bar{t}_{apk} = \frac{1}{\mu} = 0.1 \approx 6\ min$$

9. Izmantojot pirmo Littla formulu, aprēķinam vidējo laiku, ko pieprasījums pavada sistēmā:

$$\bar{t} = 0.2 \approx 12\ min$$

10. Izmantojot otro Littla formulu, aprēķinam vidējo laiku, ko pieprasījums pavada rindā:

$$\bar{t}_{g2} = 0.1 \approx 6\ min$$

Apskatot abu sistēmu efektivitātes rādītājus, var secināt par kopējam rezultātiem.

1. Vidējais pieprasījumu skaits sistēmā:

$$\bar{k} = \bar{k}_1 + \bar{k}_2 = 1.78 + 1 = 2.78$$

2. Vidējais pieprasījumu skaits rindā (rindas garums):

$$\bar{s} = \bar{s}_1 + \bar{s}_2 = 0.61 + 0.5 = 1.11$$

3. Vidējais laiks, ko pieprasījums pavada rindā:

$$\bar{t}_g = \bar{t}_{g1} + \bar{t}_{g2}\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0.16 \approx 9.6\ min$$

Tas ir laiks, ko klients vidēji pavada divas fāzēs.

Tālāk salīdzināsim visas apskatītas sistēmas un izdarīsim secinājumus.

REZULTĀTI UN SECINĀJUMI

Sistēmas ir izanalizētas un var izdarīt secinājumus par tās darbības efektivitāti.

1. tabula

Laika posms $10^{00} - 15^{00}$

Daudzkanālu masu apkalpošanas sistēma ar gaidīšanu		Masu apkalpošanas sistēma ar gaidīšanu un vienmērīgo apkalpošanas disciplīnu	
$n = 2$	$n = 3$	$\boldsymbol{n = 2}$	$n = 3$
$p_0 = 0.23$	$p_0 = 0.28$	$\boldsymbol{p_0 = 0.375}$	$p_0 = 0.58$
$a_{\overline{n}} = 0.63$	$a_{\overline{n}} = 0.42$	$\boldsymbol{a_{\overline{n}} = 0.63}$	$a_{\overline{n}} = 0.42$
$\overline{s} = 0.8$	$\overline{s} = 0.11$	$\boldsymbol{\overline{s} = 0.64}$	$\overline{s} = 0.05$
$\overline{t}_g \approx 9.6\ min$	$\overline{t}_g \approx 1.2\ min$	$\boldsymbol{\overline{t}_g \approx 7.8\ min}$	$\overline{t}_g \approx 0.6\ min$

Tabulā ir paradīti galvenie parametri. Kā jau bija minēts, palielinot darbinieku skaitu, darbības efektivitātes radītāji strauji uzlabojas, tas ir no vienas puses. No otras, jo vairāk darbinieku, jo lielāka ir izmaksas funkcija. Šajā laika posmā tas sevi neattaisno. Efektīvāka sistēma - masu apkalpošanas sistēma ar gaidīšanu un vienmērīgo apkalpošanas disciplīnu. Noslodzes koeficients nav paraks liels, apkalpošana būs augsta līmenī. Rindas garums ir mazāks par vienu cilvēku. Gaidīšanas laiks sastāda $7.8\ min$, kas ir pilnīgi pieņemams. Optimālais darbinieku skaits ir 2.

2. tabula

Laika posms $15^{00} - 21^{00}$

Daudzkanālu masu apkalpošanas sistēma ar gaidīšanu		Masu apkalpošanas sistēma ar gaidīšanu un vienmērīgo apkalpošanas disciplīnu	
$n = 2$	$n = 3$	$n = 2$	$\boldsymbol{n = 3}$
$p_0 = 0.06$	$p_0 = 0.17$	$p_0 = 0.125$	$\boldsymbol{p_0 = 0.42}$
$a_{\overline{n}} = 0.875$	$a_{\overline{n}} = 0.58$	$a_{\overline{n}} = 0.875$	$\boldsymbol{a_{\overline{n}} = 0.58}$
$\overline{s} = 5.11$	$\overline{s} = 0.50$	$\overline{s} = 5.36$	$\boldsymbol{\overline{s} = 0.27}$
$\overline{t}_g \approx 43.8\ min$	$\overline{t}_g \approx 4.2\ min$	$\overline{t}_g \approx 46.2\ min$	$\boldsymbol{\overline{t}_g \approx 2.4\ min}$

Tabulā ir paradīti galvenie parametri. Palielinot darbinieku skaitu, darbības efektivitātes radītāji strauji uzlabojas, kas šajā laika posmā sevi attaisno. Strādāt diviem darbiniekiem nav racionāli, ir liels rindas garums un ārkārtīgi liels gaidīšanas laiks. Salīdzināsim tas sistēmas ar divfāžu.

3. tabula

Laika posms $15^{00} - 21^{00}$

Daudzkanālu masu apkalpošanas sistēma ar gaidīšanu	Masu apkalpošanas sistēma ar gaidīšanu un vienmērīgo apkalpošanas disciplīnu	Divfāžu masu apkalpošanas sistēma	
$n = 3$	$\boldsymbol{n = 3}$	$n = 2$	$n = 1$
$\bar{s} = 0.50$	$\boldsymbol{\bar{s} = 0.27}$	$\bar{s} = 1.11$	
$\bar{t}_g \approx 4.2\ min$	$\boldsymbol{\bar{t}_g \approx 2.4\ min}$	$\bar{t}_g \approx 9.6\ min$	

Kā mēs redzam efektīvāka sistēma - masu apkalpošanas sistēma ar gaidīšanu un vienmērīgo apkalpošanas disciplīnu. Noslodzes koeficients nav paraks liels. Rindas garums ir ļoti mazs. Gaidīšanas laiks sastāda $2.4\ min$, kas ir pilnīgi pieņemams. 42% no sava darba laika darbinieks neapkalpo pircējus, tas ir apmēram 25 minūtes stundā. Tas ir pietiekoši, lai paspētu izpildīt visus citus pienākumus: sakārtot darba vietu, aizpildīt Tax Free čekus, pārbaudīt pircēju norezervētās preces un tā tālāk. Optimālais darbinieku skaits ir 3.

Divfāžu sistēma var būt noderīga, kad veikalā strādā divi pārdēvēji un vadītājs. Tad direktors var pildīt gan kasiera pienākumus, gan savus paralēli pie datora. Rezultāti būs daudz labākie, nekā strādās tikai divi pārdevēji.

Lai noturēt apkalpošanas kvalitāti augstākajā līmeni, es ieteiktu paņemt darba trešo pārdevēju. Tad katrs klients, nekavējoties tiks pamanīts un kvalitatīvi apkalpots. Izrēķinot sistēmas parametrus, redzam, ka gan vidējais rindas garums, gan vidējais laiks, ko klients pavada rindā paliek krietni mazāk. Tā, ka lielākais pircēju skaits ir laika posmā $15^{00} - 21^{00}$, varētu būt pilnīgi pietiekami ar jaunu darbinieku uz nepilnu slodzi, lai tieši šīs stundas vienmēr strādātu 3 cilvēki. Izpētot radītājus, nonācām pie secinājuma, ka analizējamam veikalam jāpieturas pie masu apkalpošanas sistēmas ar gaidīšanu un vienmērīgo apkalpošanas disciplīnu. Pirmajā dienas daļā pietiek ar 2 pārdevējiem, otrajā jābūt 3 darbinieki.

Šīs pētījums noderēs, analizējot jebkuru citu veikalu vai iestādi, kuriem pamatā ir līdzīga masu apkalpošanas sistēma.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA UN AVOTI

1. **Г.В.Ивченко**, **В. А. Каштанов**, **И. Н. Коваленко**, *Теория массового обслуживания*. Москва «Высшая школа», 1982.
2. **Хемди А. Таха**, *Исследование операций.* Издательский дом «Вильямс», Москва, Санкт-Петербург, Киев, 2005.
3. **I. Akuļičs**, **M. Purgailis**, *Masu apkalpošanas teorijas elementi*, Rīga «Zvaigzne», 1980.
4. **N. Budkina** *Masu apkalpošanas matemātiskie modeļi.* Metodiskie materiāli. Rīga, LU, 2008.

PIELIKUMS

1. tabula

Date	10-15 costumers	costumers per h	15-21 costumers	costumers per h
01.11.2011	42	8,4	77	12,8
02.11.2011	45	9	78	13,0
03.11.2011	41	8,2	73	12,2
04.11.2011	35	7	70	11,7
05.11.2011	49	9,8	84	14,0
06.11.2011	41	8,2	73	12,2
07.11.2011	44	8,8	71	11,8
08.11.2011	40	8	75	12,5
09.11.2011	38	7,6	68	11,3
10.11.2011	42	8,4	75	12,5
11.11.2011	41	8,2	72	12,0
12.11.2011	47	9,4	80	13,3
13.11.2011	34	6,8	71	11,8
14.11.2011	38	7,6	71	11,8
15.11.2011	37	7,4	67	11,2
16.11.2011	35	7	74	12,3
17.11.2011	45	9	66	11,0
18.11.2011	28	5,6	63	10,5
19.11.2011	44	8,8	72	12,0
20.11.2011	35	7	73	12,2
21.11.2011	34	6,8	65	10,8
22.11.2011	40	8	72	12,0
23.11.2011	36	7,2	77	12,8
24.11.2011	38	7,6	73	12,2
25.11.2011	44	8,8	70	11,7
26.11.2011	48	9,6	80	13,3
27.11.2011	29	5,8	66	11,0
28.11.2011	42	8,4	70	11,7
29.11.2011	41	8,2	79	13,2
30.11.2011	39	7,8	73	12,2
Total	1192		2178	
Average		7,95		12,1
Total month:	3370			

Diplomdarbs „Personāla darbības analīze ar masu apkalpošanas sistēmas palīdzību" izstrādāts LU Fizikas un matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Dmitrijs Gribulis

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītāja: docente, Dr. mat. Nataļja Budkina

Recenzents: profesore, Dr.mat. Svetlana Asmuss

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā

Metodiķe: Dzintra Holsta

Darbs aizstāvēts valsts pārbaudījuma komisijas sēdē

____ 01.2012. prot. Nr._____, vērtējums __________________

Komisijas sekretāre: docente, Dr.mat. Ingrīda Uļjane