

LATVIJAS UNIVERSITĀTE  
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE  
MATEMĀTIKAS NODAĻA

DIFERENČU SHĒMAS AR PRECĪZO SPEKTRU  
DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMIEM AR PIRMĀ VEIDA  
ROBEŽNOSACĪJUMIEM

BAKALAURA DARBS

Autors: **Sergejs Rogovs**

Stud. apl. sr07027

Darba vadītājs: Dr. habil. math., Dr. habil. phys., prof. Harijs Kalis

RĪGA 2011

## **Anotācija**

Bakalaura darba "Diferenču shēmas ar precīzo spektru diferenciālvienādojumiem ar pirmā veida robežnosacījumiem" mērķis - salīdzināt diferencu shēmas ar precīzo spektru ar citām diferencu shēmām parastajiem un parciāliem diferenciālvienādojumiem ar pirmā veida robežnosacījumiem.

Darba ietvaros tika pētītas dažādas diferencu shēmas dažādiem otrās kārtas lineāriem diferenciālvienādojumiem ar konstantiem koeficientiem, kā arī siltuma vadīšanas un stīgas svārstību vienādojumam.

Balstoties uz izstrādātu teoriju tika iegūti nozīmīgi rezultāti, kā arī noformulētas un pierādītas divas teorēmas.

Atslēgas vārdi: galīgas diferences, vienmērīgais režģis, robežproblēma, spektrālā problēma, īpašvērtības, īpašfunkcijas, īpašvektori.

## **Abstract**

The aim of this Bachelor's thesis is to compare finite difference schemes with exact spectrum with other finite difference schemes solving ordinary and partial differential equations with boundary conditions of the first kind.

In this paper, different finite difference schemes solving differential equations of the second order with constant coefficients also heat transfer and wave equations are studied. Based on the theory, significant results are obtained and two theorems are proved.

Keywords: finite differences, uniform mesh, boundary problem, spectral problem, eigenvalues, eigenfunctions, eigenvectors.

# Saturs

<b>Ievads</b>	<b>2</b>
1. Īpašvērtību un īpašfunkciju problēmas otrās kārtas diferenciāloperatoram $-\frac{d^2}{dx^2}$ ar pirmā veida homogēniem robežnosacījumiem . . . . .	3
1.1. Algebras spektrālā problēma . . . . .	3
1.2. Nepārtrauktā īpašvērtību un īpašfunkciju problēma otrās kārtas diferenciāloperatoram $-\frac{d^2}{dx^2}$ ar pirmā veida homogēniem robežnosacījumiem . . . . .	5
1.3. Diskrētā īpašvērtību un īpašfunkciju problēma otrās kārtas centrālo diferenču operatoram $-\Lambda y \equiv -y_{x\bar{x}}$ ar pirmā veida homogēniem robežnosacījumiem . . . . .	7
2. Galīgo diferenču metode ar precīzo spektru vienādojumam $-u''(x) = f(x)$ ar pirmā veidā homogēniem robežnosacījumiem . . . . .	10
3. Galīgo diferenču metode ar precīzo spektru vienādojumam $-u''(x) - bu(x) = f(x)$ ar pirmā veidā homogēniem robežnosacījumiem . . . . .	13
4. Īpašvērtību un īpašfunkciju problēmas otrās kārtas diferenciāloperatoram $-\frac{d^2}{dx^2} - a\frac{d}{dx}$ ar pirmā veida homogēniem robežnosacījumiem . . . . .	17
4.1. Nepārtrauktā spektrālā problēma otrās kārtas diferenciāloperatoram $-\frac{d^2}{dx^2} - a\frac{d}{dx}$ ar pirmā veida homogēniem robežnosacījumiem . . . . .	17
4.2. Diskrētā spektrālā problēma otrās kārtas monotonam diferenču operatoram $-\Lambda y \equiv -\gamma y_{x\bar{x}} - ay_x$ ar pirmā veida homogēniem robežnosacījumiem. . . . .	18
5. Galīgo diferenču metode ar precīzo spektru vienādojumam $-u''(x) - au'(x) = f(x)$ ar pirmā veidā homogēniem robežnosacījumiem . . . . .	20
6. Jaukta veida problēma siltuma vadīšanas vienādojumam . . . . .	26
6.1. Nepārtrauktā problēma . . . . .	26
6.2. Taišņu shēma . . . . .	27

7.	Taišņu shēma ar precīzo spektru siltuma vadīšanas vienādojumam . . . . .	31
8.	Jaukta veida problēma stīgas svārstību vienādojumam . . . . .	34
8.1.	Nepārtrauktā problēma . . . . .	34
8.2.	Taišņu shēma . . . . .	35
9.	Taišņu shēma ar precīzo spektru stīgas svārstību vienādojumam . . . . .	37
<b>Nobeigums</b>		<b>40</b>
<b>Izmantotā literatūra un avoti</b>		<b>41</b>
1.	M-faili . . . . .	42
2.	Maple programmas kods . . . . .	53

# Ievads

Mūsdienās eksistē daudz metožu, kā var risināt diferenciālvienādojumu skaitliski. Proti, galīgo diferencu metode, galīgo elementu metode, galīgo robeželementu metode utt. Šajā darbā tiks izmantota vispopulārākā to tām, proti galīgo elementu metode.

Risinot diferenciālvienādojumu skaitliski ar galīgo diferencu metodi, nezināmas funkcijas atvasinājumi tiek aizstāti ar attiecīgas kārtas diferencēm. Līdz ar to rodas diferencu vienādojums, kura atrisinājums ir diferenciālvienādojuma tuvinātais atrisinājums.

Gan precīzo, gan skaitlisko parastā diferenciālvienādojuma atrisinājumu var izvirzīt Furjē rindā (bezgalīgā vai galīgā attiecīgi). Šajā izvirzījumā parādās attiecīgas spektrālas problēmas īpašvērtības un īpašvektori. Ja atrisinājuma galīgā izvirzījumā Furjē rindā diskrētas problēmas īpašvērtības aizvieto ar īpašvērtībām no bezgalīga izvirzījuma, tad šo izvirzījumu sauc par diferencu shēmu ar precīzo spektru.

Savukārt, risinot parciālo diferenciālvienādojumu ar taisņu shēmu, telpas argumenta  $x$  izmaiņas segments tiek diskretizēts, otrās kārtas atvasinājums pēc telpas mainīga tiek aizvietots ar centrālo diferenci, bet laika mainīgs  $t$  paliek nepārtraukts un parciālais diferenciālvienādojums tiek reducēts uz parasto diferenciālvienādojumu sistēmu. Šī vienādojuma skaitlisko atrisinājumu arī var izvirzīt galīgā Furjē rindā un tāpat kā parastajiem diferenciālvienādojumiem, ja diskrētas problēmas īpašvērtības aizvieto ar īpašvērtībām no nepārtrauktas problēmas, šo izvirzījumu sauc par diferencu shēmu ar precīzo spektru parciāliem diferenciālvienādojumiem.

Šajā darbā galīgo diferencu shēmas tiks salīdzinātas ar citām zināmām diferencu shēmām dažādiem otrās kārtas parastajiem lineāriem diferenciālvienādojumiem ar pirmā veida robežnosacījumiem, kā arī siltuma vadīšanas un stīgas svārstību vienādojumiem ar pirmā veida robežnosacījumiem.

# 1. Īpašvērtību un īpašfunkciju problēmas otrās kārtas diferenciāloperatoram $-\frac{d^2}{dx^2}$ ar pirmā veida homogēniem robežnosacījumiem

Īpašvērtību un īpašfunkciju (spektrālo) problēmu plaši izmanto nepārtraukto un diskrēto robežproblēmu atrisināšanā. Vispirms apskatīsim algebriskas vienādojumu sistēmas atrisināšanu, kura rodas, risinot diskrēto robežproblēmu.

## 1.1. Algebras spektrālā problēma

**Definīcija 1.** Par kvadrātiskas matricas  $A$  spektru sauc visu to īpašvērtību kopu.

Algebrisku vienādojumu sistēmu var pierakstīt formā

$$Ax = f, \quad (1.1)$$

kur  $A$  ir nesingulāra  $m$ -tas kārtas kvadrātiska matrica ar elementiem  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ ,  $i, j = \overline{1, m}$ ,  $x, f$   $m$ -tas kārtas vektori-kolonas ar elementiem  $x_i, f_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Ja ir zināmi īpašvērtību un īpašvektoru (spektrālo) problēmu

$$Aw = \lambda w, A^T \bar{w} = \lambda \bar{w} \quad (1.2)$$

atrisinājumi ar pilnām īpašvektoru sistēmām  $\{w^j\}$ ,  $\{\bar{w}^j\}$  matricai  $A$  un transponētai matricai  $A^T$  ar atbilstošām īpašvērtībām  $\lambda_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , tad šīs sistēmas īpašvektorus var izvēlēties par biortonormēto bāzi telpā  $\mathbb{R}^m$  un sistēmas (1.1) atrisinājumu meklēt formā

$$x = \sum_{j=1}^m \alpha_j w^j, \quad (1.3)$$

kur  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  - lineāras kombinācijas koeficienti.

Pieņemot arī, ka

$$f = \sum_{j=1}^m \beta_j w^j (\beta_j \in \mathbb{R}), \quad (1.4)$$

ievērojot biortogonalitātes nosacījumu  $(w^j, \bar{w}^k) = \delta_{j,k}$ , kur

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

ir Kronekera simbols un  $(w^j, \overline{w^k}) = \delta_{j,k}$  ir skalārs reizinājums, un skalāri reizinot (1.4) ar fiksētu īpašfunkciju  $\overline{w^k}$ , iegūst

$$(f, \overline{w^k}) = \sum_{j=1}^m \beta_j (w^j, \overline{w^k}) = \sum_{j=1}^m \beta_j \delta_{j,k} = \beta_k.$$

Tātad koeficienti  $\beta_j$  izvirzījumā (1.4) viennozīmīgi nosakās ar formulu

$$\beta_j = (f, \overline{w^j}), j = \overline{1, m}. \quad (1.5)$$

Ievietojot sakarības (1.3) ,(1.4) vienādojumā (1.1) un reizinot skalāri ar  $\overline{w^k}$  iegūst

$$(\overline{w^k}, Ax) = (\overline{w^k}, A \sum_{j=1}^m \alpha_j w^j) = (\overline{w^k}, \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j w^j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j (\overline{w^k}, w^j) = \lambda_k \alpha_k,$$

$$(\overline{w^k}, f) = \sum_{j=1}^m \beta_j (\overline{w^k}, w^j) = \sum_{j=1}^m \beta_j \delta_{k,j} = \beta_k,$$

t.i.  $\alpha_k = \frac{\beta_k}{\lambda_k}$ . Tātad izvirzījumā (1.3)

$$\alpha_j = \frac{\beta_j}{\lambda_j}, j = \overline{1, m}, \quad (1.6)$$

un sistēmas (1.1) atrisinājums ir

$$x = \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{\lambda_j} w^j. \quad (1.7)$$

Problēmu (1.2) var pārrakstīt matricu formā

$$AW = WD, A^T \overline{W} = \overline{W} D,$$

kur  $W$  un  $\overline{W}$  ir matricas ar atbilstošiem īpašvektoriem kolonnās  $w_k^j, \overline{w_k^j}$ ,  $k, j = \overline{1, m}$ ,  $D = \text{diag}(\lambda_j)$ ,  $j = \overline{1, m}$  ir diagonālmatrix ar īpašvērtībām uz galvenas diagonāles. Līdz ar to ir spēkā

$$A = W D W^{-1}$$

un (1.7) var reprezentēt matricu formā

$$x = WD^{-1}W^{-1}f. \quad (1.8)$$

No (1.5) un (1.8) seko, ka  $W^{-1} = \overline{W}^T$ , vai  $W\overline{W}^T = E$ , kur  $E$  ir vienības matrica[1].

**Piezīme 1.** Ja matrica  $A$  ir simetriska ( $A = A^T$ ), tad  $\overline{w} = w$  rezultātā iegūst orthonormētu īpašvektoru sistēmu  $w^j, j = \overline{1, m}$ , kuriem ir spēkā orthonormētības nosacījums  $(w^j, w^k) = \delta_{j,k}$ , formulas (1.5) vietā ir

$$\beta_j = (f, w^j), j = \overline{1, N-1} \quad (1.9)$$

un formulas (1.8) vietā ir

$$x = WD^{-1}Wf. \quad (1.10)$$

## 1.2. Nepārtrauktā īpašvērtību un īpašfunkciju problēma otrās kārtas diferenciāloperatoram $-\frac{d^2}{dx^2}$ ar pirmā veida homogēniem robežnosacījumiem

Nepārtrauktā īpašvērtību un īpašfunkciju problēma otrās kārtas diferenciāloperatoram  $(-\frac{d^2}{dx^2})$  segmentā  $[0, l]$  ar homogēniem pirmā veida robežnosacījumiem ir formā

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

kur  $\lambda$  - īpašvērtība (parametrs), pie kuras problēmai (1.11) eksistē netriviāls atrisinājums ( $X \neq 0$ ). Diferenciālvienādojuma (1.11) raksturīgais vienādojums ir

$$\rho^2 + \lambda = 0$$

ar saknēm  $\rho_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$ , kur  $i = \sqrt{-1}$ . Līdz ar to iegūst diferenciālvienādojuma (1.11) vispārīgo atrisinājumu

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

No nosacījuma  $X(0) = 0$  seko, ka  $C_2 = 0$ . No nosacījuma  $X(l) = 0$  seko

$$C_1 \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \implies \sqrt{\lambda}L = k\pi, k = 1, 2, \dots \implies \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k = 1, 2, \dots$$

un problēmas (1.11) īpašfunkcijas ir

$$X_k(x) = C_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), k = 1, 2, \dots, \quad (1.12)$$

kur  $C_k$  ir patvaļīgas konstantes.

No ortonormētības nosacījuma

$$(X_k(x), X_j(x)) \equiv \int_0^l X_k(x)X_j(x)dx = \delta_{k,j} \quad (1.13)$$

izriet, ka  $C_k = \sqrt{\frac{2}{l}}, k = 1, 2, \dots$

Jebkuru nepārtrauktu funkciju  $f(x)$ , ja  $f(x) = f(l) = 0$ , var izvirzīt pēc problēmas (1.11) īpašfunkcijām (1.12) Furjē rindā

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j X_j(x), \quad (1.14)$$

kur  $f_j = (f(x), X_j(x))$ .

Nehomogēnas robežproblēmas

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), x \in (0, l) \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

atrisinājums analogi (1.3) ir uzrakstāms rindas veidā

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j X_j(x), \quad (1.16)$$

kur  $\alpha_j = \frac{f_j}{\lambda_j}$ .

**Piezīme 2.** Ja funkcija  $f(x)$  neapmierina homogēnos robežnosacījumus, tad problēmu (1.15) reducē uz divām robežproblēmām

$$\begin{cases} -u_1''(x) = f(x) + \frac{f(0)-f(L)}{L}x - f(0) \\ u_1(0) = u_1(L) = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

un

$$\begin{cases} -u_2''(x) = -\frac{f(0)-f(L)}{L}x + f(0) \\ u_2(0) = u_2(L) = 0, \end{cases} \quad (1.18)$$

kur robežproblēmas (1.17) labā puse apmierina homogēnos robežnosacījumus un robežproblēmas (1.15) atrisinājums ir

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x). \quad (1.19)$$

**Piezīme 3.** Ja  $f(x) = CX_k(x)$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , tad rinda (1.16) satur tikai vienu saskaitāmo, t.i.

$$u(x) = \frac{C}{\lambda_k} X_k(x), k \geq 1.$$

### 1.3. Diskrētā īpašvērtību un īpašfunkciju problēma otrās kārtas centrālo diferencu operatoram $-\Lambda y \equiv -y_{x\bar{x}}$ ar pirmā veida homogēniem robežnosacījumiem

#### Apgabala aizvietošana ar vienmērīgo režģi

Risinot nepārtrauktu problēmu tuvināti, ir nepieciešama tās diskretizācija. Argumenta izmaiņas segmentu aizvieto ar režģi - diskrētu punktu kopu. Realizējot nepārtrauktas problēmas skaitlisko atrisinājumu, ļoti bieži izmanto, tā saucamo, vienmērīgo režģi

$$\bar{\omega}_h = \{x_j = jh, j = \overline{0, N}, Nh = l\},$$

kas sadala nogriezni  $[0, l]$   $N$  vienādās daļās. Punktus  $x_j$  bieži sauc par mezglu punktiem. Iekšējos mezglu punktus apzīmē ar  $\omega_h$ .

#### Galīgas diferences

Risinot otrās kārtas diferenciālvienādojumu skaitliski, atvasinājumu vērtības mezglu punktos parasti aizvieto ar attiecīgām diferencēm. Pirmās kārtas atvasinājumu visbiežāk aizvieto ar pirmās kārtas centrālo diferenci

$$u'(x_j) \approx \frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1}))}{2h}$$

un apzīmē ar  $y_{x\bar{x}}$ , bet otrās kārtas atvasinājumu visbiežāk aizvieto ar otras kārtas centrālo diferenci

$$u''(x_j) \approx \frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1}))}{h^2}$$

un apzīmē ar  $y_{x\bar{x}}$ , kur  $h$  ir režģa solis un  $y(x_j)$  ir tuvinātas problēmas atrisinājuma vērtības mezglu punktos[2].

**Piezīme 4.** Pirmās kārtas atvasinājumu var aizvietot arī ar pirmās kārtas labo vai kreiso diferenci, proti

$$y'(x_j) \approx \frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h}$$

vai

$$y'(x_j) \approx \frac{y(x_j) - y(x_{j-1}))}{h}$$

attiecīgi.

**Piezīme 5.** Dažkārt, lai samazinātu tuvināta atrisinājuma kļūdu, otro diferenci reizina ar speciālo konstanti  $\gamma$ , kura ir atkarīga no vienādojuma struktūras.

Tātad diskrētā īpašvērtību un īpašfunkciju problēma otrās kārtas centrālo diferencu operatoram  $-\Lambda y \equiv -y_{x\bar{x}}$  vienmērīgā režģī ar homogēniem pirmā veida robežnosacījumiem ir formā

$$\begin{cases} -y_{x\bar{x}} = \mu y(x), x \in \omega_h \\ y(0) = y(l) = 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Diferencu shēmu (1.20) indeksu formā var pierakstīt šādi

$$\begin{cases} y_{j+1} - 2\cos(th)y_j + y_{j-1} = 0, j = \overline{1, N-1} \\ y_0 = y_N = 0, \end{cases}$$

kur  $y_j = y(x_j)$ ,  $j = \overline{0, N}$  un  $\cos(th) = 1 - \frac{h^2\mu}{2}$  un attiecīgais raksturīgais vienādojums ir

$$\rho^2 - 2\cos(th)\rho + 1 = 0$$

ar saknēm

$$\rho_{1,2} = \cos(th) \pm i\sin(th) = e^{\pm i th},$$

kur  $i = \sqrt{-1}$ .

Var viegli redzēt, ka netriviāls atrisinājums ( $y_j \neq 0$ ) ir formā

$$y_j = C_1 \sin(tx_j) + C_2 \cos(tx_j), j = \overline{1, N-1}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

No robežnosacījuma  $y_0 = 0$  seko, ka  $C_2 = 0$ .

No robežnosacījuma  $y_N = 0$  seko, ka  $t_k l = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  un īpašfunkcijas ir

$$y^{(k)}(x_j) = C_k \sin\left(\frac{k\pi x_j}{l}\right), j, k = \overline{1, N-1}, C_k \in \mathbb{R}.$$

Attiecīgas īpašvērtības ir

$$\mu_k = \frac{2}{h^2}(1 - \cos(t_k h)) = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{t_k h}{2}\right) = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2l}\right), k = \overline{1, N-1}. \quad (1.21)$$

Nosakot konstantes  $C_k$  no ortonormētības nosacījuma

$$(y^{(k)}, y^{(j)}) \equiv h \sum_{i=1}^{N-1} y^{(k)}(x_i) y^{(j)}(x_i) = \delta_{k,j}, \quad (1.22)$$

iegūst, ka  $C_k = \sqrt{\frac{2}{l}}$ , un īpašfunkcijām ir analoga (1.12) forma

$$y^{(k)}(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), x \in \omega_h, k = \overline{1, N-1}. \quad (1.23)$$

**Piezīme 6.** Formula (1.22) ir formulas (1.13) diskrēts variants.

Nehomogēnas problēmas

$$\begin{cases} -y_{x\bar{x}}(x) = f(x), x \in \omega_h \\ y(0) = y(l) = 0, \end{cases} \quad (1.24)$$

kur  $f(0) = f(l) = 0$ , atrisinājums analogi (1.16) ir uzrakstāms “galīgas rindas” (lineāras kombinācijas) formā

$$y(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha^{(j)} y^{(j)}(x), x \in \omega_h, \quad (1.25)$$

kur

$$\alpha^{(j)} = \frac{f^{(j)}}{\mu^{(j)}}, f^{(j)} = (f, y^{(j)}), j = \overline{1, N-1}.$$

## 2. Galīgo diferencu metode ar precīzo spektru vienādojumam $-u''(x) = f(x)$ ar pirmā veidā homogēniem robežnosacījumiem

Robežproblēmas

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(0) = u(l) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

kur  $f(0) = f(l) = 0$ , tuvināto atrisinājumu ar galīgo diferencu shēmu (GDS) meklē formā (1.25), bet tuvināto atrisinājumu ar galīgo diferencu shēmu ar precīzo spektru (GDSPS) meklē šādi

$$y(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha^{(j)} y^{(j)}(x), x \in \omega_h, \quad (2.2)$$

kur

$$\alpha^{(j)} = \frac{f^{(j)}}{\lambda^{(j)}}, f^{(j)} = (f, y^{(j)}), j = \overline{1, N-1}$$

un  $\lambda^{(j)} = \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2, j = \overline{1, N-1}$  ir nepārtrauktas īpašvērtību un īpašfunkciju problēmas īpašvērtības[3].

**Piezīme 7.** Formulu (2.2) var lietot tikai tad, ja nepārtrauktas problēmas (1.11) īpašfunkciju (1.12) vērtības un diskrētas problēmas (1.20) īpašfunkcijas (1.23) vērtības sakrīt mezglu punktos.

**Piezīme 8.** Robežgadījumā

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{h^2} \sin^2 \left( \frac{k\pi h}{2l} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{h^2} \left( \frac{k\pi h}{2l} \right)^2 \frac{\sin^2 \left( \frac{k\pi h}{2l} \right)}{\left( \frac{k\pi h}{2l} \right)^2} = \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \left( \frac{k\pi h}{2l} \right)}{\left( \frac{k\pi h}{2l} \right)^2} = \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2,$$

$k = \overline{1, N-1}$ , t.i.  $\mu_k \rightarrow \lambda_k$ , kad  $h \rightarrow 0, k = \overline{1, N-1}$ .

**Piezīme 9.** Ja  $f(x) = \sum_{i=1}^M A_i X_i(x), M \leq N-1$ , kur  $A_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, M}$  un  $X_i(x), i = \overline{1, M}$  ir problēmas (1.11) īpašfunkcijas, tad shēma (2.2) ir precīza, t.i. tuvinātā atrisinājuma vērtības mezglu punktos sakrīt ar precīzā atrisinājuma vērtībām.

**Piemērs 1.** Problēmas (2.1) precīzais atrisinājums, ja  $f(x) = \sin(\pi x)$  un  $l = 1$ , ir  $u(x) = \pi^{-2}\sin(\pi x)$ .

Ar MATLAB programmas M-failu *PDS1veid4* palīdzību var pārlicināties, ka GDSPS dod precīzus rezultātus.

1. tabula Absolūtās kļūdas

$N$	$\Delta u(\text{GDS})$	$\Delta u(\text{GDSPS})$
5	0.0032	$1.3878 \cdot 10^{-17}$

Šeit  $\Delta u$  ir tuvinātā atrisinājuma absolūtā kļūda, t.i.  $\Delta u = \max_{1 \leq j \leq N-1} |u(x_j) - y(x_j)|$ .  
Kur  $\delta u$  ir tuvinātā atrisinājuma relatīvā kļūda, kuru definē šādi

2. tabula Relatīvās kļūdas

$N$	$\delta u(\text{GDS})$	$\delta u(\text{GDSPS})$
5	0.0336	$1.4402 \cdot 10^{-16}$

$$\delta u = \frac{\max_{1 \leq j \leq N-1} |u(x_j) - y(x_j)|}{|u(x_j)|}$$

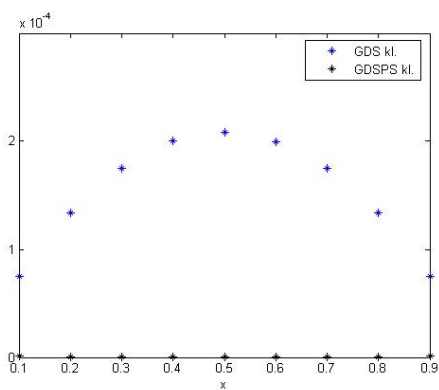
**Piemērs 2.** Problēmas (2.1) precīzais atrisinājums, ja  $f(x) = x(x - 1)$  un  $l = 1$  ir  $u(x) = -\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{12}$ . MATLAB M-fails *PDS1veid5* dod šādus rezultātus:

3. tabula Absolūtās kļūdas

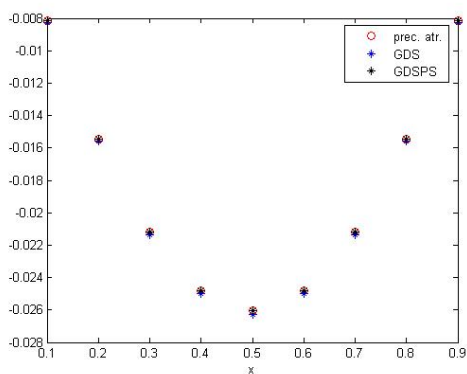
$N$	$\Delta u(\text{GDS})$	$\Delta u(\text{GDSPS})$
5	0.0008	$1.5936 \cdot 10^{-5}$
10	$2.0833 \cdot 10^{-4}$	$1.005 \cdot 10^{-6}$

4. tabula Relatīvās kļūdas

$N$	$\delta u(\text{GDS})$	$\delta u(\text{GDSPS})$
5	0.0323	0.001
10	0.008	$1.2294 \cdot 10^{-4}$



1. att. Kļūdu grafiks pie  $N = 10$



2. att. Atrisinājumu grafiks pie  $N = 10$

Var viegli redzēt, ka GDSPS robežproblēmai (2.1) dod daudz precīzākus rezultātus nekā GDS.

### 3. Galīgo diferencu metode ar precīzo spektru vienādojumam $-u''(x) - bu(x) = f(x)$ ar pirmā veidā homogēniem robežnosacījumiem

Robežproblēmas

$$\begin{cases} -u''(x) - bu(x) = f(x) \\ u(0) = u(l) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

kur  $f(0) = f(l) = 0$  un  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$  nepārtrauktas īpašvērtību un īpašfunkciju problēmas īpašfunkcijas sakrīt ar problēmas (2.1) īpašfunkcijām, bet īpašvērtības ir formā

$$\tilde{\lambda}_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - b, k = 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

kurus var viegli dabūt no problēmas (1.11), izmantojot transformāciju  $\tilde{\lambda} = \lambda - b$ .

Analogi iegūst diskrētas īpašvērtību un īpašfunkciju problēmas īpašvērtības

$$\tilde{\mu}_k = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2l}\right) - b, k = \overline{1, N-1}, \quad (3.3)$$

ievērojot, ka īpašvektori sakrīt ar (1.23). Robežproblēmas (3.1) tuvināto atrisinājumu ar GDS meklē formā (1.25), aizvietojo  $\mu_k$  ar  $\tilde{\mu}_k, k = \overline{1, N-1}$  un tuvināto atrisinājumu ar GDSPS meklē formā (2.2), aizvietojo  $\lambda_k$  ar  $\tilde{\lambda}_k, k = \overline{1, N-1}$ . Dažkārt, lai uzlabotu tuvināto atrisinājumu ar GDS, lieto, tā saucamo, Bahvalova metodi, reizinot otrās kārtas centrālo diferenci ar konstanti  $\gamma$ .  $\gamma = \left(\frac{b_1}{\sin b_1}\right)^2$ , kur  $b_1 = \frac{\sqrt{bh}}{2}$ , ja  $b > 0$  un  $\gamma = \left(\frac{b_1}{\sinh b_1}\right)^2$ , kur  $b_1 = \frac{\sqrt{-bh}}{2}$ , ja  $b < 0$ [4].

**Piezīme 10.** Ja  $f(x) = \sum_{i=1}^M A_i X_i(x)$ ,  $M \leq N - 1$ , kur  $A_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, M}$  un  $X_i(x)$ ,  $i = \overline{1, M}$  ir problēmas (1.11) īpašfunkcijas, tad shēma (2.2) ar īpašvērtībām (3.2) ir precīza.

**Piemērs 3.** Problēmas (3.1) precīzais atrisinājums, ja  $f(x) = 10\sin(3\pi x)$ ,  $b = 50$  un  $l = 1$ , ir  $u(x) = \frac{10\sin(3\pi x)}{-50+9\pi^2}$ .

Ar MATLAB programmas M-failu *PDS3veid1* palīdzību var pārlicināties, ka GDSPS dod precīzus rezultātus.

5. tabula Absolūtās kļūdas

$N$	$\Delta u(\text{GDS})$	$\Delta u(\text{Bah. GDS})$	$\Delta u(\text{GDSPS})$
5	0.3706	0.1003	$5.5511 \cdot 10^{-17}$

6. tabula Relatīvās kļūdas

$N$	$\Delta u(\text{GDS})$	$\Delta u(\text{Bah. GDS})$	$\Delta u(\text{GDSPS})$
5	1.5129	0.4097	$1.1331 \cdot 10^{-16}$

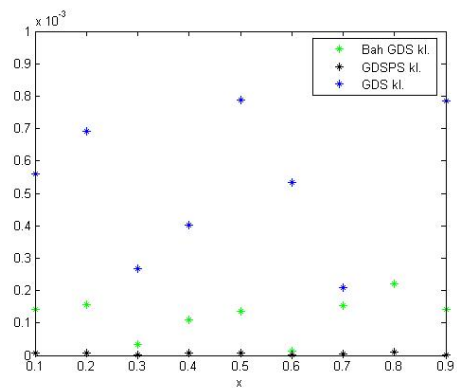
**Piemērs 4.** Problēmas (3.1) precīzais atrisinājums, ja  $f(x) = x(x-1)e^{-x}$ ,  $b = 100$  un  $l = 1$  ir  $u(x) = -\frac{4}{1030301} \sin(10x) \frac{(2\cos 10 + 99e)}{\sin 10} + \frac{8}{1030301} \cos(10x) - \frac{1}{1030301} (8 - 10605x + 10201x^2)e^x$ . Ar MATLAB M-faila *PDS3veid* palīdzību var saīldzināt precīzo atrisinājumu ar tuvināto atrisinājumu ar GDS, Bahvalova GDS, GDSPS.

7. tabula Absolūtās kļūdas

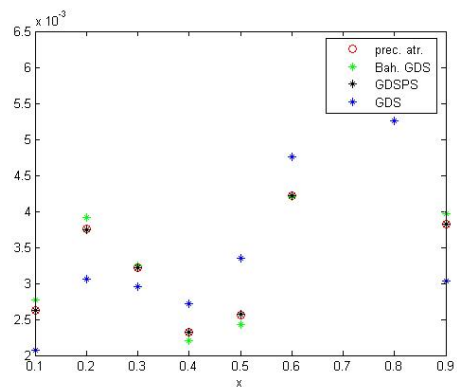
$N$	$\Delta u(\text{GDS})$	$\Delta u(\text{Bah. GDS})$	$\Delta u(\text{GDSPS})$
5	0.0019	0.001	$1.6904 \cdot 10^{-4}$
10	$8.4343 \cdot 10^{-4}$	$2.2147 \cdot 10^{-4}$	$9.2617 \cdot 10^{-6}$

8. tabula Relatīvās kļūdas

$N$	$\delta u(\text{GDS})$	$\delta u(\text{Bah. GDS})$	$\delta u(\text{GDSPS})$
5	0.5181	0.1692	0.045
10	0.1839	0.0363	0.0022



3. att. Kļūdu grafiks pie  $N = 10$



4. att. Atrisinājumu grafiks pie  $N = 10$

No kļūdu tabulām un no atrisinājumu grafikiem var redzēt, ka GDSPS robežproblēmai (3.1) precīzākus rezultātus nekā GDS vai Bahvalova GDS.

## 4. Īpašvērtību un īpašfunkciju problēmas otrās kārtas diferenciāloperatoram $-\frac{d^2}{dx^2} - a\frac{d}{dx}$ ar pirmā veida homogēniem robežnosacījumiem

### 4.1. Nepārtrauktā spektrālā problēma otrās kārtas diferenciāloperatoram $-\frac{d^2}{dx^2} - a\frac{d}{dx}$ ar pirmā veida homogēniem robežnosacījumiem

Nepārtrauktā spektrālā problēma otrās kārtas diferenciāloperatoram  $-\frac{d^2}{dx^2} - a\frac{d}{dx}$ , kur  $a \in \mathbb{R}$ , ar homogēniem pirmā veidā robežnosacījumiem segmentā  $[0, l]$  ir formā

$$\begin{cases} X''(x) + aX'(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Pēc transformācijas

$$X(x) = \exp\left(-\frac{ax}{2}\right) v(x)$$

iegūst problēmu (1.11), kur

$$X(x) \rightarrow v(x), \lambda \rightarrow \lambda - \frac{a^2}{4},$$

t.i. problēmas (4.1) nepārtrauktais spektrs ir

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \exp\left(-\frac{ax}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad (4.2)$$

$$\lambda_k = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Attiecīgas saistītas problēmas

$$\begin{cases} \bar{X}''(x) - a\bar{X}'(x) + \lambda\bar{X}(x) = 0 \\ \bar{X}(0) = \bar{X}(l) = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

īpašfunkcijas ir

$$\bar{X}_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \exp\left(\frac{ax}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad (4.5)$$

pie kam automātiski ir spēkā biortonormētības nosacījums

$$(X_j(x), \bar{X}_k(x)) \equiv \int_0^l X_j(x) \bar{X}_k(x) dx = \delta_{j,k}.$$

Nehomogēnas problēmas

$$\begin{cases} -u''(x) - au'(x) = f(x) \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

atrisinājums ir

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j X_j(x), \alpha_j = \frac{f_j}{\lambda_j}, f_j = (f(x), \overline{X_j}(x)).$$

## 4.2. Diskrētā spektrālā problēma otrās kārtas monotonam diferencu operatoram $-\Lambda y \equiv -\gamma y_{x\bar{x}} - ay_{\dot{x}}$ ar pirmā veida homogēniem robežnosacījumiem.

Diskrētā spektrālā problēma otrās kārtas monotonam diferencu operatoram  $-\Lambda y \equiv -\gamma y_{x\bar{x}} - ay_{\dot{x}}$  vienmērīgā režģī segmentā  $[0, l]$  ar homogēniem pirmā veida robežnosacījumiem ir formā

$$\begin{cases} \gamma y_{x\bar{x}} + ay_{\dot{x}} + \mu y = 0, x \in \omega_h \\ y(0) = y(l) = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

kur  $\gamma = a_1 \coth a_1$ ,  $a_1 = \frac{ah}{2}$  (Iljina shēma)[5]. Indeksu formā

$$\begin{cases} (\gamma + a_1)y_{i+1} - 2\left(\gamma - \mu \frac{h^2}{2}\right)y_i + (\gamma - a_1)y_{i-1} = 0, i = \overline{1, N-1} \\ y_0 = y_N = 0, \end{cases}$$

lietojot transformāciju  $y_i = k^i z_i$ , iegūst

$$\begin{cases} z_{i+1} - 2\cos(th)z_i + z_{i-1} = 0, i = \overline{1, N-1} \\ z_0 = z_N = 0, \end{cases}$$

kur

$$\cos(th) = \left(\gamma - \frac{h^2\mu}{2}\right) (\gamma^2 - a_1^2)^{-\frac{1}{2}}, \gamma \geq a_1, k = \sqrt{\frac{\gamma - a_1}{\gamma + a_1}} = e^{-a_1}.$$

Tātad analogi (4.2) un (4.3) iegūst

$$\begin{aligned} z_i^{(k)} &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{k\pi i h}{l}\right) \\ \mu_k &= \frac{2a_1}{h^2 \sinh(a_1)} \left( \cosh(a_1) - \cos\left(\frac{k\pi h}{l}\right) \right), k = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

t.i.,

$$y^{(k)}(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \exp\left(-\frac{ax}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), x \in \omega_h, k = \overline{1, N-1}. \quad (4.9)$$

Attiecīgas saistītas problēmas ((4.7),  $a$  vietā  $-a$ ) atrisinājums ir

$$\bar{y}^{(k)}(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \exp\left(\frac{ax}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), x \in \omega_h, k = \overline{1, N-1}. \quad (4.10)$$

Nehomogēnas problēmas

$$\begin{cases} -\gamma y_{x\bar{x}} - ay_{\dot{x}} = f(x), x \in \omega_h \\ y(0) = y(l) = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

kur  $f(0) = f(l) = 0$ , atrisinājums ir

$$y(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha^{(j)} y^{(j)}(x), x \in \omega_h, \quad (4.12)$$

kur

$$\alpha^{(j)} = \frac{f^{(j)}}{\mu_j}, f^{(j)} = (f, \bar{y}^{(j)}).$$

## 5. Galīgo diferencu metode ar precīzo spektru vienādojumam $-u''(x) - au'(x) = f(x)$ ar pirmā veidā homogēniem robežnosacījumiem

Tāpat kā iepriekš, robežproblēmas

$$\begin{cases} -u''(x) - au'(x) = f(x) \\ u(0) = u(l) = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

kur  $f(0) = f(l) = 0$ , tuvināto atrisinājumu ar Iljina GDS meklē formā (4.12), bet tuvināto atrisinājumu ar Iljina GDSPS meklē šādi

$$y(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha^{(j)} y^{(j)}(x), x \in \omega_h, \quad (5.2)$$

kur

$$\alpha^{(j)} = \frac{f^{(j)}}{\lambda^{(j)}}, f^{(j)} = (f, y^{(j)}), j = \overline{1, N-1}$$

un  $\lambda^{(j)} = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2, j = \overline{1, N-1}$  ir nepārtrauktas īpašvērtību un īpašfunkciju problēmas īpašvērtības.

**Piezīme 11.** *Robežgadījumā*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2a_1}{h^2 \sinh(a_1)} \left( \cosh(a_1) - \cos\left(\frac{k\pi h}{l}\right) \right) = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k = \overline{1, N-1}$$

, t.i.  $\mu_k \rightarrow \lambda_k$ , kad  $h \rightarrow 0, k = \overline{1, N-1}$ . To var viegli iegūt, izmantojot datorprogrammu Maple.

**Piezīme 12.** Ja  $f(x) = \sum_{i=1}^M A_i X_i(x), M \leq N-1$ , kur  $A_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, M}$  un  $X_i(x), i = \overline{1, M}$  ir problēmas (4.1) īpašfunkcijas, tad shēma (5.2) ir precīza

**Piemērs 5.** Robežproblēmas (5.1) precīzais atrisinājums, ja  $f = e^{-\frac{5x}{2}} \sin(3\pi x)$ ,  $a = 5$  un  $l = 1$ , ir  $u(x) = \frac{20e^{-\frac{5x}{2}} \sin(3\pi x)}{125+180\pi^2}$ . Ar MATLAB programmas M-failu *PDS5veid* palīdzību var pārlicināties, ka Iljina GDSPS dod precīzus rezultātus.

9. tabula Absolūtās kļūdas

$N$	$\Delta u(\text{Ilj. GDS})$	$\Delta u(\text{Ilj. GDSPS})$
5	0.0038	$3.4694 \cdot 10^{-18}$

10. tabula Relatīvās kļūdas

$N$	$\delta u(\text{Ilj. GDS})$	$\delta u(\text{Ilj. GDSPS})$
5	0.6322	$5.7184 \cdot 10^{-16}$

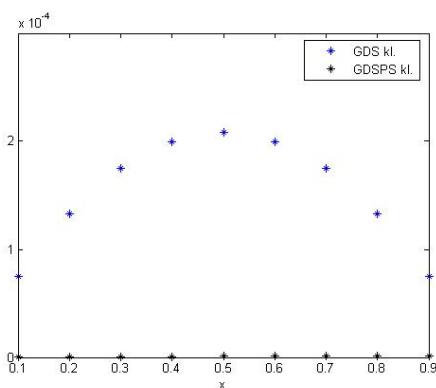
**Piemērs 6.** Robežproblēmas (5.1) precīzais atrisinājums, ja  $f = x(x - 1)$ ,  $a = 1$  un  $l = 1$ , ir  $u(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{11e^{-x}}{6(e^{-1}-1)} + 3x + \frac{11}{6(e^{-1}-1)}$ . Ar MATLAB M-faila *PDS2veid2* palīdzību var salīdzināt precīzo atrisinājumu ar tuvināto atrisinājumu ar Iļjina GDS un Iļjina GDSPS.

11. tabula Absolūtās kļūdas, ja  $a = 1$

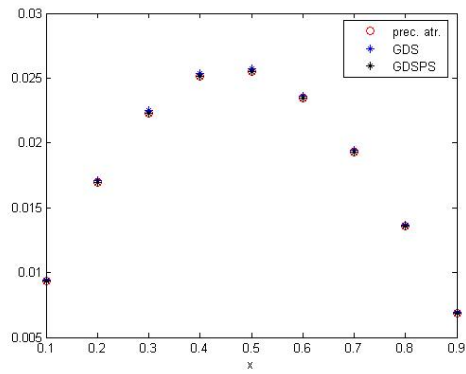
$N$	$\Delta u(\text{Iļ. GDS})$	$\Delta u(\text{Iļ. GDSPS})$
5	$7.9795 \cdot 10^{-4}$	$2.2690 \cdot 10^{-5}$
10	$2.0820 \cdot 10^{-4}$	$1.4678 \cdot 10^{-6}$

12. tabula Relatīvās kļūdas, ja  $a = 1$

$N$	$\delta u(\text{Iļ. GDS})$	$\delta u(\text{Iļ. GDSPS})$
5	0.0341	$5.5264 \cdot 10^{-4}$
10	0.0082	$3.7035 \cdot 10^{-5}$



5. att. Kļūdu grafiks pie  $N = 10$



6. att. Atrisinājumu grafiks pie  $N = 10$

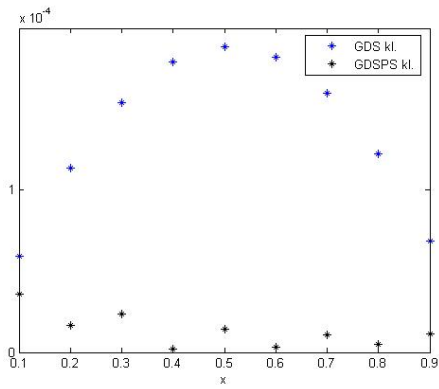
Ja  $a = 20$ , tad robežproblēmas (5.1) atrisinājums ir  $u(x) = -\frac{11}{400}x^2 + \frac{1}{60}x^3 - \frac{97e^{-20x}}{12000(e^{-20}-1)} + \frac{11x}{4000} + \frac{97}{12000(e^{-20}-1)}$  un rezultāti ir šādi:

13. tabula Absolūtās kļūdas, ja  $a = 20$

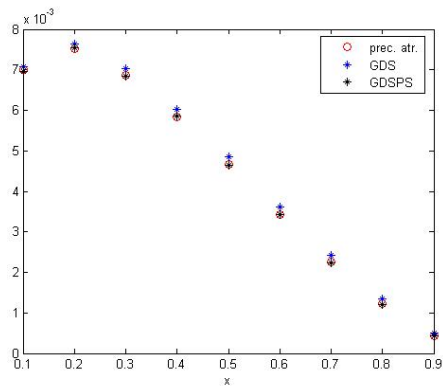
$N$	$\Delta u(\text{Iļ. GDS})$	$\Delta u(\text{Iļ. GDSPS})$
5	$5.8104 \cdot 10^{-4}$	$6.5513 \cdot 10^{-4}$
10	$1.8847 \cdot 10^{-4}$	$3.5775 \cdot 10^{-5}$

14. tabula Relatīvās kļūdas, ja  $a = 20$

$N$	$\delta u(\text{Iļ. GDS})$	$\delta u(\text{Iļ. GDSPS})$
5	0.1692	0.0871
10	0.0404	0.0051



7. att. Kļūdu grafiks pie  $N = 10$



8. att. Atrisinājumu grafiks pie  $N = 10$

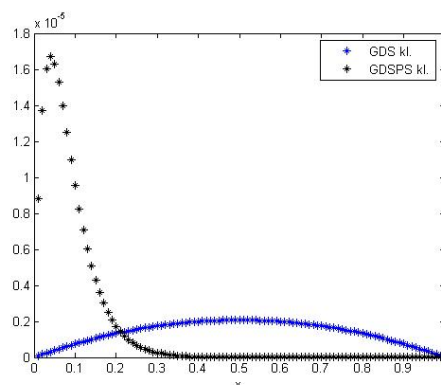
Ja  $a = 50$ , tad robežproblēmas (5.1) atrisinājums ir  $u(x) = -\frac{13}{1250}x^2 + \frac{1}{150}x^3 - \frac{311e^{-50x}}{93750(e^{-50}-1)} + \frac{13x}{31250} + \frac{311}{93750(e^{-50}-1)}$  un rezultāti ir šādi:

15. tabula Absolūtās kļūdas, ja  $a = 50$

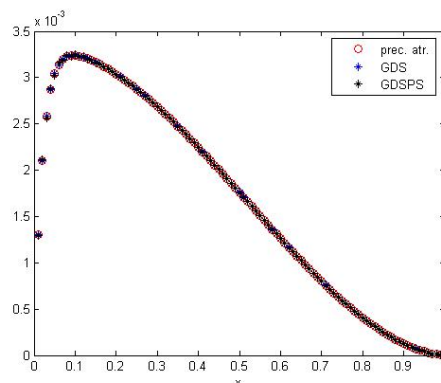
$N$	$\Delta u(\text{Iļ. GDS})$	$\Delta u(\text{Iļ. GDSPS})$
10	$1.4336 \cdot 10^{-4}$	6.3506
100	$2.0726 \cdot 10^{-6}$	$1.6695 \cdot 10^{-5}$
200	$5.2016 \cdot 10^{-7}$	$1.3392 \cdot 10^{-7}$

16. tabula Relatīvās kļūdas, ja  $a = 50$

$N$	$\delta u(\text{Iļ. GDS})$	$\delta u(\text{Iļ. GDSPS})$
10	0.0815	1960
100	0.0012	0.0065
200	$2.9577 \cdot 10^{-4}$	$5.4011 \cdot 10^{-5}$



9. att. Kļūdu grafiks pie  $N = 100$



10. att. Atrisinājumu grafiks pie  $N = 100$

Augot parametram  $a$ , aug arī relatīvā kļūda diferencu shēmai ar precīzo spektru un, lai Iļjina GDSPS būtu precīzāka par Iļjina GDS, ir nepieciešams režģis ar lielu mezglu punktu skaitu. Tas notiek tāpēc ka pie lielām parametra  $a$  vērtībām īpašfunkciju (4.5) oscilācijas amplitūda ir liela un lai Iļjina GDSPS būtu precīzākā par Iļjina GDS ir nepieciešams liels locekļu skaits rindā (5.2).

## 6. Jaukta veida problēma siltuma vadīšanas vienādojumam

Jaukta veida problēma siltuma vadīšanas vienādojumam viendimensijas gadījumā apskata formā

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), x \in (0, l), t \geq 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), x \in [0, l] \\ u|_{x=0} = g_1(t), u|_{x=l} = g_2(t), t \geq 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

kur  $f$  ( $f(0, t) = f(l, t) = 0$ ),  $u_0$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  ir dotas nepārtrauktas savu argumentu funkcijas,  $x$ -telpas un  $t$ -laika koordināte.

Problēmu (6.1) ar nehomogēniem pirmā veida robežnosacījumiem ( $g_1$  vai  $g_2 \neq 0$ ) var reducēt uz homogēnām problēmām, ja apskata starpību  $u(x, t) - U(x, t)$ , kur

$$U(x, t) = g_1(t) + \frac{x}{l}(g_2(t) - g_1(t)).$$

Līdz ar to, modificējot funkcijas  $f$  un  $u_0$ , var pieņemt, ka robežnosacījumi ir homogēni ( $g_1 = g_2 = 0$ ).

### 6.1. Nepārtrauktā problēma

Meklējot problēmas (6.1) ( $g_1 = g_2 = 0$ ) atrisinājumu rindas formā pēc diferenciāloperatora ( $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ) ortonormētām īpašfunkcijām,  $X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ar atbilstošām īpašvērtībām  $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , iegūst

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) X_k(x), \quad (6.2)$$

kur  $a_k(t)$  ir nezināmas funkcijas.

Līdz ar to robežnosacījumi ir apmierināti.

Ievietojot rindu (6.2) diferenciālvienādojumā un sākuma nosacījumos (6.1), pieņemot, ka rinda, tās atvasinātā konverģē vienmērīgi, un funkcija  $f(x, t)$  ir arī izvirzāma rindā

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x), \quad (6.3)$$

kur

$$f_k(t) = (f, X_k) \equiv \int_0^l f(x, t) X_k(x) dx, (X_k, X_m) = \delta_{k,m}.$$

Tātad iegūst Koši problēmu pirmās kārtas parastajiem diferenciālvienādojumiem:

$$\begin{cases} \dot{a}_k(t) + \lambda_k a_k(t) = f_k(t) \\ a_k(0) = (u_0, X_k), \end{cases} \quad (6.4)$$

kur  $\dot{a}_k(t) = \frac{da_k(t)}{dt}$ . Problēmas (6.4) atrisinājums ir formā

$$a_k(t) = a_k(0)e^{-\lambda_k t} + \int_0^t f_k(\xi)e^{-\lambda_k(t-\xi)} d\xi. \quad (6.5)$$

## 6.2. Taišņu shēma

Ar taišņu shēmas (metodes) palīdzību tiek samazināta uzdevuma dimensija, reducējot robežproblēmu siltuma vadīšanas vienādojumam uz attiecīgām robežproblēmām parasto diferenciālvienādojumu sistēmām. Taišņu metodē atšķirībā no režģu metodes ar diferenciālvienādojumu sistēmām tiek aizstāti atvasinājumi pēc viena mainīgā (vienā virzienā).

Izvēlas taisnes paralēlas koordinātu  $Ot$  asij: diskritizējot mainīgo  $x$ , to aizstāj ar režģa  $\bar{\omega}_h$  punktiem  $x_j$ , kuros aproksimē atvasinājumu  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  ar otrās kārtas centrālo diferenci  $(\Lambda y_j)$  (otrās kārtas aproksimācija), kur  $y_j(t)$  ir tuvinātā atrisinājuma vērtība laika momentā  $t$ . Tā iegūst  $N - 1$  pirmās kārtas parasto diferenciālvienādojumu sistēmu, kura definēta uz taišņu saimes  $x = jh, j = \bar{0}, \bar{N}$ . Šo sistēmu īsāk var pierakstīt kā diferencū-diferenciālvienādojumu sākuma vērtību (Koši) problēmu

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \Lambda y + f(x, t), x \in \omega_h, t \geq 0 \\ y|_{t=0} = u_0(x), x \in \bar{\omega}_h \\ y|_{x=0} = y|_{x=l} = 0, t \geq 0, \end{cases} \quad (6.6)$$

kur  $y = y(x, t)$ ,  $x \in \bar{\omega}_h$ ,  $t \geq 0$ .

Šie robežnosacījumi ir homogēni, jo nehomogēnos robežnosacījumus funkcijas  $g_1, g_2$  var pievienot labās puses funkcijai  $f(x, t)$ , modificējot tās formā

$$\tilde{f}(jh, t) = \begin{cases} f(h, t) + \frac{g_1(t)}{h^2}, j = 1 \\ f(jh, t), j = \overline{2, N-2} \\ f((N-1)h, t) + \frac{g_2(t)}{h^2}, j = N-1. \end{cases}$$

Atrisinot problēmu (6.6) analītiski, meklē  $y$  kā lineāru kombināciju no diferenču operatora  $(-\Lambda y \equiv -y_{x\bar{x}})$  ortonormētām īpašfunkcijām formā

$$y^{(k)}(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), x = jh \in \omega_h \quad (6.7)$$

ar īpašvērtībām

$$\mu_k = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2l}\right), k = \overline{1, N-1}. \quad (6.8)$$

Tātad

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{N-1} a_k(t) y^{(k)}(x) \quad (6.9)$$

un, pieņemot, ka

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k(t) y^{(k)}(x),$$

kur

$$f_k(t) = (f, y^{(k)}) \equiv h \sum_{j=1}^{N-1} f(jh, t) y^{(k)}(jh),$$

$$(y^{(k)}, y^{(m)}) = \delta_{k,m},$$

iegūst analogi (6.4) Koši problēmu pirmās kārtas parastajiem diferenciālvienādojumiem:

$$\begin{cases} \dot{a}_k(t) + \mu_k a_k(t) = f_k(t) \\ a_k(0) = (u_0, y^{(k)}) \end{cases} \quad (6.10)$$

kuras atrisinājums ir formā (6.5), aizvietojojot  $\lambda_k$  ar  $\mu_k$ .

Taišņu metodi (6.6) var pierakstīt kā Koši problēmu parasto diferenciālvienādojumu sistēmu vektoru-matricu formā

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} + AY = F(t), t \geq 0 \\ Y(0) = U_0, \end{cases}$$

kur

$$Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_{N-1}(t))^T,$$

$$F(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_{N-1}(t))^T,$$

$$U_0 = (u_0(h), u_0(2h), \dots, u_0((N-1)h))^T$$

ir  $(N-1)$ -ās kārtas vektori-kolonnas,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ir trīsdiaigonālmatrixa.

Tā kā matricas  $A$  īpašvērtības ir  $\mu_k$ ,  $k = \overline{1, N-1}$ , bet atbilstošie īpašvektori kolonnas

$$W^{(k)} = (w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \dots, w_{N-1}^{(k)})^T, k = \overline{1, N-1}$$

$$w_j^{(k)} = \sqrt{h}y^{(k)}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{\pi j k}{N}\right), j = \overline{1, N-1},$$

tad, sakārtojot šos īpašvektorus  $W^{(k)}$  simetriskas matricas  $W$   $k$ -tās kolonnās un īpašvērtības  $\mu_k$  diagonālmaticā  $D$ , iegūst matricu vienādojumu  $AW = WD$  vai  $A = WDW^{-1}$ . Ortonormētības dēļ  $W^2 = WW = E$ , t.i.  $W^{-1} = W$ . Tādējādi Koši problēmu var pierakstīt formā

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} + WDW^{-1}Y = F(t), t \geq 0 \\ Y(0) = U_0. \end{cases} \quad (6.11)$$

Ja apskata režģa vektorfunkciju  $\tilde{Y} = W^{-1}Y$ , tad, reizinot vienādojumu (6.11) no kreisās puses ar matricu  $W^{-1}$ , iegūst Koši problēmu

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{Y}}{dt} + D\tilde{Y} = \tilde{F}(t), t \geq 0 \\ \tilde{Y}(0) = W^{-1}Y(0) = P^{-1}U_0, \end{cases}$$

kur  $\tilde{F} = W^{-1}F$ .

Šī vektorsistēma sadalās atsevišķos skalāros vienādojumos, kurus atrisinot, iegūst vektora  $\tilde{Y}$  komponentes

$$\tilde{y}_k(t) = \tilde{y}_k(0)e^{-\mu_k t} + \int_0^t \tilde{f}_k(\xi)e^{-\mu_k(t-\xi)} d\xi, k = \overline{1, N-1}.$$

Tā kā

$$a_k(t) = \sqrt{h} \tilde{y}_k(t), y = py,$$
$$y_j(t) = \sum_{k=1}^{N-1} w_j^{(k)} \tilde{y}_j(t) = \sum_{k=1}^{N-1} y^{(k)}(x_j) a_k(t),$$

t.i., iegūst atrisinājumu formā (6.9).

## 7. Taišņu shēma ar precīzo spektru siltuma vadīšanas vienādojumam

Konstruējot taišņu shēmu ar precīzo spektru problēmā (6.11), diagonālmtricā  $D$  sakārto nepārtrauktā operatora  $-L \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  pirmās  $N - 1$  īpašvērtības  $\lambda_k = (\frac{k\pi}{l})^2$  vai formulā (6.10) īpašvērtības  $\mu_k$  aizvieto ar  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{1, N - 1}$ . Risinot (6.11) analītiski, kā iepriekš iegūst atrisinājumu Furjē rindas (6.2) nogriežņa

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{a}_k(t) y^{(k)}(x), x \in \omega_h \quad (7.1)$$

formā, kur koeficienti  $\tilde{a}_k(t)$  ir

$$\tilde{a}_k(t) = \tilde{a}_k(0) e^{-\lambda_k t} + \int_0^t \tilde{f}_k(\xi) e^{-\lambda_k(t-\xi)} d\xi, \quad (7.2)$$

bet skalārie reizinājumi  $\tilde{a}_k(0) = (u_0, y^{(k)})$ ,  $\tilde{f}_k(t) = (f, y^{(k)})$  ir diskrētā formā.

Viss augstāk minētais ļauj formulēt šādu teorēmu:

**Teorēma 13.** Ja  $f(x, t) = \sum_{i=1}^{M_1} b_i(t) X_i(x)$  un  $u_0(x) = \sum_{i=1}^{M_2} B_i X_i(x)$ , kur  $\max\{M_1, M_2\} \leq N - 1$ ,  $B_i \in \mathbb{R}$ ,  $b_i(t)$  ir integrējamās funkcijas un  $X_i(x)$  ir problēmas (1.11) īpašfunkcijas, tad shēma (7.1) ir precīza.

**Pierādījums.** Tā kā problēmas (1.11) īpašfunkcijas  $X_i(x)$ ,  $x \in [0, l]$  un problēmas (1.20) īpašvektori  $y^{(i)}(x)$ ,  $x \in \omega_h$  sakrīt mezglu punktos, no ortonormētības nosacījuma izriet, ka

$$a_k(0) = \left( \sum_{i=1}^{M_2} B_i X_i(x), X_k(x) \right) = B_k, k \leq M_2$$

un  $a_k(0) = 0$ ,  $k > M_2$ ,

$$\tilde{a}_k(0) = \left( \sum_{i=1}^{M_2} B_i X_i(x), y^{(k)}(x) \right) = B_k, k \leq M_2$$

un  $\tilde{a}_k(0) = 0$ ,  $k = \overline{M_2 + 1, N - 1}$ , ja  $M_2 \neq N - 1$ ,

$$f_k(t) = \left( \sum_{i=1}^{M_1} b_i(t) X_i(x), X_k(x) \right) = b_k(t), k \leq M_1$$

un  $f_k(t) = 0, k > M_1,$

$$\tilde{f}_k(t) = \left( \sum_{i=1}^{M_1} b_i(t) X_i(x), y^{(k)}(x) \right) = b_k(t), k \leq M_1$$

un  $\tilde{f}_k(t) = 0, k = \overline{M_1 + 1, N - 1}$ , ja  $M_1 \neq N - 1$ .

Savukārt, no tā izriet, ka funkcijas  $a_k(t)$  un  $\tilde{a}_k(t)$  sakrīt visiem  $k = \overline{1, N - 1}$  un visiem  $k > N - 1$   $a_k(t) = 0$ . Tas nozīme, ka atrisinājuma izvirkzījums bezgalīgā Furjē rindā (6.3) sakrīt mezglu punktos ar atrisinājuma izvirkzījumu galīgā Furjē rindā (7.1).

### Piemērs 7. Problēma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sqrt{2}e^{-\pi t} \sin(\pi x), x \in [0, 1] \\ u|_{t=0} = \sqrt{2} \sin(\pi x) + \sqrt{2} \sin(4\pi x), \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = 0, t \in [0, 1] \end{cases} \quad (7.3)$$

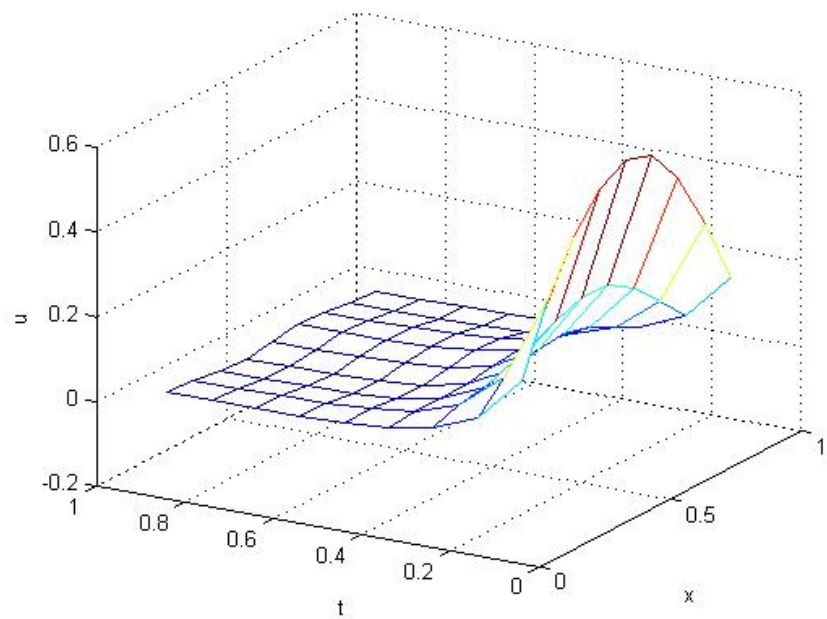
apmierina teorēmas (12) nosacījumus, ja  $N \geq 4$ , līdz ar to var secināt, ka shēma (7.1) šai problēmai ir precīza. To var viegli pārbaudīt ar MATLAB programmu.

Problēmas (7.3) precīzais atrisinājums ir

$$u(x, t) = (e^{-\pi^2 t} + te^{-\pi^2 t}) \sqrt{2} \sin(\pi x) + \frac{16\pi^2 - 1 + e^{-16\pi^2 t}}{(16\pi^2)^2} \sqrt{2} \sin(4\pi x) + e^{-16\pi^2 t} \sqrt{2} \sin(4\pi x).$$

17. tabula Absolūtās kļūdas

$N$	$\Delta u(\text{GDS})$	$\Delta u(\text{GDSPS})$
5	0.0124	$8.3267 \cdot 10^{-17}$
10	0.0043	$1.1102 \cdot 10^{-16}$



11. att. Problēmas (7.3) atrisinājuma grafiks

## 8. Jaukta veida problēma stīgas svārstību vienādojumam

Jaukta veida problēma stīgas svārstību vienādojumam ir formā

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), x \in (0, l), t \geq 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), x \in [0, l] \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_{t=0} = \tilde{u}_0(x), x \in [0, l] \\ u|_{x=0} = g_1(t), u|_{x=l} = g_2(t), t \geq 0, \end{cases} \quad (8.1)$$

kur  $f$  ( $f(0, t) = f(l, t) = 0$ ),  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  ir dotas nepārtrauktas savu argumentu funkcijas.

Problēmu (8.1) tāpat, ka problēmu (6.1) ar nehomogēniem pirmā veida robežnosacījumiem ( $g_1$  vai  $g_2 \neq 0$ ) var reducēt uz homogēnām problēmām līdzīgi, ja apskata starpību  $u(x, t) - U(x, t)$ , kur

$$U(x, t) = g_1(t) + \frac{x}{l}(g_2(t) - g_1(t)).$$

Līdz ar to, modificējot funkcijas  $f$  un  $u_0$ , var pieņemt, ka robežnosacījumi ir homogēni ( $g_1 = g_2 = 0$ ).

### 8.1. Nepārtrauktā problēma

Meklējot problēmas (8.1) ( $g_1 = g_2 = 0$ ) atrisinājumu rindas formā pēc diferenciāloperatora ( $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ) ortonormētām īpašfunkcijām,  $X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ar atbilstošām īpašvērtībām  $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , iegūst analogi (6.3)

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) X_k(x), \quad (8.2)$$

un no Košī problēmas

$$\begin{cases} \ddot{a}_k(t) + \lambda_k a_k(t) = f_k(t) \\ a_k(0) = (u_0, X_k), \dot{a}_k = (\tilde{u}_0, X_k), \end{cases} \quad (8.3)$$

kur analogi (6.4)

$$f_k(t) = (f, X_k) \equiv \int_0^l f(x, t) X_k(x) dx.$$

Šīs problēmas atrisinājums ir

$$a_k(t) = a_k(0) \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{\dot{a}_k(0)}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t f_k(\xi) \sin(\sqrt{\lambda_k}(t - \xi)) d\xi. \quad (8.4)$$

## 8.2. Taišņu shēma

Ja taisnes ir paralēlas laika asij, tad, aizstājot nepārtraukto mainīgo  $x$  ar diskrēto  $x_j$  no režģa  $\omega_h$  un aproksimējot atvasinājumu  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  ar otrās kārtas centrālo diferenci  $-\Lambda y \equiv -y_{x\bar{x}}$ , iegūst laika  $t$  Košī problēmu  $N - 1$  otrās kārtas parasto diferenciālvienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} = \Lambda y + f(x, t), x \in \omega_h, t \geq 0 \\ y|_{t=0} = u_0(x), \frac{dy}{dt}|_{t=0} = \tilde{u}_0(x), x \in \bar{\omega}_h \\ y|_{x=0} = y|_{x=l} = 0, t \geq 0, \end{cases} \quad (8.5)$$

kur  $y = y(x, t)$ ,  $x \in \bar{\omega}_h$ ,  $t \geq 0$ .

Šeit robežnosacījumi ir homogēni. Nehomogēnos robežnosacījumus analogi (6.6) var pievienot labās puses funkcijai  $f(x, t)$ ,  $x \in \bar{\omega}_h$ .

Meklējot atrisinājumu (8.5) kā lineāru kombināciju (6.9).

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{N-1} a_k(t) y^{(k)}(x), x \in \bar{\omega}_h, \quad (8.6)$$

kur funkcijas  $a_k(t)$  ir Košī problēmas

$$\begin{cases} \ddot{a}_k(t) + \mu_k a_k(t) = f_k(t) \\ a_k(0) = (u_0, X_k), \dot{a}_k = (\tilde{u}_0, X_k), \end{cases} \quad (8.7)$$

atrisinājums ar

$$\begin{aligned} f_k(t) &= (f, y^{(k)}) \equiv h \sum_{i=1}^{N-1} f(ih, t) y^{(k)}(ih), \\ a_k(0) &= (u_0, y^{(k)}), \dot{a}_k(0) = (\tilde{u}_0, y^{(k)}), \\ \mu_k &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \left( \frac{k\pi h}{2l} \right). \end{aligned}$$

Iegūst atrisinājumu  $a_k(t)$  formā (8.4), kur  $\lambda_k$  vietā ir  $\mu_k$ .

Taišņu metodi (8.5) var pārrakstīt kā Košī problēmu parasto diferenciālvienādojumu sistēmu vektoru-matricu formā

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} + AY = F(t), t \geq 0 \\ Y(0) = U_0 \\ \tilde{Y}(0) = \tilde{U}(0), \end{cases}$$

kur

$$\begin{aligned} Y(t) &= (y_1(t), y_2(t), \dots, y_{N-1}(t))^T, \\ F(t) &= (f_1(t), f_2(t), \dots, f_{N-1}(t))^T, \\ U_0 &= (u_0(h), u_0(2h), \dots, u_0((N-1)h))^T \\ \tilde{U}_0 &= (\tilde{u}_0(h), \tilde{u}_0(2h), \dots, \tilde{u}_0((N-1)h))^T \end{aligned}$$

ir  $(N-1)$ -ās kārtas vektori-kolonnas,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ir trīsdiagonālmatrixa.

Tā kā matricas  $A$  īpašvērtības ir  $\mu_k$ ,  $k = \overline{1, N-1}$ , bet atbilstošie īpašvektori kolonnas

$$W^{(k)} = (w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \dots, w_{N-1}^{(k)})^T, k = \overline{1, N-1}$$

$$w_j^{(k)} = \sqrt{h} y^{(k)}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{\pi j k}{N}\right), j = \overline{1, N-1},$$

tad, sakārtojot šos īpašvektorus  $W^{(k)}$  simetriskas matricas  $W$   $k$ -tās kolonnās un īpašvērtības  $\mu_k$  diagonālmaticā  $D$ , iegūstam matricu vienādojumu  $AW = WD$  vai  $A = WDW^{-1}$ . Ortonormētības dēļ  $W^2 = WW = E$ , t.i.  $W^{-1} = W$ . Tādējādi Košī problēmu var pierakstīt formā

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} + WDW^{-1}Y = F(t), t \geq 0 \\ Y(0) = U_0 \\ \tilde{Y}(0) = \tilde{U}(0), \end{cases} \quad (8.8)$$

kur atrisinājums ir formā (8.6).

## 9. Taišņu shēma ar precīzo spektru stīgas svārstību vienādojumam

Konstruējot taišņu shēmu ar precīzo spektru problēmā (8.8), diagonālmtrīcā  $D$  sakārto nepārtrauktā operatora  $-L \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  pirmās  $N - 1$  īpašvērtības  $\lambda_k = (\frac{k\pi}{l})^2$  vai formulā (8.7) īpašvērtības  $\mu_k$  aizvieto ar  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{1, N - 1}$ . Tad diferencu operatora matricai  $PDP^{-1}$  vairs nav trīsdiagonālforma, bet tā ir pilna  $(N - 1)$ -ās kārtas matrica. Risinot (8.8) analītiski, kā iepriekš iegūst atrisinājumu Furjē rindas (8.2) nogriežņa

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{a}_k(t) y^{(k)}(x), x \in \omega_h \quad (9.1)$$

formā, kur koeficienti  $\tilde{a}_k(t)$  ir

$$\tilde{a}_k(t) = \tilde{a}_k(0) \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{\dot{\tilde{a}}_k(0)}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t \tilde{f}_k(\xi) \sin(\sqrt{\lambda_k}(t - \xi)) d\xi, \quad (9.2)$$

bet skalārie reizinājumi  $\tilde{a}_k(0) = (u_0, y^{(k)})$ ,  $\dot{\tilde{a}}_k(0) = (\tilde{u}_0, y^{(k)})$ ,  $\tilde{f}_k(t) = (f, y^{(k)})$  ir diskrētā formā.

Tagad var noformulēt precīzas shēmas teorēmu stīgas svārstību vienādojumam.

**Teorēma 14.** Ja  $f(x, t) = \sum_{i=1}^{M_1} b_i(t) X_i(x)$ ,  $u_0(x) = \sum_{i=1}^{M_2} B_i X_i(x)$  un  $\tilde{u}_0(x) = \sum_{i=1}^{M_3} \tilde{B}_i X_i(x)$ , kur  $\max\{M_1, M_2, M_3\} \leq N - 1$ ,  $B_i, \tilde{B}_i \in \mathbb{R}$ ,  $b_i(t)$  ir integrējamas funkcijas un  $X_i(x)$ , ir problēmas (1.11) īpašfunkcijas, tad shēma (9.1) ir precīza.

**Pierādījums.** Tā kā problēmas (1.11) īpašfunkcijas  $X_i(x)$ ,  $x \in [0, l]$  un problēmas (1.20) īpašvektori  $y^{(i)}(x)$ ,  $x \in \omega_h$  sakrīt mezglu punktos, no ortonormētības nosacījuma izriet, ka

$$a_k(0) = \left( \sum_{i=1}^{M_2} B_i X_i(x), X_k(x) \right) = B_k, k \leq M_2$$

un  $a_k(0) = 0$ ,  $k > M_2$ ,

$$\tilde{a}_k(0) = \left( \sum_{i=1}^{M_2} B_i X_i(x), y^{(k)}(x) \right) = B_k, k \leq M_2$$

un  $\tilde{a}_k(0) = 0$ ,  $k = \overline{M_2 + 1, N - 1}$ , ja  $M_2 \neq N - 1$ ,

$$\dot{a}_k(0) = \left( \sum_{i=1}^{M_3} \tilde{B}_i X_i(x), X_k(x) \right) = \tilde{B}_k, k \leq M_2$$

un  $\dot{a}_k(0) = 0, k > M_3,$

$$\dot{\tilde{a}}_k(0) = \left( \sum_{i=1}^{M_3} \tilde{B}_i X_i(x), y^{(k)}(x) \right) = \tilde{B}_k, k \leq M_2$$

un  $\dot{\tilde{a}}_k(0) = 0, k = \overline{M_3 + 1, N - 1},$  ja  $M_3 \neq N - 1,$

$$f_k(t) = \left( \sum_{i=1}^{M_1} b_i(t) X_i(x), X_k(x) \right) = b_k(t), k \leq M_1$$

un  $f_k(t) = 0, k > M_1,$

$$\tilde{f}_k(t) = \left( \sum_{i=1}^{M_1} b_i(t) X_i(x), y^{(k)}(x) \right) = b_k(t), k \leq M_1$$

un  $\tilde{f}_k(t) = 0, k = \overline{M_1 + 1, N - 1},$  ja  $M_1 \neq N - 1.$

Savukārt, no tā izriet, ka funkcijas  $a_k(t)$  un  $\tilde{a}_k(t)$  sakrīt visiem  $k = \overline{1, N - 1}$  un visiem  $k > N - 1$   $a_k(t) = 0.$  Tas nozīmē, ka atrisinājuma izvirzījums bezgalīgā Furjē rindā (8.2) sakrīt mezglu punktos ar atrisinājuma izvirzījumu galīgā Furjē rindā (9.1).

**Piemērs 8.** Problēma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x \in [0, 1] \\ u|_{t=0} = \sqrt{2} \sin(\pi x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sqrt{2} \sin(2\pi x) \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = 0, t \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (9.3)$$

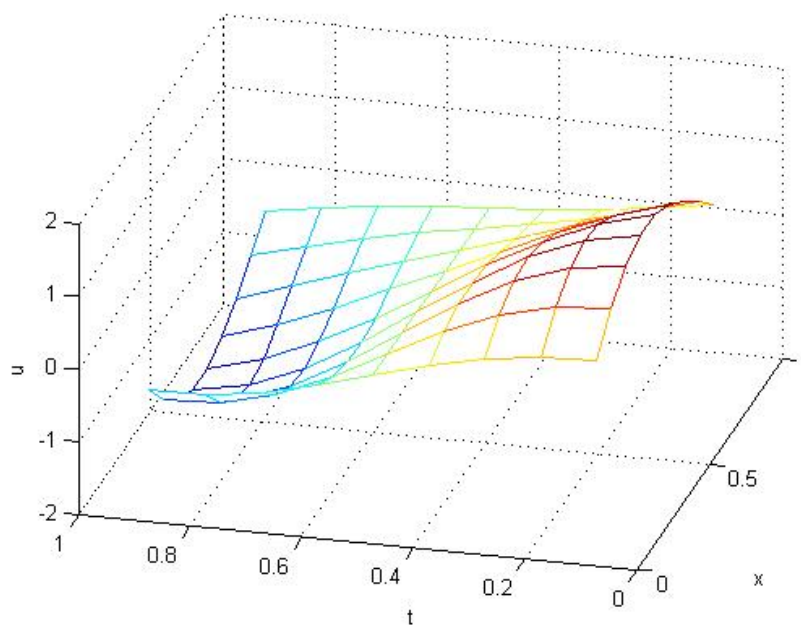
apmierina teorēmas (13) nosacījumus, ja  $N \geq 2,$  līdz ar to var secināt, ka shēma (9.1) šai problēmai ir precīza. To var viegli pārbaudīt ar MATLAB programmu.

Problēmas (9.3) precīzais atrisinājums ir

$$u(x, t) = \sqrt{2} \cos(\pi t) \sin(\pi x) + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sin(2\pi t) \sin(2\pi x).$$

18. tabula Absolūtās kļūdas

$N$	$\Delta u(\text{GDS})$	$\Delta u(\text{GDSPS})$
5	0.0644	$6.6613 \cdot 10^{-16}$
10	0.0220	$6.6613 \cdot 10^{-16}$



12. att. Problēmas (9.3) atrisinājuma grafiks.

# Nobeigums

Bakalaura darba mērķis bija salīdzināt diferencu shēmas ar precīzo spektru ar citām diferencu shēmām parastajiem un parciāliem diferenciālvienādojumiem. Lai to izdarītu, sākotnēji tika aprakstīts, kā otrās kārtas diferenciālvienādojuma atrisinājumu var izvirzīt bezgalīgā un galīgā Furjē rindā, izmantojot attiecīgas problēmas īpašvērtības un īpašfunkcijas. Tika definētas galīgo diferencu shēmas otrās kārtas lineāriem diferenciālvienādojumiem ar pirmā veida robežnosacījumiem, kā arī taisņu metodes ar precīzo spektru siltuma vadīšanas un stīgas svārstību vienādojumiem.

Veicot eksperimentus vienādojumiem formā  $-u''(x) = f(x)$  ar MATLAB programmas palīdzību, izmantojot GDSPS, tika iegūti precīzākie rezultāti, nekā izmantojot GDS. Rezultāti vienādojumiem formā  $-u''(x) - bu(x) = f(x)$ , kuri tika iegūti ar GDSPS.

Vienādojumiem formā  $-u''(x) - bu(x) = f(x)$  GDSPS dod precīzākus rezultātus nekā GDS vai Bahvalova GDS. Vienādojumiem formā  $-u''(x) - au'(x) = f(x)$  GDSPS dot precīzākus rezultātus nekā Iljina GDS pie mazām parametra  $a$  vērtībām. Pie lielām parametra  $a$  vērtībām, lai GDSPS būtu precīzāka par Iljina GDS, ir nepieciešams liels režģa punktu skaits.

Parciāliem diferenciālvienādojumiem, proti, siltuma vadīšanas un stīgas svārstību vienādojumam tika pierādītas divas teorēmas par precīzo spektru. Ar MATLAB programmas palīdzību teorēmas tika pārbaudītas.

Visos piemēros tika apskatītas tikai gludas funkcijas  $f(x)$  un gandrīz visos gadījumos GDSPS dod daudz labākus rezultātus nekā parastā vai speciālās GDS; attīstot šo teoriju var apskatīt ne tikai gludas, bet arī pārtrauktas funkcijas.

Lai gan šajā darbā tika konstruētas GDSPS vienādojumiem tikai ar pirmā veida robežnosacījumiem, šo pašu shēmu ir iespējams konstruēt vienādojumiem ar otrā un trešā veida robežnosacījumiem.

# Izmantotā literatūra un avoti

- [1] H. Kalis. *Skaitliskās metodes ar datorprogrammu MAPLE, MATHEMATICA lietošanai*. LU, Rīga, 2001.
- [2] Самарский. А.А. *Теория разностных схем*. Наука, Москва, 1977.
- [3] I.P. Gavrilyuk V.L. Makarov. On constructing the best net circuits with the exact spectrum. *Dopov. Akad. Nauk Ukr. RSR*, pages 1077–1080, 1975.
- [4] Кобельков Г.М. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П. *Численные методы*. Наука, Москва, 2003.
- [5] Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. *Математические заметки*, 6:237–248, 1969.

# 1. M-faili

```
function PDS1veid4(N)
N1=N+1;N2=N-1; L=1;x=linspace(0,L,N1)';x=x(2:N);h=L/N;
B1=zeros(N2,N2);
B1=B1+2*diag(ones(N2,1))-diag(ones(N2-1,1),-1)-diag(ones(N2-1,1),1);
B1=B1/(h^2);
F=sin(pi*x);
prec=1/(pi^2)*sin(pi*x);
u=B1\F;
lk=4/(h^2)*(sin(0.5*(1:N2)'*h*pi/L)).^2;
CK1=sqrt(2*h/L);
lk0=((1:N2)'*pi/L).^2;
W=sin(pi*(1:N2)'*x'/L)';
for j=1:N2
W(:,j)=W(:,j).*CK1;end;
%W'*W,A2=W*diag(lk)*W' % control
%U=W*diag(lk.^(-1))*W'*F; %FDS
U=W*diag(lk0.^(-1))*W'*F; %FDSES
figure,plot(x,prec,'ro',x,u,'b*',x,U,'k*')
legend('prec. atr.', 'GDS', 'GDSPS')
xlabel('x')
kMat=(abs(u-prec))
kMat1=max(abs(u-prec))
kU=abs(U-prec);
kU1=max(abs(U-prec))
norm(kU);
figure,plot(x,kMat,'b*',x,kU,'k*')
legend('GDS kl.', 'GDSPS kl.')
xlabel('x')
dd=abs(u(1)-prec(1));
hh=abs(u(1)-prec(1))/prec(1);
ddd=abs(U(1)-prec(1));
```

```

hhh=abs(U(1)-prec(1))/prec(1);
for j=2:N2
if (dd<abs(u(j)-prec(j))) dd=abs(u(j)-prec(j));
hh=abs(u(j)-prec(j))/prec(j);
if (ddd<abs(U(j)-prec(j))) ddd=abs(U(j)-prec(j))/abs(prec(j));
hhh=abs(U(j)-prec(j))/prec(j);
end
end
end
hh
hhh

```

```

function PDS1veid5(N)
N1=N+1;N2=N-1; L=1;x=linspace(0,L,N1)';x=x(2:N);h=L/N;
B1=zeros(N2,N2);
B1=B1+2*diag(ones(N2,1))-diag(ones(N2-1,1),-1)-diag(ones(N2-1,1),1);
B1=B1/(h^2);
F=x.*(x-1);
prec=-1/12*x.^4+1/6*x.^3-1/12*x;
u=B1\F;
lk=4/(h^2)*(sin(0.5*(1:N2)'*h*pi/L)).^2;
CK1=sqrt(2*h/L);
lk0=((1:N2)'*pi/L).^2;
W=sin(pi*(1:N2)'*x'/L)';
for j=1:N2
W(:,j)=W(:,j).*CK1;end;
%W'*W,A2=W*diag(lk)*W' % control
%U=W*diag(lk.^(-1))*W'*F; %FDS
U=W*diag(lk0.^(-1))*W'*F; %FDSES
figure,plot(x,prec,'ro',x,u,'b*',x,U,'k*')

```

```

legend('prec. atr.', 'GDS', 'GDSPS')
xlabel('x')
kMat=(abs(u-prec))
kMat1=max(abs(u-prec))
kU=abs(U-prec);
kU1=max(abs(U-prec))
norm(kU);
figure,plot(x,kMat,'b*',x,kU,'k*')
legend('GDS kl. ', 'GDSPS kl. ')
xlabel('x')
dd=abs(u(1)-prec(1));
hh=abs(u(1)-prec(1))/prec(1);
ddd=abs(U(1)-prec(1));
hhh=abs(U(1)-prec(1))/prec(1);
for j=2:N2
if (dd<abs(u(j)-prec(j))) dd=abs(u(j)-prec(j));
hh=abs(u(j)-prec(j))/prec(j);
if (ddd<abs(U(j)-prec(j))) ddd=abs(U(j)-prec(j))/abs(prec(j));
hhh=abs(U(j)-prec(j))/prec(j);
end
end
end
hh
hhh

```

```

function PDS3veid1(N)
N1=N+1;N2=N-1; L=1;x=linspace(0,L,N1)';x=x(2:N);
h=L/N;a=50;a1=sqrt(a)*h/2;g=(a1/sin(a1))^2;
B1=zeros(N2,N2);

```

```

B2=zeros(N2,N2);
B1=B1+2*(g-(a*h^2)/2)*diag(ones(N2,1))-...
-g*diag(ones(N2-1,1),-1)-g*diag(ones(N2-1,1),1);
B2=B2+2*(1-(a*h^2)/2)*diag(ones(N2,1))-...-
diag(ones(N2-1,1),-1)-diag(ones(N2-1,1),1);
B1=B1/(h^2);
B2=B2/(h^2);
F=10*sin(3*pi*x);
prec=10*sin(3*pi*x)/(-50+9*pi^2);
u=B1\F;
uu=B2\F;
lk=4/(h^2)*(sin(0.5*(1:N2)*h*pi/L)).^2-a;
CK1=sqrt(2*h/L);
lk0=((1:N2)*pi/L).^2-a;
W=sin(pi*(1:N2)*x/L)';
for j=1:N2
W(:,j)=W(:,j).*CK1;end;
%W'*W,A2=W*diag(lk)*W' % control
%U=W*diag(lk.^(-1))*W'*F; %FDS
U=W*diag(lk0.^(-1))*W'*F; %FDSES
figure,plot(x,prec,'ro',x,u,'g*',x,U,'k*',x,uu,'b*')
legend('prec. atr.', 'Bah. GDS', 'GDSPS', 'GDS' )
xlabel('x')
kMat=(abs(u-prec));
kMat1=max(abs(u-prec))
kU=abs(U-prec);
kU1=max(abs(U-prec))
kMat2=(abs(uu-prec));
kMat22=max(abs(uu-prec))
figure,plot(x,kMat,'g*',x,kU,'k*',x,kMat2,'b*')
legend('Bah GDS kl. ', 'GDSPS kl. ', 'GDS kl. ')
xlabel('x')

```

```

dd=abs(u(1)-prec(1));
hh=abs(u(1)-prec(1))/prec(1);
ddd=abs(U(1)-prec(1));
hhh=abs(U(1)-prec(1))/prec(1);
dddd=abs(uu(1)-prec(1));
hhhh=abs(uu(1)-prec(1))/prec(1);
for j=2:N2
if (dd<abs(u(j)-prec(j))) dd=abs(u(j)-prec(j));
hh=abs(u(j)-prec(j))/prec(j);
if (ddd<abs(U(j)-prec(j))) ddd=abs(U(j)-prec(j))/abs(prec(j));
hhh=abs(U(j)-prec(j))/prec(j);
if (dddd<abs(uu(j)-prec(j))) dddd=abs(uu(j)-prec(j))/abs(prec(j));
hhhh=abs(uu(j)-prec(j))/prec(j);
end
end
end
end
hh
hhh
hhhh

```

```

function PDS3veid(N)
N1=N+1;N2=N-1; L=1;x=linspace(0,L,N1)';x=x(2:N);
h=L/N;a=100;a1=sqrt(a)*h/2;g=(a1/sin(a1))^2;
B1=zeros(N2,N2);
B2=zeros(N2,N2);
B1=B1+2*(g-(a*h^2)/2)*diag(ones(N2,1))-g*diag(ones(N2-1,1),-1)-...
g*diag(ones(N2-1,1),1);
B2=B2+2*(1-(a*h^2)/2)*diag(ones(N2,1))-diag(ones(N2-1,1),-1)-...
(ones(N2-1,1),1);

```

```

B1=B1/(h^2);
B2=B2/(h^2);
F=x.*(x-1).*exp(x);
prec=-4/1030301*sin(10*x)*(2*cos(10)+99*exp(1))/sin(10)+...
8/1030301*cos(10*x)-1/1030301*(8-10605*x+10201*x.^2).*exp(x);
u=B1\F;
uu=B2\F;
lk=4/(h^2)*(sin(0.5*(1:N2)'*h*pi/L)).^2-a;
CK1=sqrt(2*h/L);
lk0=((1:N2)'*pi/L).^2-a;
W=sin(pi*(1:N2)'*x'/L)';
for j=1:N2
W(:,j)=W(:,j).*CK1;end;
%W'*W,A2=W*diag(lk)*W' % control
%U=W*diag(lk.^(-1))*W'*F; %FDS
U=W*diag(lk0.^(-1))*W'*F; %FDSES
figure,plot(x,prec,'ro',x,u,'g*',x,U,'k*',x,uu,'b*')
legend('prec. atr.', 'Bah. GDS', 'GDSPS', 'GDS' )
xlabel('x')
kMat=(abs(u-prec));
kMat1=max(abs(u-prec))
kU=abs(U-prec);
kU1=max(abs(U-prec))
kMat2=(abs(uu-prec));
kMat22=max(abs(uu-prec))
figure,plot(x,kMat,'g*',x,kU,'k*',x,kMat2,'b*')
legend('Bah GDS kl. ', 'GDSPS kl. ', 'GDS kl. ')
xlabel('x')
dd=abs(u(1)-prec(1));
hh=abs(u(1)-prec(1))/prec(1);
ddd=abs(U(1)-prec(1));
hhh=abs(U(1)-prec(1))/prec(1);

```

```

dddd=abs(uu(1)-prec(1));
hhhh=abs(uu(1)-prec(1))/prec(1);
for j=2:N2
if (dd<abs(u(j)-prec(j))) dd=abs(u(j)-prec(j));
hh=abs(u(j)-prec(j))/prec(j);
if (ddd<abs(U(j)-prec(j))) ddd=abs(U(j)-prec(j))/abs(prec(j));
hhh=abs(U(j)-prec(j))/prec(j);
if (dddd<abs(uu(j)-prec(j))) dddd=abs(uu(j)-prec(j))/abs(prec(j));
hhhh=abs(uu(j)-prec(j))/prec(j);
end
end
end
end
hh
hhh
hhhh

```

```

function PDS5veid(N)
N1=N+1;N2=N-1; L=1;a=5;x=linspace(0,L,N1)';
x=x(2:N);h=L/N;a1=a*h/2;
g=a1*coth(a1);% Iljina FDS
B1=zeros(N2,N2);
B1=B1+2*g*diag(ones(N2,1))-(g-a1)*diag(ones(N2-1,1),-1)-...
-(g+a1)*diag(ones(N2-1,1),1);
B1=B1/(h^2);% 3-diag. matr.$
F=exp(-5*x/2).*sin(3*pi*x);
prec=20*exp(-5/2*x).*sin(3*pi*x)/(125+180*pi^2);
u=B1\F;
lk0=(pi/L*[1:N2]')^2+a^2/4;
lk=2/(h^2)*(g-sqrt(g^2-a1^2)*cos([1:N2]'*pi*h/L));

```

```

CK1=sqrt(2*h/L);g1=(g-a1)/(g+a1);
W=(sin(pi/L*[1:N2]'*x').*(ones(N2,1)*(g1.^(0.5*x/h))))';
W1=(sin(pi/L*[1:N2]'*x').*(ones(N2,1)*(g1.^(-0.5*x/h))))';
for j=1:N2
W1(:,j)=W1(:,j).*CK1;
W(:,j)=W(:,j).*CK1;end;
%U=W*diag(lk.^(-1))*W1'*F;%FDS
U=W*diag(lk0.^(-1))*W1'*F; %FDSES
figure,plot(x,prec,'ro',x,u,'b*',x,U,'k*')
legend('prec. atr.', 'GDS', 'GDSPS')
xlabel('x')
kMat=(abs(u-prec));
kMat1=max(abs(u-prec))
kU=abs(U-prec);
kU1=max(abs(U-prec))
norm(kU);
figure,plot(x,kMat,'b*',x,kU,'k*')
legend('GDS k1. ', 'GDSPS k1. ')
xlabel('x')
dd=abs(u(1)-prec(1));
hh=abs(u(1)-prec(1))/prec(1);
ddd=abs(U(1)-prec(1));
hhh=abs(U(1)-prec(1))/prec(1);
for j=2:N2
if (dd<abs(u(j)-prec(j))) dd=abs(u(j)-prec(j));
hh=abs(u(j)-prec(j))/prec(j);
if (ddd<abs(U(j)-prec(j))) ddd=abs(U(j)-prec(j))/abs(prec(j));
hhh=abs(U(j)-prec(j))/prec(j);
end
end
end
hh

```

hhh

```
function PDS2veid(N)
N1=N+1;N2=N-1; L=1;a=1;x=linspace(0,L,N1)';
x=x(2:N);h=L/N;a1=a*h/2;
g=a1*coth(a1);% Iljina FDS
B1=zeros(N2,N2);
B1=B1+2*g*diag(ones(N2,1))-(g-a1)*diag(ones(N2-1,1),-1)-...
-(g+a1)*diag(ones(N2-1,1),1);
B1=B1/(h^2);% 3-diag. matr.$
F=-x.*(x-1);
prec=-3/2*x.^2+1/3*x.^3-11/6*exp(-x)/(exp(-1)-1)+3*x+11/6*1/(exp(-1)-1);
u=B1\F;
lk0=(pi/L*[1:N2]')^2+a^2/4;
lk=2/(h^2)*(g-sqrt(g^2-a1^2)*cos([1:N2]'*pi*h/L));
CK1=sqrt(2*h/L);g1=(g-a1)/(g+a1);
W=(sin(pi/L*[1:N2]'*x')).*(ones(N2,1)*(g1.^(0.5*x/h)))');
W1=(sin(pi/L*[1:N2]'*x')).*(ones(N2,1)*(g1.^(-0.5*x/h)))');
for j=1:N2
W1(:,j)=W1(:,j).*CK1;
W(:,j)=W(:,j).*CK1;end;
%U=W*diag(lk.^(-1))*W1'*F;%FDS
U=W*diag(lk0.^(-1))*W1'*F;%FDSES
figure,plot(x,prec,'ro',x,u,'b*',x,U,'k*')
legend('prec. atr.', 'GDS','GDSPS')
xlabel('x')
kMat=(abs(u-prec));
kMat1=max(abs(u-prec))
kU=abs(U-prec);
```

```

kU1=max(abs(U-prec))
norm(kU);
figure,plot(x,kMat,'b*',x,kU,'k*')
legend('GDS k1. ','GDSPS k1.')
xlabel('x')
dd=abs(u(1)-prec(1));
hh=abs(u(1)-prec(1))/prec(1);
ddd=abs(U(1)-prec(1));
hhh=abs(U(1)-prec(1))/prec(1);
for j=2:N2
if (dd<abs(u(j)-prec(j))) dd=abs(u(j)-prec(j));
hh=abs(u(j)-prec(j))/prec(j);
if (ddd<abs(U(j)-prec(j))) ddd=abs(U(j)-prec(j))/abs(prec(j));
hhh=abs(U(j)-prec(j))/prec(j);
end
end
end
hh
hhh

```

```

function Heat1(N)
N1=N+1;; Tb=1;L=1;x=linspace(0,L,N1)';
t=linspace(0,Tb,N1);
h=L/N;N2=N-1;
lk=4/h^2* (sin(pi*h/L*(1:N2)'/2)).^2;
lk0=(pi/L*(1:N2)')'.^2;
x=x(2:N);t=t(2:N);
W= sqrt(2/L)*sin(pi*h/L*[1:N2]')*[1:N2]);
y1=sqrt(2)*sin(pi*x)+sqrt(2)*sin(4*pi*x);

```

```

P=h*W*y1;P1=zeros(N2,N2);
P1(:,1)=P(1)*exp(-lk0(1)*t')+t'.*exp(-pi^2*t');
P1(:,4)=P(4)*exp(-lk0(4)*t')+(16*pi^2-1+exp(-16*pi^2*t'))/(16*pi^2)^2;
P2=(W*P1')';P2
prec=(exp(-pi^2*t')+t'.*exp(-pi^2*t'))*sqrt(2)*sin(pi*x')+(16*pi^2-1+exp(-...
-16*pi^2*t'))/(16*pi^2)^2*sqrt(2)*sin(4*pi*x')+...
+exp(-16*pi^2*t')*sqrt(2)*sin(4*pi*x');
max(max(abs(P2-prec)))
mesh(t,x,prec)
xlabel('x')
ylabel('t')
zlabel('u')

S=h*W*y1;S1=zeros(N2,N2);
S1(:,1)=S(1)*exp(-lk(1)*t')+t'.*exp(-pi^2*t');
S1(:,4)=S(4)*exp(-lk(4)*t')+(16*pi^2-1+exp(-16*pi^2*t'))/(16*pi^2)^2;
S2=(W*S1')';
max(max(abs(S2-prec)))

```

```

function wave1(N)
N1=N+1;; Tb=1;L=1;x=linspace(0,L,N1)';
t=linspace(0,Tb,N1);
h=L/N;N2=N-1;
lk=4/h^2*(sin(pi*h/L*(1:N2)'/2)).^2;
lk0=(pi/L*(1:N2)')'.^2;
x=x(2:N);t=t(2:N);
W= sqrt(2/L)*sin(pi*h/L*[1:N2]'*[1:N2]);
y1=sqrt(2)*sin(pi*x);
y0=sqrt(2)*sin(2*pi*x);
P=h*W*y1;P1=zeros(N2,N2);
P0=h*W*y0;

```

```

P1(:,1)=P(1)*cos(sqrt(lk0(1))*t');
P1(:,2)=P0(2)/sqrt(lk0(2))*sin(sqrt(lk0(2))*t');
P2=(W*P1')';P2
prec=sqrt(2)*cos(pi*t')*sin(pi*x')+sqrt(2)*sin(2*pi*t')/pi*0.5*sin(2*pi*x');
max(max(abs(P2-prec)))
mesh(t,x,prec)
xlabel('x')
ylabel('t')
zlabel('u')
S=h*W*y1;S1=zeros(N2,N2);S0=h*W*y0;
S1(:,1)=S(1)*cos(sqrt(lk(1))*t');
S1(:,2)=S0(2)/sqrt(lk(2))*sin(sqrt(lk(2))*t');
S2=(W*S1')';
max(max(abs(S2-prec)))

```

## 2. Maple programmas kods

```

limit(a/(x*sinh(x*a/2))*(cosh(a*x/2)-cos((k*pi*x)/l)),x=0);

```

Bakalaura darbs "Diferenču shēmas ar precīzo spektru diferenciālvienādojumiem ar pirmā veida robežnosacījumiem" izstrādāts LU Fizikas un Matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Sergejs Rogovs

\_\_\_\_\_

(paraksts)

(datums)

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai.

Vadītājs: Dr. habil. math., Dr. habil. phys., prof. Harijs Kalis

\_\_\_\_\_

(paraksts)

(datums)

Recenzents: Dr. math., lekt. Margarita Buiķe

\_\_\_\_\_

(paraksts)

(datums)

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā \_\_\_\_\_

(datums)

\_\_\_\_\_

(darbu pieņēma)

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē

\_\_\_\_\_ prot. Nr. \_\_\_\_\_, vērtējums \_\_\_\_\_

(datums)

Komisijas sekretārs/-e: \_\_\_\_\_

(Vārds, Uzvārds)

(paraksts)