LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

ZEMĀKĀS ATDALĀMĪBAS AKSIOMAS NESTRIKTAJĀ TOPOLOĢIJĀ

BAKALAURA DARBS

Autors: Ieva Bullīte
Studenta apliecības Nr.: ib11132
Darba vadītājs: Dr. math. Ingrīda Uļjane

RĪGA 2016

Anotācija

Darbs veltīts nestrikto punktu atdalāmības problemātikai nestriktās topoloģiskās telpās. Darbā tiek aplūkotas dažādu autoru atšķirīgās pieejas definējot nestriktā punkta jēdzienu, nestriktās topoloģijas un zemākās atdalāmības aksiomas tajās. Darbā konstruēti vairāki nestriktu topoloģisku telpu piemēri un pārbaudītas zemākās atdalāmības aksiomas šajās telpās.

Atslēgvārdi: Topoloģija, nestrikta topoloģija, nestrikts punkts, atdalāmības aksiomas.

Abstract

This work is devoted to fuzzy point separation problem in fuzzy topological spaces. In this work it is looked at the different ways various authors have used to define the concept of fuzzy point, fuzzy topologies and lower separation aksioms in them. In this work there are made multiple examples of topological spaces and these spaces are checked for lower separation aksioms.

Keywords: topology, fuzzy topology, fuzzy point, separation aksioms.

Saturs

Ievads

Vārds topoloģija ir radies no grieķu valodas vārda τοπολογία, kur topos nozīmē vieta un logos- zinātne. Tātad topoloģija tiešajā tulkojumā ir zinātne par vietu.

Topoloģija radās, kā dabīgas sekas, pakāpeniski vispārinot jēdzienus matemātiskajā analīzē un ģeometrijā. Sākotnēji diferenciālrēķinu pamatlicēji I. Ņūtons un G. Leibnics izveidoja teoriju, lai matemātiski aprakstītu un risinātu ļoti konkrētus uzdevumus par fizikāliem procesiem vai par ģeometrisku objektu raksturlielumiem (laukumiem, tilpumiem). Tomēr bija jāpaiet vēl aptuveni 100 gadiem, lai precīzi definētu robežas jēdzienu un atbilstoši definētu atvasinājumu un noteikto integrāli, ko savos darbos jau lietoja gan Ņūtons, gan Leibnics.

Ļoti ilgi visa teorija tika attīstīta Eiklīda telpā. Tikai 20. gs. sākumā matemātiķu darbos tika aplūkotas topoloģiskās struktūras abstraktās telpās [18]. Tomēr ātri kļuva skaidrs, ka topoloģiskās telpas definīcija ir ļoti vispārīga un labus un interesantus rezultātus iegūt būs praktiski neiespējami. Tādēļ tika aplūkoti dažādi varianti, kā sašaurināt topoloģiju klasi, prasot, lai tajā izpildās kāda īpašība. Var izdalīt īpašības, kas raksturo punktu atdalāmību topoloģiskajā telpā. Un tās tradicionāli tiek sauktas par zemākās kārtas atdalāmības aksiomām.

Protams šī tēma klasiskajā variantā šobrīd jau ir izsmelta. Taču šobrīd ļoti strauji attīstās nestrikto kopu teorija un atbilstoši nestriktās topoloģijas teorija, kurā vēl aizvien ir interesanti aplūkot nestriktās topoloģijas jēdzienu un atbilstoši definēt nestriktās atdalāmības aksiomas. Nestrikto kopu un darbības ar tām pirmo reizi 1965. g. savā rakstā definēja L. Zadē [20]. Jau pavisam drīz, pēc pāris gadiem, tika definēta nestrikta topoloģiska telpa [5]. Definējot nestrikto punktu, zūd fundamentālā īpašība, ka punktam nekas nevar piederēt, līdz ar to parādās nianses definējot punkta piedrību nestriktai kopai, kā arī to atdalāmību nestriktās topoloģiskās telpās.

Šajā darbā mēs analizējām dažādas literatūtrā sastopamās nestriktā punkta piederības definīcijas nestriktai kopai, nestriktās topoloģijas definīcijas un zemākās atdalāmības aksiomas. Ar piemēriem ilustrējām nestriktās topoloģijas un pārbaudījām vai tajās ir spēkā aplūkotās zemākās atdalāmības aksiomas.

Darbs sastāv no 4 nodaļām, nobeiguma un izmantotās literatūras saraksta. Pirmajā nodaļā mēs apskatām vispārīgās topoloģiskās telpas pamatdefinīciju un ilustrējam to ar piemēriem. Vēl mēs apskatam vaļējas un slēgtas kopas, kopas slēgumu un iekšieni, kā arī apskatām zemākās atdalāmības aksiomas. Otrajā nodaļā mēs apskatam nestrikto kopu pamatdefinīcijas, darbības ar nestriktajām kopām un nestrikto punktu definīciju. Trešajā nodaļā mēs apskatam divas pieejas nestriktās topoloģijas definēšanā: Čanga – Gogēna pieeju un arī Lovena pieeju. Pēdējā nodaļa ir veltīta zemākajām atdalāmības aksiomām nestriktajā topoloģijā. Mēs šajā nodaļā apskatam, kā šīs aksiomas definēja R. Srivastava, S. Lala un A. Srivastava, kā arī apskatam M. Sarkara pieeju aksiomu definēšanā.

1. Topoloģiskās telpas

Pirmajā nodaļā tiek aplūkoti topoloģijas pamatjēdzieni, kas būs nepieciešami tālākajā darbā. Šajā nodaļā aplūkotās definīcijas un teorēmas ir ņemtas no Ričarda Engelkinga (Ryszard Engelking) grāmatas „General Topology”, kas ir [1] atsauce.

1.1 Topoloģiskās telpas definīcija un piemēri

Definīcija 1.1.1 Par topoloģiju kopā X sauc tās apakškopu saimi $\mathcal{T}$ tādu, ka izpildās sekojošās īpašības:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ un $X \in \mathcal{T}$;
2. Ja $U \in \mathcal{T}$ un $V \in \mathcal{T}$, tad $U \cap V \in \mathcal{T}$;
3. Ja $U_i \in \mathcal{T}\ \ \forall i \in J$, tad $\bigcup\{U_i : i \in J\} \in \mathcal{T}$.

Definīcija 1.1.2 Par topoloģisku telpu sauc pāri $(X, \mathcal{T})$, kur X ir kopa un $\mathcal{T}$ ir topoloģija šajā kopā.

Apskatīsim kādu topoloģijas piemēru.

1. Ņemsim kopu $X = \{1,2,3\}$ un izveidosim uz šīs kopas topoloģiju.

$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

$\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,3\}\}$

$\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{1,2\}\}$

Kāpēc šīs ir topoloģijas? Ir acīmredzams, ka katrā no šīm topoloģijām visu iespējamo kopu šķēlumi un apvienojumi arī pieder attiecīgajai topoloģijai.

Kā piemērā var redzēt, uz vienas un tās pašas kopas var izveidot vairākas topoloģijas.

2. $\mathcal{T}_a = \{X, \emptyset\}$ – antidiskrētā topoloģija
3. $\mathcal{T}_d = P(X)$, kur $P(X)$ ir kopas X visu apakškopu saime – diskrētā topoloģija
4. $\mathcal{T}_k = \{X \backslash G : G \subset X \ \&\ G - \text{galīga kopa}\} \cup \{\emptyset\}$ – ko-galīga topoloģija

   Saime $\mathcal{T}_k$ sastāv no visām tādām X apakškopām, kurām papildinājums ir galīga kopa, un tukšas kopas, lai nodrošinātu topoloģijas definīcijas pirmās īpašības prasības.

Kāpēc $\mathcal{T}_k$ ir topoloģija?

Ja X ir bezgalīga kopa, tad:

a. $X \in \mathcal{T}_k$ un $\emptyset \in \mathcal{T}_k$

b. $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_k$

$U_1 = X \backslash G_1; U_2 = X \backslash G_2$

$U_1 \cap U_2 = (X \backslash G_1) \cap (X \backslash G_2) = X \backslash (G_1 \cup G_2) \in \mathcal{T}_k$

c. $U_i \in \mathcal{T}_k\ \forall i \in J$

$U_i = X \backslash G_i \bigcup_{i \in J} U_i = \bigcup_{i \in J} (X \backslash G_i) = X \backslash (\bigcap_{i \in J} G_i \in \mathcal{T}_k$

Ja X ir galīga kopa, tad $\mathcal{T}_k$ ir diskrētā topoloģija.

5. $\mathcal{T}_p = \{U_p : U_p \subset X \,\&\, p \in U_p\} \cup \{\emptyset\}$ – izdalītā punkta topoloģija

Saime $\mathcal{T}_p$ sastāv no visām iespējamām kopas X apakškopām, kuras satur punktu p, un tukšas kopas.

Vai $\mathcal{T}_p$ ir topoloģija?

a. $X \in \mathcal{T}_p$ un $\emptyset \in \mathcal{T}_p$

b. $U_p, V_p \in \mathcal{T}_p$

$p \in (U_p \cap V_p) \in \mathcal{T}_p$

Tā kā katra netukša kopa no šīs topoloģijas satur punktu p, tad arī šo kopu šķēlums saturēs punktu p.

c. $U_p^i \in \mathcal{T}_p\ \forall i \in J$

$p \in \bigcup_{i \in J} U_p^i \in \mathcal{T}_p$

Tā kā katra netukša kopa no šīs topoloģijas satur punktu p, tad arī šo kopu apvienojums saturēs punktu p.

6. $\mathcal{T}^p = \{U^p : U^p \subset X \,\&\, p \notin U^p\} \cup \{X\}$ – izslēgtā punkta topoloģija

Saime $\mathcal{T}^p$ sastāv no visām kopas X apakškopām, kuras nesatur punktu p, un pašas kopas X.

Vai $\mathcal{T}^p$ ir topoloģija?

a. $X \in \mathcal{T}^p$ un $\emptyset \in \mathcal{T}^p$

b. $U^p, V^p \in \mathcal{T}^p$

$$p \notin (U^p \cap V^p) \in \mathcal{T}^p$$

Tā kā katra kopa, izņemot pašu kopu X, no šīs topoloģijas nesatur punktu p, tad arī šo kopu šķēlums nesaturēs punktu p.

c. $U_i^p \in \mathcal{T}^p \; \forall i \in J$

$$p \notin \bigcup_{i \in J} U_i^p \in \mathcal{T}^p$$

Tā kā katra kopa, izņemot pašu kopu X, no šīs topoloģijas nesatur punktu p, tad arī šo kopu apvienojums nesaturēs punktu p, izņemot, ja apvieno ar kopu X, bet tad mēs iegūstam to pašu kopu X, kas pieder šai topoloģijai.

1.2 Vaļējas un slēgtas kopas, punkta apkārtne

Turpmāk šajā nodaļā darbā uzskatīsim, ka kopā X ir dota topoloģija $\mathcal{T}$ un visi turpmākie jēdzieni tiek definēti topoloģiskā telpā $(X, \mathcal{T})$.

Definīcija 1.2.1 Kopu U sauc par vaļēju kopu, ja tā pieder topoloģijai $\mathcal{T}$.

Definīcija 1.2.2 Kopu U sauc par slēgtu, ja tās papildinājums $X \setminus U$ ir vaļēja kopa.

Topoloģiskās telpas $(X, \mathcal{T})$ visu slēgto kopu saimi apzīmēsim ar S.

Teorēma 1.2.1 Slēgto kopu saimei S izpildās sekojošas īpašības:

1. $\emptyset \in S$ un $X \in S$;
2. Ja $U \in S$ un $V \in S$, tad $U \cup V \in S$;
3. Ja $U_i \in S \; \forall \; i \in J$, tad $\bigcap\{U_i : i \in J\} \in S$.

Definīcija 1.2.3 Par punkta x apkārtni sauc kopu U_x, kurai izpildās:

1. $x \in U_x$
2. $U_x \in \mathcal{T}$

Definīcija 1.2.4 Par punkta x caurdurto apkārtni sauc kopu $\dot{U}_x = U_x \setminus \{x\}$.

Definīcija 1.2.5 Punktu $x \in X$ sauc par kopas A akumulācijas punktu, ja punkta x katra caurdurtā apkārtne ar kopu A šķeļas netukši, t. i. $\forall \dot{U}_x : \dot{U}_x \cap A \neq \emptyset$.

1.3 Kopas slēgums un iekšiene

Definīcija 1.3.1 Par kopas U slēgumu sauc kopu $\overline{U}$, kuru definē sekojoši:

$$\overline{U} = \bigcap \{A_k : U \subset A_k \ \& \ A_k \in S\}.$$

Teorēma 1.3.1 Kopas U slēgums ir mazākā slēgtā kopa, kas satur kopu U.

Teorēma 1.3.2 Slēguma operatoram izpildās sekojošas īpašības:

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$ un $\overline{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}$;

2. $\boldsymbol{U} \subset \overline{\boldsymbol{U}}$;

3. $\overline{\boldsymbol{U} \cup \boldsymbol{V}} = \overline{\boldsymbol{U}} \cup \overline{\boldsymbol{V}}$;

4. $\overline{\overline{\boldsymbol{U}}} = \overline{\boldsymbol{U}}$.

Definīcija 1.3.2 Par kopas $\boldsymbol{U}$ iekšieni sauc kopu $\boldsymbol{Int\ U}$, kuru definē šādi:

$$\boldsymbol{Int\ U} = \bigcup \{\boldsymbol{A_k} : \boldsymbol{A_k} \in \boldsymbol{\mathcal{T}} \ \& \ \boldsymbol{A_k} \subset \boldsymbol{U}\}.$$

Teorēma 1.3.3 Kopas U iekšiene ir lielākā vaļējā kopas U apakškopa.

Teorēma 1.3.4 Kopas iekšienei izpildās sekojošas īpašības:

1. $\boldsymbol{Int}\ \emptyset = \emptyset$ un $\boldsymbol{Int\ X} = \boldsymbol{X}$;

2. $\boldsymbol{Int\ U} \subset \boldsymbol{U}$;

3. $\boldsymbol{Int}\ (\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{Int\ U} \cap \boldsymbol{Int\ V}$;

4. $\boldsymbol{Int}(\boldsymbol{Int\ U}) = \boldsymbol{Int\ U}$.

1.4 Zemākās atdalāmības aksiomas

Topoloģiskas telpas definīcija ir ļoti vispārīga, un ir skaidrs, ka nebūs daudz interesantu teorēmu, kuras būtu spēkā pilnīgi visām topoloģiskām telpām. Viens no veidiem, kā sašaurināt aplūkojamo topoloģisko klasi, ir uzlikt papildus prasību, kas raksturotu iespēju atdalīt punktus vai arī punktus un slēgtas kopas. Šeit mēs aplūkosim tikai tā saucamās zemākās atdalāmības aksiomas T_0, T_1, T_2, kuras raksturo tieši punktu atdalāmību.

Definīcija 1.4.1 Topoloģisku telpu $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{T}})$ sauc par $\boldsymbol{T_0}$ jeb Kolmogorova telpu, ja vismaz vienam no diviem dažādiem punktiem $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}$ eksistē apkārtne, kurai nepieder otrs punkts, t. i. $\forall x, y \in X, x \neq y \ \exists\ U_x : y \notin U_x$.

Definīcija 1.4.2 Topoloģisku telpu $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{T}})$ sauc par $\boldsymbol{T_1}$ telpu, ja katram no diviem dažādiem punktiem $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}$ eksistē apkārtne, kurai nepieder otrs punkts, t. i. $\forall x, y \in X, x \neq y \ \exists\ U_x : y \notin U_x \ \&\exists\ U_y : x \notin U_y$.

Definīcija 1.4.3 Topoloģisku telpu $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{T}})$ sauc par $\boldsymbol{T_2}$ jeb Hausdorfa telpu, ja diviem dažādiem punktiem $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}$ eksistē apkārtnes U_x, U_y tādas, ka $\boldsymbol{U_x} \cap U_y = \emptyset$.

Var viegli redzēt, ka, ja telpa ir T_2, tad tā ir arī T_1, un, ja telpa ir T_1, tad tā ir arī T_0. Otrā virzienā šī īpašība nedarbojas.

Atgriezīsimies pie iepriekšējiem piemēriem.

1. Topoloģiskā telpa ar pirmo topoloģiju $(X, \mathcal{T}_1)$, kur $X = \{1,2,3\}$ un $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$, ir Hausdorfa telpa. To var viegli manīt, jo katram punktam mazākā apkārtne ir pats punkts, līdz ar to šo mazāko apkārtņu šķēlums būs tukša kopa.
2. Otrā topoloģiskā telpa $(X, \mathcal{T}_2)$, kur $X = \{1,2,3\}$ un $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,3\}\}$, ir tikai Kolmogorova telpa. Mēs ņemam $x = 1$ un $y = 3$. Topoloģijā $\mathcal{T}_2$ ir tikai viena vaļēja kopa $\{1\} \subset X$, kura satur vienu no punktiem, bet nesatur otru.
3. Trešā topoloģiskā telpa $(X, \mathcal{T}_3)$, kur $X = \{1,2,3\}$ un $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{1,2\}\}$, nav neviena no šīm trīs telpām. Ja mēs ņemam $x = 1$ un $y = 2$, tad šajā topoloģijā nav neviena vaļēja kopa, kas saturētu tikai vienu no šiem punktiem. Līdz ar to šī telpa neatbilst T_0 telpas nosacījumiem un attiecīgi nav arī T_1 un T_2 telpa.
4. Antidiskrētā topoloģiskā telpa $(X, \mathcal{T}_a)$ arī nav neviena no šīm telpām. Ja mēs ņemam $x \neq y$, kur $x, y \in X$, tad šo punktu apkārtnes $U_x = X$ un $U_y = X$, kas neatbilst pat T_0 nosacījumiem.
5. Diskrētā topoloģiskā telpa $(X, \mathcal{T}_d)$ sastāv no visām kopas X apakškopām. Tātad katram $x, y \in X$, kur $x \neq y$, eksistē apkārtnes $U_x = \{x\}$ un $U_y = \{y\}$. Šo divu apkārtņu šķēlums ir tukša kopa, līdz ar to šī telpa ir T_2.
6. Ko-galīgā topoloģiskā telpa $(X, \mathcal{T}_k)$, gadījumā, kad X ir bezgalīga, ir T_1 telpa. Ja mēs par punktu $x, y \in X$, kur $x \neq y$, apkārtnēm ņemam kopas $U_x = X \backslash \{y\}$ un $U_y = X \backslash \{y\}$, tad mēs iegūstam, ka $y \notin U_x$ un $x \notin U_y$, kas atbilst T_1 definīcijai.

Kāpēc šī telpa nav T_2? Ja mēs par punkta x apkārtni ņemam kopu $U_x = \{X \backslash G_1 : x \notin G_1 \ \& \ y \in G_1\}$ un punkta y apkārtnei ņemam kopu $U_y = \{X \backslash G_2 : y \notin G_2 \ \& \ x \in G_2\}$, tad mēs iegūstam, ka $y \notin U_x$ un $x \notin U_y$.

$U_x \cap U_y = (X \backslash G_1) \cap (X \backslash G_2) = X \backslash (G_1 \cup G_2) \neq \emptyset$, kas nozīmē, ka $(X, \mathcal{T}_k)$ nav T_2.

Ja kopa X ir galīga, tad $\mathcal{T}_k$ ir diskrētā topoloģija un ir spēkā T_2 aksioma.

7. Izdalītā punkta topoloģiskā telpa $(X, \mathcal{T}_p)$ ir T_0 telpa. Ja mēs ņemam $x = p$ un $y \neq p$, tad mēs šiem punktiem varam ņemt attiecīgās apkārtnes $U_x = \{p\}$ un $U_y = \{y, p\}$. Līdz ar to mēs iegūstam, ka $y \notin U_x$, bet $x \in U_y$.

   Šī topoloģija nav T_1, jo visas vaļējas kopas, izņemot tukšo kopu, satur punktu p, līdz ar to jebkura cita punkta $x \in X$ apkārtne saturēs punktu p. Līdz ar to punktu x ar apkārtnēm nevarēs atdalīt no punkta p.

8. Izslēgtā punkta topoloģiskā telpa $(X, \mathcal{T}^p)$ ir T_0 telpa. Mēs apskatam divus punktus $x, y \in X$, kur $x = p$ un $y \neq p$. Šo punktu apkārtnes ir kopas $U_x = \{X\}$ un $U_y = \{y\}$. Tad $x \notin U_y$, bet $y \in U_x$.

   Šī topoloģija nav T_1, jo vienīgā punkta p apkārtne ir visa kopa X, tādēļ punktu p nevarēs atdalīt ar apkārtnēm no jebkura cita kopas X punkta.

Teorēma 1.4.1 Topoloģiskā telpa $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{T}})$ ir $\boldsymbol{T_1}$ telpa $\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} : \{\boldsymbol{x}\} \in \boldsymbol{S}$.

Pierādījums.

$\Rightarrow$ Dots: $(X, \mathcal{T})$ ir T_1 telpa, t. i., $\forall x, y \in X, x \neq y \ \exists U_x, U_y : x \notin U_y \ \& \ y \notin U_x$.

Fiksējam $x_0 \in X$. Ņemam $y \neq x_0$. Pēc dotā $\exists U_y \in \mathcal{T} : x_0 \notin U_y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigcup_{\substack{y \neq x_0 \\ y \in X}} U_y = X \setminus \{x_0\} \Rightarrow \{x_0\} \in S$$

$\Leftarrow$ Dots: $\forall x \in X : \{x\} \in S$

Ņemam $x, y \in X; x \neq y$

$U_x = X \setminus \{y\} \in \mathcal{T} : y \notin U_x$

$U_y = X \setminus \{x\} \in \mathcal{T} : x \notin U_y$

Tātad $(X, \mathcal{T})$ ir T_1 telpa, kā bija jāpierāda.

2. Nestriktās kopas

Šajā nodaļā mēs aplūkojam jēdzienus, kas nepieciešami, lai definētu nestrikto topoloģiju un atbilstošos nestriktās topoloģijas pamatjēdzienus.

Visas definīcijas, kas tiks apskatītas šajā nodaļā ir ņemtas no Aleksandra Šostaka grāmatas „L-kopas un L-vērtīgas struktūras” [2].

2.1 Pamatdefinīcija un darbības ar kopām

Definīcija 2.1.1 Par kopas $\boldsymbol{X}$ nestriktu apakškopu sauc attēlojumu $\boldsymbol{\mu}: \boldsymbol{X} \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

Vērtību $\mu(x)$ var interpretēt, kā pakāpi, ar kādu x pieder nestriktai apakškopai μ.

Lai vienkāršotu pierakstu, turpmāk μ sauksim par nestriktu kopu.

Definīcija 2.1.2 Par kopas $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{X}$ harakterisko funkciju sauc funkciju $\boldsymbol{\chi_A}: \boldsymbol{X} \rightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, kuru definē šādi:

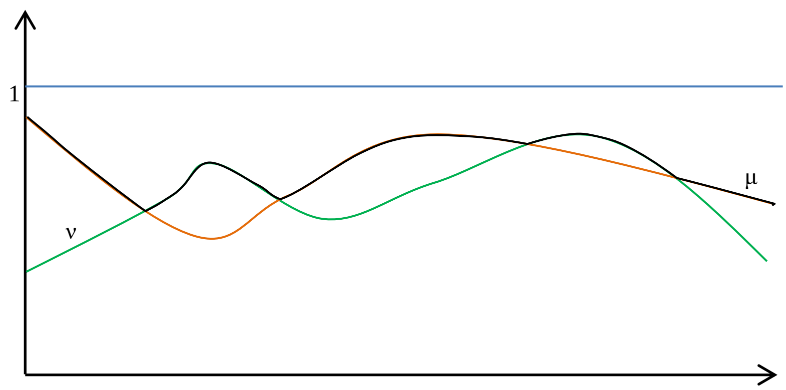
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ja } x \in A \\ 0, \text{ja } x \notin A. \end{cases}$$

Parasto kopu analogs nestriktajās kopās būs šo parasto kopu harakteriskās funkcijas.

Tālāk aplūkosim nestriktu kopu apvienojuma, šķēlums, papildinājuma un iekļaušanas darbības. Definējot šīs darbības, izmantosim $\mu, \nu: X \rightarrow [0,1]$, kas ir kopas X divas nestriktas apakškopas.

Definīcija 2.1.3 Par divu nestriktu kopu $\boldsymbol{\mu}$ un $\boldsymbol{\nu}$ apvienojumu sauc nestriktu kopu $\boldsymbol{\mu} \vee \boldsymbol{\nu}: \boldsymbol{X} \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, kuru definē sekojoši:

$$(\mu \vee \nu)(x) = \max\big(\mu(x), \nu(x)\big).$$

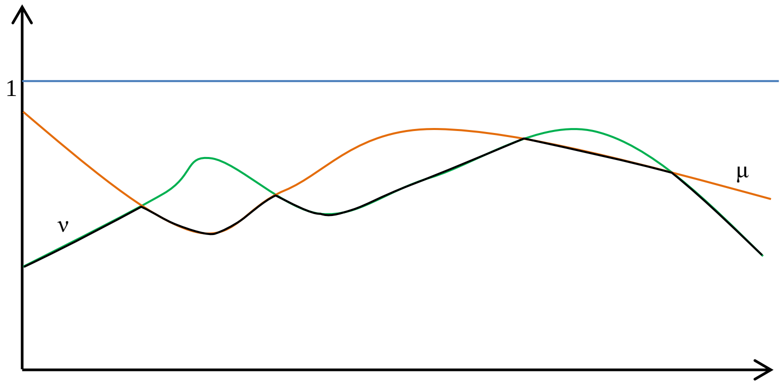


1. attēls. Nestriktu kopu apvienojums.

Zaļā līnija 1. attēlā ir nestriktā kopa ν, oranžā līnija ir nestriktā kopa μ un melnā līnija ir šo nestrikto kopu apvienojums.

Definīcija 2.1.4 Par divu nestriktu kopu $\boldsymbol{\mu}$ un $\boldsymbol{\nu}$ šķēlumu sauc nestriktu kopu $\boldsymbol{\mu} \wedge \boldsymbol{\nu}: \boldsymbol{X} \to [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, kuru definē sekojoši:

$$(\mu \wedge \nu)(x) = \min\big(\mu(x), \nu(x)\big).$$



2. attēls. Nestriktu kopu šķēlums.

Zaļā līnija 2. attēlā ir nestriktā kopa ν, oranžā līnija ir nestriktā kopa μ un melnā līnija ir šo nestrikto kopu šķēlums.

Definīcija 2.1.5 Par kopas $\boldsymbol{X}$ nestriktu apakškopu saimes $\{\boldsymbol{\mu_i}: \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{J}\}$ apvienojumu sauc nestriktu kopu $\vee\boldsymbol{\mu_i}: \boldsymbol{X} \to [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, kuru definē sekojoši:

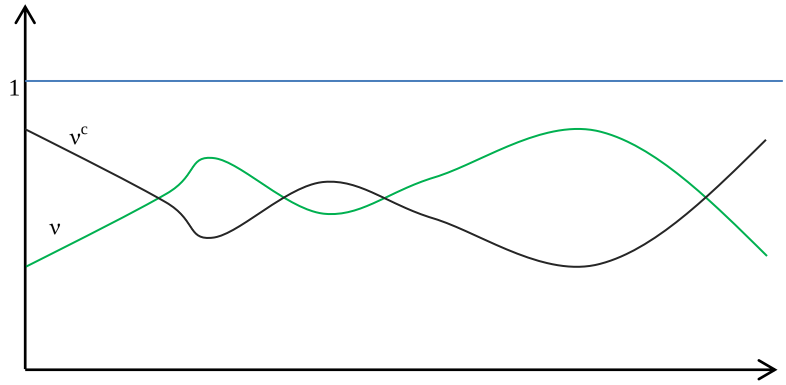
$$\vee\mu_i(x) = \sup\{\mu_i(x): i \in J\}.$$

Definīcija 2.1.6 Par kopas $\boldsymbol{X}$ nestriktu apakškopu saimes $\{\boldsymbol{\mu_i}: \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{J}\}$ šķēlumu sauc nestriktu kopu $\wedge\boldsymbol{\mu_i}: \boldsymbol{X} \to [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, kuru definē sekojoši:

$$\wedge\boldsymbol{\mu_i}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{inf}\{\boldsymbol{\mu_i}(\boldsymbol{x}): \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{J}\}$$

Definīcija 2.1.7 Par nestriktas kopas $\boldsymbol{\mu}$ papildinājumu kopā $\boldsymbol{X}$ sauc nestriktu kopu $\boldsymbol{\mu^c}: \boldsymbol{X} \to [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, kuru definē sekojoši:

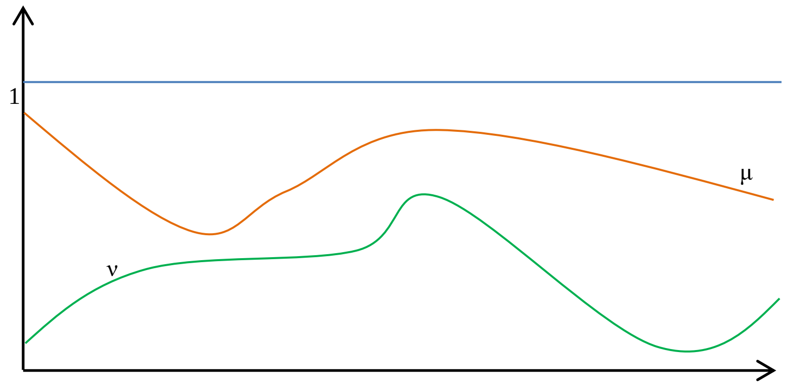
$$\mu^c(x) = 1 - \mu(x).$$



3. attēls. Nestriktās kopas papildinājums.

Zaļā līnija 3. attēlā ir nestriktā kopa ν un melnā līnija ir šī nestriktās kopas papildinājums.

Definīcija 2.1.8 Nestriktu kopu ν sauc par nestriktas kopas μ apakškopu, ja $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}\ \nu(\boldsymbol{x}) \leq \mu(\boldsymbol{x})$.



4. attēls. Nestriktas kopas apakškopa.

4. attēlā nestriktā kopa ν ir nestriktās kopas μ apakškopa.

Nestrikto kopu šķēluma un apvienojuma operācijas ir savā starpā distributīvas:

$$(\mu \vee \nu) \wedge \eta = (\mu \wedge \eta) \vee (\nu \wedge \eta);$$
$$(\mu \wedge \nu) \vee \eta = (\mu \vee \eta) \wedge (\nu \vee \eta).$$

2.2 Nestriktie punkti

Punkts un kopa ir matemātikas pamatjēdzieni, kas netiek definēti. Par katru punktu ir iespējam pateikt, tas pieder kopai vai nepieder, bet pašam punktam piederēt nekas nevar.

Nestriktajā kopu teorijā diemžēl zūd fundamentālā īpašība, ka nestriktam punktam nekas nepieder.

Definīcija 2.2.1 [2] Par nestriktu punktu sauc nestriktu kopu $\boldsymbol{p_{x_0}^{\alpha}}: \boldsymbol{X} \to [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$, kur $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{X}$ un $\boldsymbol{\alpha} \in (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$, un kuru definē šādi:

$$p_{x_0}^{\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, \text{ja } x = x_0 \\ 0, \text{ja } x \neq x_0 \end{cases}$$

pie tam x_0 sauc par nestriktā punkta nesēju un α sauc par tā vērtību.

Kā redzams nestriktā punkta definīcijā, ja $\alpha = 1$, tad ir iegūts punkta x_0 nestriktais analogs, t. i. tā harakteristiskā funkcija. Tajā pat laikā apskatot citu nestrikto punktu $p_{x_0}^{\beta}$, kur $\beta < \alpha$, redzam, ka $p_{x_0}^{\beta} \leq p_{x_0}^{\alpha}$, ko varam interpretēt, ka nestriktais punkts $p_{x_0}^{\beta}$ ir apakškopa nestriktajam punktam $p_{x_0}^{\alpha}$.

Dažādi autori ir dažādi definējuši nestrikto punktu piederību nestriktai kopai. Daži no viņiem arī punkta definīcijā nosaka, ka $\alpha < 1$.

Definīcija 2.2.2 (Vongs, 1974. g. [19]) Nestrikts punkts $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_{x_0}^{\alpha}}$, kur $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{1}$, pieder nestriktai kopai $\boldsymbol{\mu} \subset \boldsymbol{I^X}$ un to apzīmē ar $\boldsymbol{p} \mathrel{\tilde{\in}} \boldsymbol{\mu}$, ja $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X},\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})$.

Definīcija 2.2.3 (Pu un Liu, 1980. g.[9]) Nestrikts punkts $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_{x_0}^{\alpha}}$ pieder nestriktai kopai $\boldsymbol{\mu} \subset \boldsymbol{I^X}$ un to apzīmē ar $\boldsymbol{p} \mathrel{\tilde{\in}} \boldsymbol{\mu}$, ja $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x_0})$.

Definīcija 2.2.4 (Sarkars, 1981. g.[12]) Nestrikts punkts $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_{x_0}^{\alpha}}$, kur $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{1}$, pieder nestriktai kopai $\boldsymbol{\mu} \subset \boldsymbol{I^X}$ un to apzīmē ar $\boldsymbol{p} \mathrel{\tilde{\in}} \boldsymbol{\mu}$, ja$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x_0})$.

Definīcija 2.2.5 (De Mirti un Pascali, 1983. g.[4]) Nestrikts punkts $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_{x_0}^{\alpha}}$ pieder nestriktai kopai $\boldsymbol{\mu} \subset \boldsymbol{I^X}$ un to apzīmē ar $\boldsymbol{p} \mathrel{\tilde{\in}} \boldsymbol{\mu}$, ja $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x_0})$.

Varētu domāt, ka, runājot par parastajām kopām un punktiem, aplūkojot to harakteriskās funkcijas, nestriktā piederība $\tilde{\in}$ reducēsies uz parasto piederību $\in$, bet tas izpildās tikai Pu un Liu definīcijā. Vonga un Sarkara definīcijās šī īpašība neizpildās, jo tās prasa, lai punkta vērtība $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{1}$, kamēr De Mirti un Pascali definīcijā punkts pieder kopai tikai tad, ja tā vērtība ir stingri mazāka, kā kopas vērtība.

Tajā pat laikā vienīgā definīcija, kura saglabā mazākās vienības īpašību, ir Vonga definīcija, jo, pēc pārējām definīcijām, nestriktam punktam var piederēt citi nestrikti punkti, t. i., $\boldsymbol{p_{x_0}^{\beta}} \mathrel{\tilde{\in}} \boldsymbol{p_{x_0}^{\alpha}}$, ja $\boldsymbol{\beta} < \boldsymbol{\alpha}$. Tas izpildās tāpēc, ka, atšķirībā no pārējām definīcijām, kuras prasa, lai punkta vērtība būtu mazāka tikai uz nesēja, citur pieļaujot nestingru nevienādību, Vonga definīcija prasa, lai nestriktā punkta vērtība būtu stingri mazāka visā kopā $\boldsymbol{X}$.

3. Nestriktā topoloģija

3.1 Nestriktās topoloģijas definīcija (Čanga – Gogēna pieeja)

Tagad mums ir definēti pietiekami daudz jēdzieni, lai mēs spētu definēt, kas ir nestriktā topoloģija. Ir vairākas pieejas, kā var definēt nestriktās topoloģijas.

Pirmo nestriktās topoloģijas definīciju piedāvāja C. L. Čangs 1967. gadā.

Šajā apakšnodaļā visas definīcijas ir no darbiem [3] un [5].

Definīcija 3.1.1 Par nestrikto topoloģiju kopā $\boldsymbol{X}$ sauc kopas X nestrikto apakškopu saimi $\boldsymbol{\mathcal{T}} \subset I^X$ tādu, ka izpildās sekojošās īpašības:

1. $\underline{0} \in \mathcal{T}$ un $\underline{1} \in \mathcal{T}$;
2. Ja $\mu \in \mathcal{T}$ un $\nu \in \mathcal{T}$, tad $\mu \wedge \nu \in \mathcal{T}$;
3. Ja $\mu_i \in \mathcal{T} \ \ \forall i \in J$, tad $\vee\{\mu_i : i \in J\} \in \mathcal{T}$.

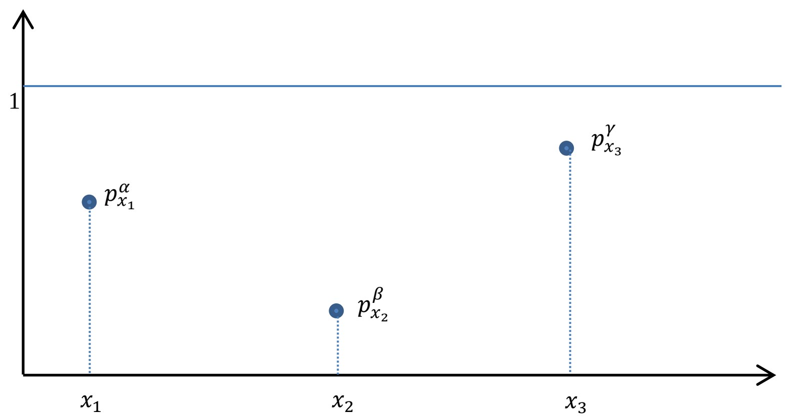
Šeit mums I^X ir visu nestrikto kopas X apakškopu saime, $I = [0,1]$, $\underline{1}: X \to 1$ un $\underline{0}: X \to 0$ ir konstantas funkcijas.

Definīcija 3.1.2 Ja $\boldsymbol{\mathcal{T}_1}$ un $\boldsymbol{\mathcal{T}_2}$ ir divas nestriktas topoloģijas kopā $\boldsymbol{X}$ un $\boldsymbol{\mathcal{T}_1} \subset \boldsymbol{\mathcal{T}_2}$, tad $\boldsymbol{\mathcal{T}_2}$ sauc par stiprāku topoloģiju kā $\boldsymbol{\mathcal{T}_1}$ un $\boldsymbol{\mathcal{T}_1}$ sauc par vājāku topoloģiju kā $\boldsymbol{\mathcal{T}_2}$.

Apskatīsim kādu nestriktās topoloģijas piemēru. Mēs izmantosim tos pašus piemērus, kas bija parastās topoloģijas gadījumā un pārveidosim tos uz nestriktās topoloģijas gadījumu.

Vispirms mēs definēsim šādas kopas:

G – ir kopa, kura sastāv no galīga skaita nestrikto punktu apvienojuma;

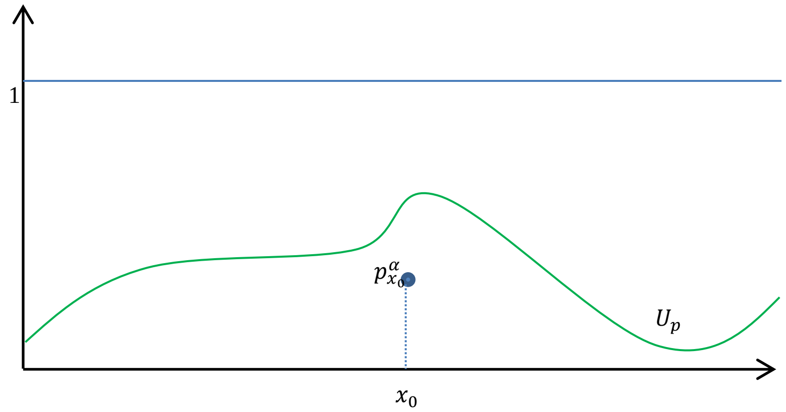


5. attēls Kopa $G(x) = \vee\{p_{x_1}^{\alpha}(x), p_{x_2}^{\beta}(x), p_{x_3}^{\gamma}(x)\}$.

5. attēlā kopa G dota, kā 3 nestriktu punktu apvienojums.

Mēs turpmāk, kad runāsim par nestrikto punktu piederību, izmantosim Pu un Liu definīciju.

U_p – nestrikta kopa kurai pieder nestriktais punkts $p = p_{x_0}^{\alpha}$, ja šī punkta vērtība $\alpha > 0$;

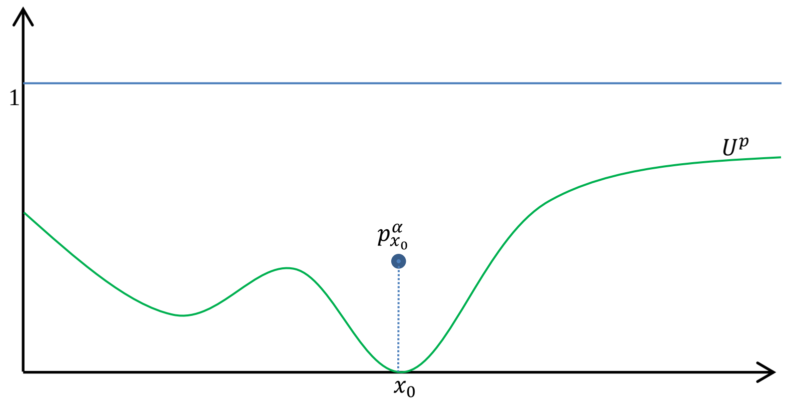


6. attēls. Nestriktā kopa U_p.

6. attēlā ir attēlota kopa U_p, kurai pieder nestriktais punkts $p_{x_0}^{\alpha}$ jeb vienkāršāk p.

U^p – nestrikta kopa, kurai nestriktais punkts $p = p_{x_0}^{\alpha}$ nepieder. Lai to garantētu nestriktai kopai U^p ir spēkā sekojoša īpašība:

$$U^p(x_0) = 0$$



7. attēls. Nestriktā kopa U^p.

7. attēlā ir attēlota kopa U^p tāda, ka izpildās $U^p(x_0) = 0$, un kurai nepieder nestriktais punkts $p_{x_0}^{\alpha}$.

1. $\mathcal{T}_a = \{\underline{0}, \underline{1}\}$ – antidiskrētā nestriktā topoloģija;
2. $\mathcal{T}_d = I^X$ – diskrētā nestriktā topoloģija;

3. $\mathcal{T}_k = \{G^c : G \in I^X\} \cup \{\underline{0}\}$ – ko-galīgā nestriktā topoloģija;

Vai $\mathcal{T}_k$ ir nestriktā topoloģija?

a. $\underline{0} \in \mathcal{T}_k$ un $\underline{1} \in \mathcal{T}_k$

b. $\mu = 1 - G_1$ un $\nu = 1 - G_2$

$\mu \wedge \nu = (1 - G_1) \wedge (1 - G_2) = 1 - (G_1 \vee G_2) \in \mathcal{T}_k$

c. $\mu_i = 1 - G_i, \forall i \in J$

$$\bigvee_{i \in J} (\mu_i) = \bigvee_{i \in J} (1 - G_i) = 1 - \bigvee_{i \in J} G_i \in \mathcal{T}_k$$

4. $\mathcal{T}_p = \{U_p : U_p \in I^X\} \cup \{\underline{0}\}$ – izdalīta nestriktā punkta nestriktā topoloģija;

Kāpēc $\mathcal{T}_p$ ir topoloģija?

a. $\underline{0} \in \mathcal{T}_p$ un $\underline{1} \in \mathcal{T}_p$

b. $U_p, V_p \in \mathcal{T}_p$

$p \,\widetilde{\in}\, U_p \wedge V_p \in \mathcal{T}_p$

c. $U_p^i \in \mathcal{T}_p, \forall i \in J$

$$p \,\widetilde{\in} \bigvee_{i \in J} U_p^i \in \mathcal{T}_p$$

5. $\mathcal{T}^p = \{U^p : U^p \in I^X\} \cup \{\underline{1}\}$ – izslēgta nestriktā punkta nestriktā topoloģija;

Vai $\mathcal{T}^p$ ir topoloģija?

a. $\underline{0} \in \mathcal{T}^p$ un $\underline{1} \in \mathcal{T}^p$

b. $U^p, V^p \in \mathcal{T}^p,$ ja $U^p(x_0) = 0 \;\&\; V^p(x_0) = 0$

$(U^p \wedge V^p)(x_0) = 0$

c. $\forall i \in J, U_i^p(x_0) = 0$

$$\bigvee_{i \in J} U_i^p \,(x_0) = 0$$

Piezīme. Nestriktās topoloģijas $\mathcal{T}^p$ un $\mathcal{T}_p$ ir stingri vājākas kā diskrētā nestriktā topoloģija.

Tagad mēs apskatīsim nestrikto topoloģiju pamatjēdzienus un īpašības. Salīdzinājumam visi sekojošie jēdzieni ir definēti arī vispārīgās topoloģijas gadījumā.

Definīcija 3.1.3 Nestriktu kopu $\boldsymbol{\mu}$ sauc par vaļēju, ja $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$.

Definīcija 3.1.4 Nestriktu kopu $\boldsymbol{\mu}$ sauc par slēgtu, ja $\boldsymbol{\mu^c} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$.

Visu slēgtu nestriktu kopu saimei $\boldsymbol{\mathcal{T}^c}$ izpildās sekojošās īpašības:

1. $\underline{0} \in \mathcal{T}^c$ un $\underline{1} \in \mathcal{T}^c$;

2. Ja $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\mathcal{T}^c}$ **un** $\boldsymbol{\nu} \in \boldsymbol{\mathcal{T}^c}$, tad $\boldsymbol{\mu} \vee \boldsymbol{\nu} \in \boldsymbol{\mathcal{T}^c}$;

3. Ja $\boldsymbol{\mu_i} \in \boldsymbol{\mathcal{T}^c}\ \ \forall \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{J}$, tad $\wedge\{\boldsymbol{\mu_i}: \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{J}\} \in \boldsymbol{\mathcal{T}^c}$.

Definīcija 3.1.5 Par nestriktas kopas $\boldsymbol{\mu}$ slēgumu sauc mazāko slēgto nestrikto kopu $\overline{\boldsymbol{\mu}}$, kura satur kopu $\boldsymbol{\mu}$.

Slēguma operatoram nestriktajā topoloģijā izpildās šādas īpašības:

1. $\overline{\underline{\mathbf{0}}} = \underline{\mathbf{0}}$;

2. $\boldsymbol{\mu} \leq \overline{\boldsymbol{\mu}}$;

3. $\overline{\boldsymbol{\mu} \vee \boldsymbol{\nu}} = \overline{\boldsymbol{\mu}} \vee \overline{\boldsymbol{\nu}}$;

4. $\overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}} = \overline{\boldsymbol{\mu}}$.

Definīcija 3.1.6 Par nestriktas kopas $\boldsymbol{\mu}$ iekšieni sauc tās lielāko vaļējo apakškopu $\boldsymbol{Int\ \mu}$.

Nestriktu kopu iekšienei izpildās sekojošas īpašības:

1. $\boldsymbol{Int}\ \underline{\mathbf{1}} = \underline{\mathbf{1}}$;

2. $\boldsymbol{Int\ \mu} \leq \boldsymbol{\mu}$;

3. $\boldsymbol{Int}\ (\boldsymbol{\mu} \wedge \boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{Int\ \mu} \wedge \boldsymbol{Int\ \nu}$;

4. $\boldsymbol{Int}\ (\boldsymbol{Int\ \mu}) = \boldsymbol{Int\ \mu}$.

3.2 Nestriktās topoloģijas Lovena definīcija

Otro pieeju, ko mēs apskatīsim, sastādīja R. Lovens 1974. gadā. Šī definīcija ir ļoti līdzīga Čanga definīcijai, bet pirmajā aksiomā Lovens prasa, lai $\mathcal{T}$ saturētu ne tikai $\underline{\mathbf{0}}$ un $\underline{\mathbf{1}}$, bet arī visas pārējās konstantes.

Šaja apakšnodaļā definīcijas ir no darbiem [6], [7] un [8].

Definīcija 3.2.1 Par nestrikto topoloģiju kopā $\boldsymbol{X}$ sauc nestriktu apakškopu saimi $\boldsymbol{\mathcal{T}} \subset \boldsymbol{I^X}$ tādu, ka izpildās sekojošās īpašības:

1. $\forall \alpha: X \to I,\ \alpha \in \mathcal{T}$;

2. Ja $\mu \in \mathcal{T}$ un $\nu \in \mathcal{T}$, tad $\mu \wedge \nu \in \mathcal{T}$;
3. Ja $\mu_i \in \mathcal{T}$ $\forall i \in J$, tad $\bigvee\{\mu_i: i \in J\} \in \mathcal{T}$.

Lai atšķirtu šo definīciju no iepriekšējās, mēs šo definīciju turpmāk sauksim par laminēto nestrikto topoloģiju. Līdz ar to $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{T}})$ mēs sauksim par laminēto nestrikto topoloģisko telpu.

Vaļējas un slēgtas kopas, kopas slēgumu un iekšieni šajā pieejā definē tāpat, kā Čanga pieejā. Kā arī kopu īpašības laminētajā topoloģijā ir ļoti līdzīgas iepriekš apskatītajām īpašībām. Visās kopās atšķiras tikai pirmā īpašība, kuras tagad izskatās šādi:

- Slēgtajās kopās: $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\mathcal{T}^c}, \forall \boldsymbol{\alpha}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{I}$;
- Kopas slēgumā: $\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}, \forall \boldsymbol{\alpha}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{I}$;
- Kopas iekšienē: $\boldsymbol{Int}\ \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}, \forall \boldsymbol{\alpha}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{I}$.

Piezīme. Laminētajā nestriktajā topoloģijā katra konstanta nestrikta kopa ir gan slēgta, gan vaļēja.

Tagad apskatīsim, kuras no iepriekš apskatītajām nestriktajām topoloģijām ir laminētās nestriktās topoloģijas.

1. $\mathcal{T}_a = \{\underline{0}, \underline{1}\}$ nav laminētā nestriktā topoloģija, jo tajā nav iekļautas visas konstantās funkcijas. Antidiskrētās nestriktās laminētās topoloģijas analogs būs visu konstanto funkciju saime.
2. $\mathcal{T}_d = I^X$ ir laminētā nestriktā topoloģija, jo tā sevī iekļauj visas kopas X nestriktās apakškopas.
3. $\mathcal{T}_k = \{G^c: G \in I^X\} \cup \{\underline{0}\}$, kur $G^c = 1 - G$ un G ir galīgā skaitā apvienoti nestriktie punkti, nav laminētā nestriktā topoloģija, jo neiekļauj sevī visas konstantās funkcijas. $\mathcal{T}_k$ laminētās topoloģijas analogs būs nestriktu kopu saime $\mathcal{T}_k^l = \{G_l: G \in I^X\}$, kur $G_l = \max\{\alpha - G, 0\}$.
4. $\mathcal{T}_p = \{U_p: U_p \in I^X\} \cup \{\underline{0}\}$ un $\mathcal{T}^p = \{U^p: U^p \in I^X\} \cup \{\underline{1}\}$ nav laminētas nestriktas topoloģijas un šobrīd mēs neredzam, kā papildināt šīs topoloģijas, lai tām būtu analogs laminētajā nestriktajā topoloģijā.

4. Zemākās Atdalāmības aksiomas nestriktajā topoloģijā

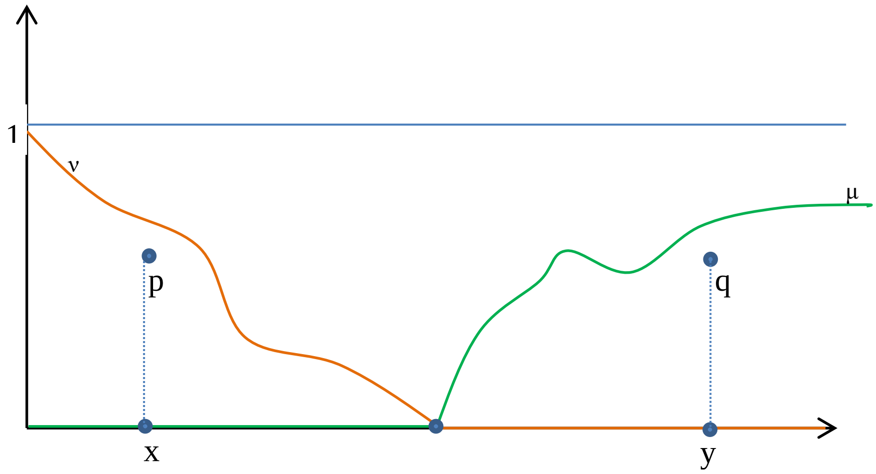
Dažādi matemātiķi laika posmā no 1978. gada līdz 1981. gadam ir paralēli un katrs atsevišķi pētījuši atdalāmības aksiomas nestriktajās kopās. Viņi ir stādījuši priekšā dažādas metodes, kā definēt šīs aksiomas. Ir gan secināts, ka šīs metodes ir savā starpā ekvivalentas. Mēs apskatīsim dažas no šīm metodēm.

Šajā nodaļā mēs neapskatīsim atdalāmības aksiomu T_0, jo apskatītajos darbos šī aksioma nebija definēta. Tas nav pārsteidzoši, jo arī vispārīgajā topoloģijā, apskatoties aksiomu definēšanas hronoloģiju, vispirms tika definēta T_1 [18], pēc tam T_2 [16] un krietni vēlāk T_0 [17].

4.1 Atdalāmības aksiomu R. Srivastava, S. Lala un A. Srivastava definīcija

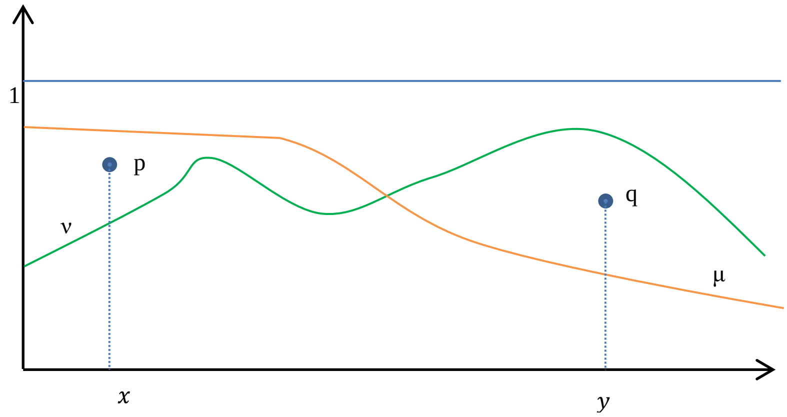
Šajā apakšnodaļā definīcijas ir no darbiem [14] un [15].

Definīcija 4.1.1 Nestriktu topoloģisku telpu $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{T}})$ sauc par $\boldsymbol{T_2}$ jeb Hausdorfa telpu, ja katriem diviem nestriktajiem punktiem ar atšķirīgiem nesējiem $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}$ un $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\beta}}$ eksistē tādi $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$, ka $\boldsymbol{p} \,\tilde{\in}\, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{q} \,\tilde{\in}\, \boldsymbol{\nu}$ un $\boldsymbol{\mu} \wedge \boldsymbol{\nu} = \underline{\boldsymbol{0}}$.



8. attēls. Nestrikto punktu p un q atdalīšana ar nestriktajām apkārtnēm ν un μ atbilstoši definīcijai 4.1.1

Definīcija 4.1.2 Nestriktu topoloģisku telpu $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{T}})$ sauc par $\boldsymbol{T_1}$ telpu, ja katriem diviem nestriktajiem punktiem ar atšķirīgiem nesējiem $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}$ un $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\beta}}$ eksistē tādi $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$, ka $\boldsymbol{p} \,\tilde{\in}\, \boldsymbol{\mu}$, bet $\boldsymbol{q} \,\tilde{\notin}\, \boldsymbol{\mu}$ un $\boldsymbol{q} \,\tilde{\in}\, \boldsymbol{\nu}$, bet $\boldsymbol{p} \,\tilde{\notin}\, \boldsymbol{\nu}$.



9. attēls. Nestrikto punktu p un q atdalīšana ar nestriktajām apkārtnēm μ un ν atbilstoši definīcijai 4.1.2

Ir acīm redzams, ka, ja telpa $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{T}})$ ir $\boldsymbol{T_2}$, tā ir arī $\boldsymbol{T_1}$.

Teorēma 4.1.1 Ja nestriktās telpas $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{T}})$ katrs nestriktais punkts p ir slēgts, tad šī telpa ir $\boldsymbol{T_1}$.

Teorēmā minētais gan nedarbojas otrā virzienā, t. i., ne katrai $\boldsymbol{T_1}$ telpai katrs nestriktais punkts ir slēgts.

Tagad mēs apskatīsim dažus piemērus. Sekojošajos piemēros, ja nav savādāk atrunāts, mēs pieņemam, ka $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}$.

1. $\mathcal{T}_a = \{\underline{0}, \underline{1}\}$

$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{T}_a})$ nav $\boldsymbol{T_1}$ telpa, jo nav tādu atšķirīgu $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in \boldsymbol{\mathcal{T}_a}$, ka kaut viens no nestriktajiem punktiem piederētu vienai, bet nepiederētu otrai. Bet līdz ar to, tā nav arī $\boldsymbol{T_2}$ telpa.

2. $\mathcal{T}_d = I^X$

Ir doti divi dažādi nestrikti punkti $p = p_x^\alpha$ un $q = q_y^\beta$. Ja mēs ņemam $\mu = p$ un $\nu = q$. Tad $\mu \wedge \nu = \underline{0}$. Līdz ar to $(X, \mathcal{T}_d)$ it T_2 telpa.

3. $\mathcal{T}_k = \{G^c : G \subset \underline{1}\} \cup \{\underline{0}\}$

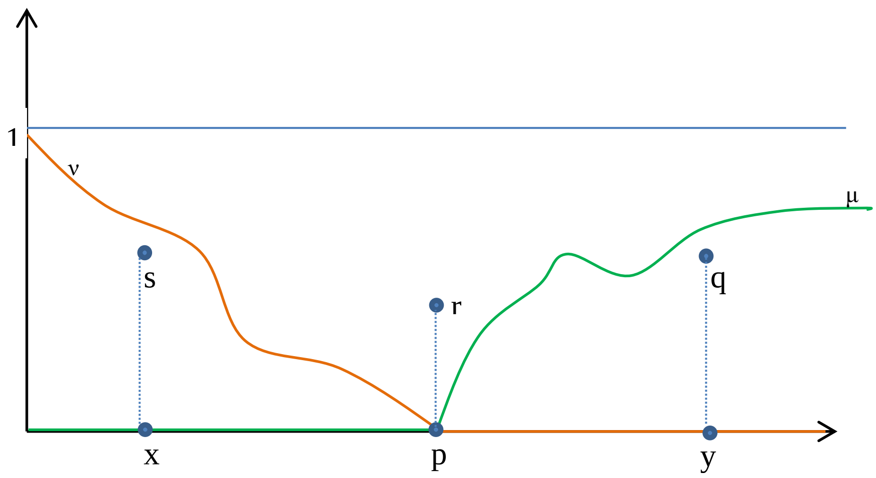
Ir doti divi nestrikti punkti $p = p_x^\alpha$, kur $\alpha > \frac{1}{2}$ un $q = q_y^\beta$, kur $\beta > \frac{1}{2}$. Mēs ņemsim $\mu = \underline{1} - p$, un $\nu = \underline{1} - q$,. Tad $\mu, \nu \in \mathcal{T}_k$ un $p \,\widetilde{\in}\, \nu, q \,\widetilde{\notin}\, \nu$, un $q \,\widetilde{\in}\, \mu, p \,\widetilde{\notin}\, \mu$. Tātad $(X, \mathcal{T}_k)$ ir T_1 telpa. Bet, tā kā $\mu \wedge \nu \neq \underline{0}$, tad šī nav T_2 telpa.

4. $\mathcal{T}_p = \{U_p : U_p \subset \underline{1}\} \cup \{\underline{0}\}$

Ir doti divi nestrikti punkti $p = p_x^\alpha$ un $q = q_y^\beta$. Mēs ņemam nestrikto kopu $\mu = p$ un nestrikto kopu $\nu: q \widetilde{\in} \nu$. Mēs iegūstam, ka punkts $q \widetilde{\notin} \mu$ un $p \widetilde{\in} \mu$, bet punkts $p \widetilde{\in} \nu$ pēc topoloģijas $\mathcal{T}_p$ uzbūves. Līdz ar to topoloģiskā telpa $(X, \mathcal{T}_p)$ nav ne T_1, ne T_2.

5. $\mathcal{T}^p = \{U^p : U^p \subset \underline{1}\} \cup \{\underline{1}\}$

Telpa $(X, \mathcal{T}^p)$ ir T_2 telpa. Šo vislabāk pamatot ar ilustrētu piemēru. 10. attēlā var redzēt, ka nestriktie punkti $q = q_y^\alpha$ un $s = s_x^\beta$ pieder attiecīgi kopām μ un ν, kā arī $\mu \wedge \nu = \underline{0}$. Bet ja ņem nestrikto punktu r, kura nesējs sakrīt ar p nesēju, tad vienīgā nestriktā vaļējā kopa, kurai pieder nestriktais punkts r ir $\underline{1}$. Līdz ar to, jebkuru citu nestrikto punktu ar atšķirīgu nesēju nevarēs atdalīt no r. Tātad šī telpa nav ne T_1, ne T_2.



10. attēls. 5. piemēra ilustrācija

4.2 Atdalāmības aksiomu M. Sarkara definīcija

Šeit definīcijas ir no darbiem [12], [13].

Nākamajā definīcijā tiek atdalīti nestriktie punkti ne tikai ar dažādiem nesējiem, bet arī nestriktie punkti ar vienu un to pašu nesēju, bet dažādām vērtībām.

Definīcija 4.2.1 Nestriktu topoloģisku telpu $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{T}})$ sauc par $\boldsymbol{T_2}$ jeb Hausdorfa telpu, ja katriem diviem nestriktiem punktiem $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_x^\alpha}$ un $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q_y^\beta}$ izpildās:

1. Ja $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, tad eksistē tādi $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$, ka $\boldsymbol{p} \widetilde{\in} \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{q} \widetilde{\notin} \overline{\boldsymbol{\mu}}$ un $\boldsymbol{q} \widetilde{\in} \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{p} \widetilde{\notin} \overline{\nu}$;

2. Ja $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ un $\alpha < \beta$, tad eksistē tāds $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$, ka $\boldsymbol{p} \widetilde{\in} \boldsymbol{\mu}$, bet $\boldsymbol{q} \widetilde{\notin} \overline{\boldsymbol{\mu}}$.

Definīcija 4.2.2 Nestriktu topoloģisku telpu $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{T}})$ sauc par $\boldsymbol{T_1}$ telpu, ja visi nestriktie punkti šajā telpā ir slēgti.

Šeit var viegli redzēt, ka no $\boldsymbol{T_2}$ izriet arī $\boldsymbol{T_1}$.

Visas apskatītās pieejas ir savā starpā ekvivalentas. Turpmāk, runājot par Atdalāmības aksiomām, mēs izmantosim Srivastavu un Lala pieeju.

Apskatīsim piemēru.

Ņemsim kopu $X = \{1,2,3\}$. Uz šīs kopas izveidosim nestrikto topoloģiju

$\mathcal{T}_1 = \left\{\underline{0}, \underline{1}, p_1^{\frac{2}{3}}, p_3^{\frac{2}{3}}, p_1^{\frac{2}{3}} \vee p_3^{\frac{2}{3}}\right\}$, kur $\underline{0} = \{p_1^0, p_2^0, p_3^0\}$ un $\underline{1} = \{p_1^1, p_2^1, p_3^1\}$.

Mēs ņemsim divus punktus $p_1^{\frac{2}{3}}$ un $p_3^{\frac{2}{3}}$. Pēc definīcijas 4.1.1 apskatīsim divas vaļējas nestriktās kopas, kurām šie nestriktie punkti pieder: $\mu = p_1^{\frac{2}{3}}$ un $\nu = p_3^{\frac{2}{3}}$. Tā kā šo divu nestrikto kopu šķēlums $\mu \wedge \nu = \underline{0}$, topoloģiskā telpa $(X, \mathcal{T}_1)$ ir T_2.

Apskatīsim to pašu piemēru, tikai izmantosim definīciju 4.2.1.

Vispirms mēs atradīsim visas slēgtās kopas

$S = \left\{\underline{1}, \underline{0}, \vee\left\{p_1^{\frac{1}{3}}, p_2^1, p_3^1\right\}, \vee\left\{p_1^1, p_2^1, p_3^{\frac{1}{3}}\right\}, \vee\left\{p_1^{\frac{1}{3}}, p_2^1, p_3^{\frac{1}{3}}\right\}\right\}$.

$\overline{\mu} = \vee\left\{p_1^1, p_2^1, p_3^{\frac{1}{3}}\right\}$ un

$\overline{\nu} = \vee\left\{p_1^{\frac{1}{3}}, p_2^1, p_3^1\right\}$.

Līdz ar to, nestriktais punkts $p_1^{\frac{2}{3}}$ nepieder $\overline{\nu}$ un nestriktais punkts $p_3^{\frac{2}{3}}$ nepieder $\overline{\mu}$. Atbilstoši definīcijai 4.2.1 šī ir T_2 telpa.

Nobeigums

Šajā darbā mēs analizējām dažādas literatūtrā sastopamās nestriktā punkta piederības definīcijas nestriktai kopai, nestriktās topoloģijas definīcijas un zemākās atdalāmības aksiomas. Ar piemēriem ilustrējām nestriktās topoloģijas un pārbaudījām vai tajās ir spēkā aplūkotās zemākās atdalāmības aksiomas.

Lai arī darbā aplūkojām dažādu autoru darbos nestriktās topoloģijas punkta un attiecīgi ir atrodami vēl daudz citi autoru raksti, kuros vēl vispārīgāk ir definēta nestriktā topoloģija un attiecīgi darbā aplūkotos variantus var uztvert kā to apakšgadījumus.

Darbu, protams, būtu iespējams turpināt, aplūkojot citas nestrikto punktu piederības un apkārtņu definīcijas un atdalāmības aksiomas atbilstošajos kontekstos.

Viens no vērtīgākajiem personīgajiem darba ieguvumiem bija izpratnes padziļināšana par nestriktās kopas, nestriktās topoloģijas un ar to saistītiem jēdzieniem, konstruējot dažādus piemērus.

Izmantotā literatūra

[1] R. Engelking, General Topology, Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[2] A. Šostaks, L-kopas un L-vērtīgas struktūras, Rīga: 2003.

[3] C. L. Chang, Fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl., 24 (1968), 182-190

[4] C. De Mitri, E. Pascali, Characterization of fuzzy topologies from neighborhoods of fuzzy points, J. Math. Anal. Appl., 93 (1983), 1-14.

[5] J. A. Goguen, L-fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl., 18 (1967), 145-174.

[6] R. Lowen, Topologies Floues, C. R. Acad. Sci. Paris, 278 (1974).

[7] R. Lowen, Convergence Floue, C. R. Acad. Sci. Paris, 280 (1975).

[8] R. Lowen, A theory of fuzzy topologies, Ph. D. Thesis, Vrije Universiteit Brussel, Brussel, 1975.

[9] Pu Pao-Ming, Liu Ying-Ming, Fuzzy topology. I. Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence, J. Math. Anal. Appl., 76 (1980), 571-599.

[10] Pu Pao-Ming, Liu Ying-Ming, Fuzzy topology. II. Product and quotient spaces, J. Math. Anal. Appl., 77 (1980), 20-37.

[11] S. E. Rodabaugh, A theory of fuzzy uniformities with applications to the fuzzy real lines, ibid, 97-138.

[12] M. Sarkar, On fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl., 79 (1981), 384-394.

[13] M. Sarkar, On L-fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl., 84 (1981), 431-442.

[14] R. Srivastava, S. N. Lal and A. K. Srivastava, Fuzzy Hausdorff topological spaces, J. Math. Anal. Appl., 81 (1981), 497-506.

[15] R. Srivastava, S. N. Lal and A. K. Srivastava, Fuzzy T_1-topological spaces, J. Math. Anal. Appl., 102 (1984) 442-448.

[16] Grundzüge der Mengelehre, Leipzig 1914.

[17] Alexandroff, P., Hopf, H. Topologie I, Berlin 1935.

[18] Die Genesis des Raumbegriffs, Math. und Naturwiss. Berichte aus Ungarn 24 (1907), 309-353

[19] C. K. Wong, Fuzzy points and local properties of fuzzy topology, J. Math. Anal. Appl., 46 (1974), 316-328.

[20] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, vol. 8 (1965), 338 -353.

Bakalaura darbs „Sabiedrības līdzdalības iespējas publiskajā pārvaldē Latvijā” izstrādāts LU Fizikas un matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Ieva Bullīte

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītāja: Asoc. profesore, Dr.math. Ingrīda Uļjane

Recenzents: Profesore Dr.math. Svetlana Asmuss

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā __.06.2016.

Dekāna pilnvarotā persona: vecākā metodiķe Dzintra Holsta

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē

16. 06.2016. prot. Nr._____

Komisijas sekretāre: docente Margarita Buiķe