LATVIJAS UNIVERSITĀTE
ĶĪMIJAS FAKULTĀTE

PILNĀS PĀRLASES METODE SKOLAS KURSĀ UN MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDĒS 5. – 12. KLASĒM

BAKALAURA DARBS

Autors: **Artūrs Dimitrijevs**
Studenta apliecības Nr.: ad17047
Darba vadītāja: Mg. Math. Elīna Buliņa

RĪGA 2021

ANOTĀCIJA

Bakalaura darbā „Pilnās pārlases metode skolas kursā un matemātikas olimpiādēs 5. – 12. klasēm”, analizējot literatūru, izglītības standartu, olimpiāžu uzdevumus un Rīgas Centra humanitārās vidusskolas 5. – 12. klašu skolēnu rezultātus darba autora izveidoto uzdevumu komplektu risināšanā, tika aprakstītas pilnās pārlases metodes izmantošanas iespējas skolas kursā un matemātikas olimpiādēs.

Darbā ir piecas nodaļas: 1. nodaļā aplūkota metodes izcelsme un salīdzinātas dažādu avotu piedāvātās pilnās pārlases metodes definīcijas; 2. nodaļā aprakstīta pilnās pārlases metodes loma izglītības standartā un matemātikas olimpiādēs; 3. nodaļā apkopoti uzdevumi un to risinājumi ar pilnās pārlases metodi; 4. nodaļā izveidoti uzdevumu komplekti 5. – 12. klasei, kas paredzēti kā atbalsta materiāls skolotājiem; 5. nodaļā aprakstīti skolēnu rezultāti uzdevumu komplektu risināšanā.

Atslēgvārdi: pilnās pārlases metode, matemātikas olimpiādes, skolas programma, uzdevumu komplekti

ANNOTATION

In the bachelor thesis “The Method of Exhaustion in School Curriculum and in Mathematics Olympiads for Grades 5 - 12” the author describes the advantages of the method of exhaustion in school curriculums and mathematics Olympiads by analyzing the literature, the educational standard, exercises used in Olympiads’ and Riga Centre Humanitarian Secondary School 5 – 12 grades students’ results in solving the sets of exercises created by the author.

The work consists of five chapters: Chapter 1 deals with the origin of the method and compares the definitions of the method of exhaustion offered by various sources; Chapter 2 describes the role of the method of exhaustion in the educational standard and mathematics Olympiads; Chapter 3 contains exercises and their solutions using the method of exhaustion; Chapter 4 contains sets of exercises for the grades 5-12 designed as support material for teachers; Chapter 5 describes the students’ results in solving the sets of exercises.

Key words: The Method of Exhaustion, mathematics Olympiads, School Curriculum, sets of exercises.

SATURS

IEVADS

Jaunā izglītības standarta un kompetenču pieejas ieviešana Latvijas skolās ir aktualizējusi jautājumu par to kā skolēns mācās un apgūst jauno vielu. Tas aicina un dod iespēju pievērst skolēnu skatus uz dažādajām uzdevumu risināšanas metodēm, kas līdz šim dažkārt mēdza izpalikt mācību stundās, kad tika apgūta jaunā viela.

A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas rīkotajās matemātikas olimpiādēs katru gadu tiek aktualizēta kāda konkrēta matemātikas tēma vai metode, par kuru tiek veidots viens no olimpiādes uzdevumiem. Lai sagatavotos olimpiādei, skolēniem tiek piedāvāts īpašs atbalsta materiāls, ar kura palīdzību tēmu var apgūt patstāvīgi. Tas ir lielisks veids kā ļaut skolēniem, kas gatavojas piedalīties olimpiādēs, apgūt šo tēmu vai metodi padziļinātā veidā. Un tieši padziļināta izpratne par matemātikā lietotajām uzdevumu risināšanas metodēm var ļaut skolēnam daudz mērķtiecīgāk un veiksmīgāk tikt galā ar dažādu grūtības pakāpju uzdevumiem.

Tātad varam ieraudzīt, ka konkrētas matemātikas uzdevumu risināšanas metodes un to apgūšana nākamajos gados varētu palikt arvien nozīmīgāka gan skolas mācību stundu, gan olimpiāžu kontekstā. Viena no šādām metodēm ir pilnās pārlases metode. Droši vien, ka jebkurš skolotājs un pat kādi skolēni, dzirdot šo nosaukumu, būs spējīgi paskaidrot, ka ar šo metodi tiek aplūkoti visi gadījumi. Bet skolas vidē var novērot, ka visu iespējamo gadījumu pārlase var sagādāt ļoti lielas grūtības, ja nav skaidrs princips pēc kura vadīties visu gadījumu aplūkošanā. Skolēni visbiežāk spēj pārbaudīt tikai atsevišķus gadījumus, kas norāda uz nepilnīgu izpratni par pilnās pārlases metodi.

Šeit var ieraudzīt, ka ir liela nepieciešamība mācīt skolēniem strukturētā veidā lietot pilno pārlasi, uzsverot cik svarīgi ir pārbaudīt pilnīgi visus gadījumus. Tādā veidā skolotāji var palīdzēt skolēnam pilnveidot darba strukturēšanu un izvairīšanos no nevajadzīgām kļūdām aprēķinos.

Darba tēma: Pilnās pārlases metode skolas kursā un matemātikas olimpiādēs

Darba mērķis: Noskaidrot pilnās pārlases metodes izmantošanas iespējas skolas kursā un matemātikas olimpiādes uzdevumu risināšanā.

Darba uzdevumi:

1. Apkopot un izanalizēt informāciju par pilnās pārlases metodi.
2. Analizēt pilnās pārlases izmantošanu skolas kursā un matemātikas olimpiādēs.

3. Izveidot uzdevumu komplektus katrai klašu grupai, kurus var atrisināt ar pilnās pārlases metodi.
4. Apkopot un analizēt iegūtos datus.
5. Izvirzīt secinājumus.

Darba jautājums: Kādas ir pilnās pārlases metodes izmantošanas iespējas skolas kursā un matemātikas olimpiādes uzdevumu risināšanā?

Pētījuma metodes: Uzdevumu apkopošana, analīze, aprobācija

Darba struktūra: Darbs sastāv no ievada, 5 nodaļām, 15 apakšnodaļām, 15 tabulām, 22 attēliem, 9 pielikumiem, 19 literatūras avotiem, kas sakārtoti atsaukšanās secībā, un secinājumiem.

1. PILNĀS PĀRLASES METODES IZCELSME UN DEFINĪCIJAS

1.1. Pilnās pārlases metodes izcelsme

Pilnās pārlases metodes ideja iespējams ir radusies jau 5. gadsimta beigās pirms Kristus. Pirmais, kurš par to ir rakstījis, ir Antifons no Ramnuntas (480. – 411.g. p.m.ē.). Viņš bija grieķu orators un valstsvīrs, kurš retoriku uzskatīja par savu profesiju. Antifons jau ļoti agri deva svarīgu ieguldījumu matemātikā, kad viņš mēģināja uzkonstruēt kvadrātu, kura laukums būtu tāds pats kā dotam riņķim. Mēģinot to izdarīt, Antifons kļuva par pirmo cilvēku, kurš ierosināja izmantot pilnās pārlases metodi, lai gan joprojām nav skaidri saprotams, cik ļoti viņš pats izprata sevis piedāvātās metodes būtību. Viņš piedāvāja secīgi dubultot regulāra daudzstūra malu skaitu, kas ir ievilkts riņķī, tādā veidā mēģinot „izskaust" laukumu atšķirību starp riņķī ievilkto daudzstūri un pašu riņķi. Vairāk par Antifonu izlasāms viņa biogrāfijā [1].

Avots [2] norāda, ka pilnās pārlases metodi dažus desmitus gadus vēlāk papildināja grieķu astronoms un matemātiķis Eidokss no Knidas (408. – 355.g. p.m.ē.), kurš šo metodi izmantoja, lai aprēķinātu dažādu figūru laukumus un tilpumus. Bet tikai 3.gs pēc Kristus, šo metodi Ķīnā no jauna atklāja Liu Hui, kurš ar pilnās pārlases metodi aprēķināja pilnu riņķa laukumu.

Tātad ir bijuši vairāki matemātiķi, kuri jau agrīnajā periodā savos darbos ir pielietojuši pilnās pārlases metodi, bet avots [3] uzsver, ka ir svarīgi saprast, ka senie grieķi nav mēģinājuši noformulēt šo paņēmienu kā vispārēju metodi, algoritmu vai matemātisku teoriju. Tādēļ arī neviens no viņiem vēl nebija devis kādu konkrētu nosaukumu šai metodei. Jēdziena „Pilnās pārlases metode" jeb „Izsmelšanas metode" (*method of exhaustion*) izcelsme Eiropā ir atrodama tikai 1646. gadā. Šo terminu ieviesa matemātiķis Gregors Sant-Vincents (Gregory St. Vincent) savā grāmatā „*Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum*."

Pilnās pārlases metodi plaši ir izmantojis Aleksandrijas Eiklīds, kurš to izmantoja, lai 12. grāmatā „Eiklīda Elementi" pierādītu sešas teorēmas, par kurām lasām [4] un, kas formulējamas šādi:

- 2. teorēma „Riņķa laukums ir proporcionāls riņķa diametra kvadrātam."
- 5. teorēma „Trijstūra piramīdas tilpums ir tieši proporcionāls tā pamata malas laukumam"
- 10. teorēma „Konusa tilpums ir trešā daļa no tāda cilindra tilpuma, kuram ir tāds pats pamats un augstums"

- 11. teorēma „Jebkura cilindra un konusa tilpumi ir tieši proporcionāli to pamata malas laukumam.”
- 12. teorēma „Cilindra vai konusa tilpums ir proporcionāls to pamata riņķa diametru kubiem”
- 18. teorēma „Lodes tilpums ir proporcionāls tās diametra kubam”

1.2. Arhimēda ieguldījums pilnās pārlases metodes attīstībā

Par Arhimēda ieguldījumu pilnās pārlases metodes attīstībā lasām avotā [5]. Arhimēds ir izmantojis pilnās pārlases metodi, lai iegūtu pēc iespējas precīzāku π vērtību. Viņš riņķim apvilka un riņķī ievilka regulārus daudzstūrus. Šo daudzstūru laukumiem vajadzēja palīdzēt noteikt π vērtības augšējo un apakšējo robežu. Lai padarītu šo vērtību precīzāku, Arhimēds ar katru reizi savos aprēķinos dubultoja iepriekšējā daudzstūra malu skaitu. Un šo procesu viņš varēja turpināt līdz brīdim, kad riņķī ievilktais un tam apvilktais daudzstūris palika praktiski neatšķirams no paša riņķa.

Mēģinot noteikt pēc iespējas precīzāku π vērtību, Arhimēds sāka savus aprēķinus nosakot augšējo robežu ap riņķa līnijai apvilktu sešstūri. Tad viņš turpināja aprēķinus, katru reizi divkāršojot iepriekšējā daudzstūra malu skaitu. Arhimēds turpināja tā darīt līdz ieguva daudzstūri ar 96 malām. Viņš katram daudzstūrim noteica perimetru, un rezultātā secināja, ka π vērtībai ir jābūt mazākai nekā $3\frac{1}{7}$. Nākamo viņš noteica π vērtības apakšējo robežu, riņķa līnijā vispirms ievelkot regulāru sešstūri. Un līdzīgi kā iepriekš, katru reizi divkāršoja daudzstūra malu skaitu līdz ieguva regulāru daudzstūri ar 96 malām. Katram no šiem daudzstūriem Arhimēds noteica perimetru, un secināja, ka π vērtībai ir jābūt lielākai par $3\frac{10}{71}$. Līdz ar to Arhimēds bija aprēķinājis, ka $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ jeb uzrakstot decimāldaļās: $3.140845\ldots < \pi < 3.142857\ldots$.Var ievērot, ka šī intervāla amplitūda ir tikai $\frac{1}{497}$.

Aprakstītajā Arhimēda paņēmienā lietotā pilnās pārlases metode balstījās idejā, ka riņķa līnijas garumu var aprēķināt tuvināti, izmantojot apvilktu un ievilktu daudzstūru perimetrus. Tā kā iegūtais rezultāts ir tikai tuvinājums, varam secināt, ka ar šo metodi nav iespējams noteikt pilnīgi precīzu π vērtību. Bet palielinot daudzstūru malu skaitu, var palielināt šī tuvinājuma precizitāti.

1.3. Pilnās pārlases definīcijas

Lai precizētu pilnās pārlases definīciju un noskaidrotu vairāk par tās izmantošanas veidiem, tika aplūkoti un salīdzināti dažādi literatūras avoti, kas mēģina skaidrot to, kas ir pilnās pārlases metode.

Avotā [6] šis paņēmiens ir skaidrots kā problēmu risinoša metode, kurā tiek pārbaudīti visi iespējamie varianti un tiek izraudzīts vislabākais variants. Tā bieži tiek izmantota datorprogrammās, bet to nevar izmantot kompleksu problēmu risināšanā kā, piemēram, ceļojošā pārdevēja problēma vai šaha spēle, jo iespējamo gadījumu skaits ir pārāk liels jebkuram datoram, lai to paveiktu. Šis dotais skaidrojums ir ļoti virspusējs, bet tas labi apraksta pilnās pārlases izmantošanas principu skolas kursa un olimpiāžu uzdevumu risināšanā.

Savukārt, enciklopēdija „Britannica" [7] sniedz plašāku un vispārīgāku pilnās pārlases metodes skaidrojumu. Viņi norāda, ka pilnās pārlases metode ir matemātisks paņēmiens, kurš radās Grieķijā Klasiskā perioda laikā. Tās sākotnējais mērķis bija pierādīt teorēmas, kas saistās ar ģeometrisku ķermeņu laukumu un tilpumu. Tā pamatā bija stingri loģiska procedūra, kurai par pamatu bija rezultāts, ka dots fiksēts daudzums var tikt secīgi sadalīts noteiktā skaitā mazākās daļās. No šīs aksiomas var pierādīt, ka, piemēram, riņķa laukums ir proporcionāls tā rādiusa kvadrātam. Pilnās pārlases metodes nosaukums radās Eiropā pēc renesanses perioda, un tika pielietots gan stingrajās grieķu procedūrās, gan mūsdienīgo laukumu formulu pierādījumos, tuvināti „pārlasot" visu figūras laukumu ar secīgi sadalītiem daudzstūriem." No šī var secināt, ka pilnās pārlases metode ir uztverama daudz plašāk nekā tas parasti tiek saprasts skolas un matemātikas olimpiāžu kontekstā.

Vācu zinātniskais žurnāls „Spectrum" [8] pilnās pārlases metodi apraksta līdzīgi enciklopēdijai „Britannica", to definējot kā grieķu izstrādātu algoritmu, kurā aprēķina laukumu liektas līnijas veidotiem apgabaliem, tuvināti „pārlasot" visu figūras laukumu ar secīgi sadalītiem daudzstūriem. Viņi norāda, ka vispazīstamākais pilnās pārlases piemērs ir Arhimēda algoritms π aprēķināšanai, un kopumā tās pamata ideja parasti atgriežas pie Arhimēda, kur aprēķina laukumu vai tilpumu kā daļēju laukumu vai ķermeņu tilpumam tuvinātu robežvērtību. Šo metodi var izmantot nevis tikai, lai noteiktu apļveida formas laukumus, bet arī tā var tikt pielietota, lai aprēķinātu daudzskaldņu tilpumu, piemēram, piramīdai. Arī šeit atkal parādās pilnās pārlases izmantošanas iespējas ģeometriska satura uzdevumos, kas nav raksturīgi skolas matemātikas kursā lietotajai praksei.

Birmingemas universitātes Matemātikas atbalsta centrs sadarbībā ar studenti Agata Stefanowicz 2014.gadā sagatavotajā materiālā [9], kas nosaukts „Pierādījumi un matemātiskie spriedumi" (*Proofs and Mathematical Reasoning*), norāda, ka pilnās pārlases metode reizēm tiek saukta arī par „izsmelšanas metodi", jo tās mērķis ir „izsmelt" visus iespējamos gadījumus. Problēmu sadalot vairākās daļās, risinājumā katru daļu aplūko atsevišķi. Izmantojot šo metodi matemātiskos pierādījumos, visbiežāk problēma tiek sadalīta divos vai trijos iespējamos gadījumos, bet šim gadījumu skaitam nav noteikta limita. Piemēram, četru krāsu teorēmas sākotnējais pierādījums izmantoja 1936 iespējamos gadījumus, bet laikam ejot, matemātiķiem izdevās to samazināt līdz mazliet vairāk kā 600 gadījumiem, kas tāpat ir ļoti daudz.

Šī paša materiāla autore A. Stefanowicz norāda, ka problēmas sadalīšana vairākos gadījumos bieži mēdz būt ļoti noderīga, bet ir jābūt uzmanīgam – jo vairāk atsevišķos gadījumos sadalīs, jo ir lielāka iespējamība kļūdīties aprēķinos vai arī netīšām izlaist kādu no gadījumiem. Bet pavisam noteikti ir jāaplūko visi iespējamie gadījumi, citādi šīs metodes izmantošana pierādījuma uzdevumos būs bezjēdzīga. Dažreiz šīs metodes īstenošanā grūtības rodas, nosakot veidu kā lielo problēmu sadalīt vairākos atsevišķos gadījumos.

2. PILNĀS PĀRLASES METODES IZMANTOŠANA SKOLAS KURSĀ UN MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDĒS

Jebkuram matemātikas skolotājam savā pedagoģiskajā darbībā ir jābalstās izglītības standartā. Tas nozīmē, ka pilnās pārlases metodes apgūšanai un izmantošanai mācību stundās ir jābūt pamatotai valsts apstiprinātajā mācību saturā. Savukārt, matemātikas olimpiāžu saturs ir atšķirīgs no obligātā skolas matemātikas kursa satura. Olimpiāžu uzdevumos ir nepieciešamas padziļinātas skolēnu zināšanas. Līdz ar to nepieciešamas arī padziļinātas zināšanas pilnās pārlases metodes lietošanā.

Lai noskaidrotu pilnās pārlases metodes izmantošanas iespējas skolas kursā un matemātikas olimpiādēs, šajā nodaļā tiks aplūkoti valstī spēkā esošie noteikumi par mācību saturu, un tiks veikts apkopojums par pilnās pārlases izmantošanu olimpiāžu uzdevumos.

2.1. Pilnās pārlases metode skolas kursā

Pēc Skola 2030 piedāvātās matemātikas mācību priekšmeta programmas parauga [10] pilnā pārlase tiek apgūta 7. klasē tēmā „Kā nosaka kopas visus elementus, aprēķina notikuma varbūtību?" Saskaņā ar programmas paraugu viena no zināšanām, kuru skolēniem ir jāapgūst šīs tēmas laikā ir, ka pilnā pārlase ir visu objektu uzskaitījums; to var dažādi organizēt un attēlot. Uz nepieciešamību apgūt pilnās pārlases metodi norāda arī komplekss sasniedzamais rezultāts, ka skolēni „Pazīstamās un jaunās situācijās nosaka un pamato objektu skaitu, eksistenci, aprēķina notikuma varbūtību, izmantojot pilno pārlasi, darbības ar kopām (apvienojums, šķēlums), lietojot pieņemtos simbolus."

Noteikumi par valsts pamatizglītības standartu un pamatizglītības programmu paraugiem [11] paredz, ka skolēniem, beidzot 6. klasi, ir jāprot veikt pilno pārlasi, kas ir daļa no kritiskās domāšanas un problēmrisināšanas caurviju prasmes. Bet matemātikas jomā skolēniem pazīstamās situācijās ir jālieto pilnā pārlase, lai pamatotu apgalvojuma patiesumu, piemēram, pētot iespējamos kuba izklājumus (beidzot 6. klasi). Un tāpat skolēniem pazīstamās un jaunās situācijās ir jālieto pilnā pārlase, lai noteiktu un pamatotu objektu eksistenci un skaitu (beidzot 9. klasi).

Arī noteikumos par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu un vispārējās vidējās izglītības programmu paraugiem [12] ir pieminēta pilnās pārlases metode. Matemātikas jomas ceturtās lielās idejas 4.5 apakšnodaļā „Vienādojumi, nevienādības, to sistēmas" ir teikts, ka augstākajā apguves līmenī pilnā pārlase ir viens no veidiem, ar kuru naturālajos un veselajos skaitļos var atrisināt vienādojumu, kurš satur divus mainīgos. Bet 5.1. sadaļā „Kopas, darbības ar kopām un kombinatorikas elementi" pie optimālā apguves līmeņa ir teikts, ka

„elementu/objektu skaitu nosaka, spriežot un veicot pilno pārlasi, pamatojot savus spriedumus.”

Tātad, aplūkojot mācību priekšmeta standartu, var secināt, ka skolas kursā pilnās pārlases metodi galvenokārt lieto, lai veicinātu kritisko domāšanu un veiktu spriedumus par kādas kopas visu elementu skaitu vai atbilstību uzdevuma situācijai. Lai gan pilnai pārlasei vislielāko uzmanību velta tieši 7. klasē saistībā ar kombinatorikas uzdevumiem, tomēr pilnās pārlases metode tiek apgūta visu pamatskolas laiku un tā turpinās līdz pat vidusskolas beigšanai.

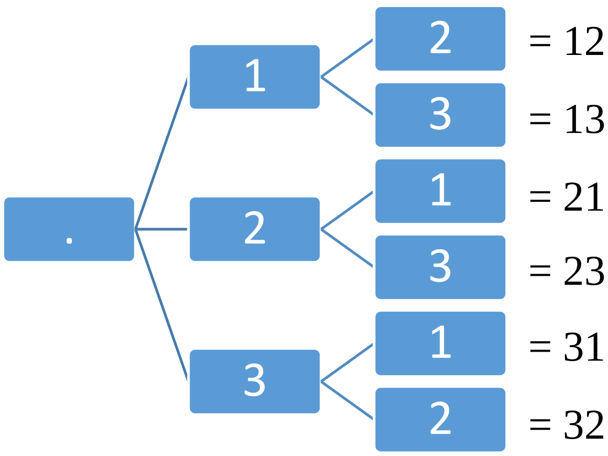
Matemātikas uzdevumos bieži vien ir jāaplūko visi iespējamie gadījumi. Tādēļ ir ļoti būtiski skolēniem apgūt prasmi visus iespējamos gadījumus aplūkot sistemātiski, lai nepalaistu garām kādu no gadījumiem. Tādēļ, apgūstot pilnās pārlases metodi, skolēni mācās secīgi strukturēt informāciju dažādos veidos, piemēram, grafos, koka diagrammā vai tabulā.

Koka diagramma ir viens no veidiem, kā var parādīt un sistematizēt visus savienojumus. Tā ir figūra, ko veido no nogriežņiem savienoti punkti, kas shematiski attēlo informāciju. Ar koka diagrammu var precīzi veikt pilno pārlasi. Otrs veids, ko apgūst skolā, ir tabulas veidošana. Lai pareizi izveidotu tabulu, vispirms ir jāsaprot kādu informāciju tajā vēlas ievietot. No tā būs atkarīgs, cik kolonnas un rindas tabulai būs vajadzīgas, un kāds būs katras kolonnas un rindas saturs.

Aplūkosim divus uzdevumus no [13], kuru atrisinājumā ir izmantota koka diagramma un tabula.

1. Uzdevums ar koka diagrammu: Cik dažādus divciparu skaitļus var izveidot no cipariem 1, 2 un 3, ja katru izmanto tieši vienu reizi.

Risinājums: Izveido 2.1. att. redzamo koka diagrammu:



2.1. att. **Koka diagramma**

Atbilde: var iegūt 6 dažādus skaitļus.

2. Uzdevums ar tabulu: Metamo kauliņu met divas reizes un punktus sareizina. Cik dažādus reizinājumus ir iespējams iegūt?

Risinājums: Izveido 2.1. tabulu, kur 1. rinda un 1. kolonna ir iespējamie metamā kauliņa uzmestie skaitļi. Tabulā apkopo šo skaitļu reizinājumus.

2.1. tabula

Uzmesto skaitļu iespējamie reizinājumi

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Dažādie reizinājumi ir 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 15; 16; 18; 20; 24; 25; 30; 36 - kopā 18 dažādi rezultāti.

2.2. Olimpiāžu uzdevumu apkopojums

Lai spētu labāk novērtēt pilnās pārlases metodes izmantošanas iespējas olimpiāžu uzdevumu risināšanā, vispirms ir vajadzīgs saprast, cik bieži olimpiāžu uzdevumos parādās tādi uzdevumi, kuru risināšanā ir iespējams lietot pilno pārlasi. Tādēļ, aplūkojot A. Liepas Neklātienes skolas (NMS) uzdevumu arhīvu [14], tika veikts apkopojums par pēdējo 10 gadu novada (NOL) un atklātajās (AMO) olimpiādēs iekļautajiem uzdevumiem, kuros lietojama pilnās pārlases metode. Olimpiāžu norises gadi un klašu grupas, kurās sastopami šādi uzdevumi, ir apkopoti 2.2. tabulā.

2.2. tabula

Pilnās pārlases iespējamās izmantošanas biežums matemātikas olimpiādēs

<table>
<tr><th>GADS</th><th colspan="4">NOL</th><th colspan="4">AMO</th></tr>
<tr><td rowspan="2">2019./2020.</td><td>5.</td><td>6.</td><td>7.</td><td>8.</td><td colspan="4" rowspan="2">Netika rīkota</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>10.</td><td>11.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2018./2019.</td><td>5.</td><td>6.</td><td>7.</td><td>8.</td><td>5.</td><td></td><td>7.</td><td>8.</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>10.</td><td>11.</td><td>12.</td><td>9.</td><td>10.</td><td>11.</td><td>12.</td></tr>
</table>

2017./2018.	5.	6.	7.	8.	5.	6.	7.	8.
	9.				9.	10.		
2016./2017.	5.		7.	8.	5.	6.	7.	
	9.	10.	11.	12.	9.	10.		
2015./2016.	5.	6.	7.	8.				
	9.		11.	12.	9.			
2014./2015.	5.	6.			5.		7.	
		10.	11.				11.	
2013./2014.	5.	6.	7.	8.			7.	
	9.				9.			12.
2012./2013.	5.	6.	7.	8.	5.	6.	7.	8.
	9.	10.	11.		9.			
2011./2012.	5.	6.			5.	6.	7.	8.
	9.		11.	12.				
2010./2011.	5.	6.	7.		5.		7.	8.
		10.		12.				12.

Aplūkojot iepriekšējo gadu novada un atklāto olimpiāžu uzdevumus, ļoti labi var ieraudzīt, ka pilnās pārlases metode ir ļoti nozīmīgs paņēmiens šāda veida uzdevumu risināšanā. Visās aplūkotajās matemātikas olimpiādēs ir vairākas klašu grupas, kurās atrodami uzdevumi, kuru risinājumā ir iespējams izmantot pilno pārlasi. Visbiežāk šādi uzdevumi ir sastopami 5. – 9. klasēs, bet jāņem vērā, ka vidusskolā uzdevumu grūtības pakāpe palielinās. Līdz ar to arī pilnās pārlases metodes izmantošana vidusskolas olimpiāžu uzdevumos kļūst sarežģītāka. Dažreiz tā ir tik sarežģīta un apjomīga, ka skolēnam olimpiādes norises laikā vienkārši nepietiktu laika, lai bez palīgierīcēm sekmīgi paveiktu uzdevumu ar pilno pārlasi. Tādēļ vienmēr ir nepieciešams rūpīgi izvērtēt, kuru metodi būtu vislabāk lietot uzdevumu risināšanā.

Aplūkotajos olimpiāžu uzdevumos kopumā ir novērojama liela atšķirība no skolas kursā visbiežāk risinātajiem uzdevumiem, kur ar pilnās pārlases metodi mēdz aplūkot konkrētas skaitļu vērtības vai arī citus konkrētus lielumus. Olimpiādēs bieži vien pilno pārlasi var izmantot, lai sistemātiski aplūkotu vispārīgā veidā dotus skaitļus vai arī secīgi sadalītas skaitļu grupas. Līdz ar to pilnās pārlases metodi bieži vien ir nepieciešams lietot kopā ar citiem matemātiskiem paņēmieniem, piemēram, vispirms veicot ekvivalentus vienādojuma pārveidojumus, un tikai tad izmantot pilno pārlasi, lai spriestu par vienādojuma atrisinājumu.

Lai gūtu priekšstatu par pilnās pārlases izmantošanu matemātikas olimpiādēs, aplūkosim dažus NMS rīkotajās olimpiādēs iekļautos uzdevumus un to iespējamos risinājumus ar pilnās pārlases metodi, kas atrodami [14].

Piemērs A

(AMO 2017./2018. 6.kl.) Laine sāka pierakstīt, cik veidos var iegūt katru summu no 2 līdz 12, metot divus parastus metamos kauliņus: summu 2 var iegūt 1 veidā ($2 = 1 + 1$), summu 3 var iegūt 2 dažādos veidos ($3 = 1 + 2 = 2 + 1$), summu 4 var iegūt 3 dažādos veidos ($4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1$). Kādos un cik dažādos veidos var iegūt visas atlikušās summas no 5 līdz 12?

Atrisinājums. Diviem parastiem metamajiem kauliņiem katrai iespējamajai summai atbilstošo veidu skaits ir šāds: 2-1, 3-2, 4-3, 5-4, 6-5, 7-6, 8-5, 9-4, 10-3, 11-2, 12-1 (skat. 2.3. tabulā).

2.3. tabula

Uzmesto skaitļu iespējamās summas

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Piemērs B

(NOL 2013./2014. 5.kl.) Grāmatas lappuses ir sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 2014 pēc kārtas. Cik lappušu numuros ir sastopams cipars 7?

1. Atrisinājums (ar pilno pārlasi).

Pieņemsim, ka grāmatai ir vēl arī 0-tā lappuse. Tā kā tās numerācijā nav izmantots cipars 7, tad šāds pieņēmums neizmanīs rezultātu – aprēķināto lappušu numuru skaitu.

Starp pirmajām desmit lappusēm (no 0. līdz 9.) vienas numurā būs sastopams cipars 7.

Lai aprēķinātu lappušu ar 7 skaitu starp pirmajām 100 lappusēm (no 0. līdz 99.), nepieciešams ņemt vērā, ka septītnieks ir visās lappusēs no 70. līdz 79. (kopā 10 lappuses) un pārējos deviņos lappušu desmitos katrā vēl pa vienam – kopā 19 lappuses.

Tagad aprēķinām lappušu skaitu starp pirmajām 1000 lappusēm (no 0. līdz 999.). No 700. līdz 799. lappusei cipars 7 ir visās 100 lappusēs. Katrā no pārējiem deviņiem lappušu simtiem ir pa 19 lappusēm. Tātad pavisam $100 + 9 \cdot 19 = 271$ lappuse.

Tieši tikpat lappušu ar ciparu 7 ir otrajā lappušu tūkstotī (no 1000. līdz 1999.). Tātad no 0. līdz 1999. lappusei cipars 7 ir sastopams 542 lappušu numuros. Vēl cipars 7 ir 2007. lappuses numurā.

Tātad no 1. līdz 2014. lappusei cipars 7 ir sastopams 543 lappušu numuros

<u>*2. Atrisinājums*</u> Vispirms noskaidrosim, cik lappušu numuros pirmajās 1000 lappusēs nav izmantots cipars 7. Aizstāsim 1000 lappusi ar 0-to lappusi, tad visi lappušu numuri ir trīsciparu skaitļi (viencipara un divciparu lappusēm priekšā var pierakstīt divas vai vienu nulli).

Katru ciparu var izvēlēties 9 veidos (der visi cipari izņemot 7), tāpēc šādu lappušu Latvijas 64. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumu īsi atrisinājumi 2 skaits ir $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. Tātad cipars 7 ir izmantots $1000 - 729 = 271$ lappuses numurā.

Tikpat daudz lappusēs cipars 7 ir izmantots otrajā tūkstotī.

Vēl viens cipars 7 ir izmantots skaitlī 2007.

Tātad kopā cipars 7 ir sastopams $271 + 271 + 1 = 543$ lappušu numuros.

Piemērs C

(NOL 2019./2020. 11.klase) Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu

$$n^3 = (n-1)^3 + (n-2)^3 + (n-3)^3.$$

<u>*Atrisinājums*</u>**.** Ekvivalenti pārveidojam doto vienādojumu:

$$n^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 - 6n^2 + 12n - 8 + n^3 - 9n^2 + 27n - 27$$

$$2n^3 - 18n^2 + 42n - 36 = 0$$

$$n^3 - 9n^2 + 21n - 18 = 0.$$

Ievērojam, ka $6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$, tātad $n = 6$ ir dotā vienādojuma sakne un vienādojumu var pārveidot formā (izdalot polinomu ar binomu $(n-6)$):

$$(n-6)(n^2 - 3n + 3) = 0.$$

Vienādojumam $n^2 - 3n + 3 = 0$ nav veselu sakņu, jo $D = 9 - 12 < 0$.

Piezīme. Tā kā vienādojuma veselās saknes var būt tikai brīvā locekļa dalītāji, tad var pārbaudīt visas iespējamās vērtības $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6;\ \pm9;\ \pm18$.

Piemērs D

(NOL 2018./2019. 8.klase) Izmantojot divus atšķirīgus nenulles ciparus x un y ir izveidoti divi trīsciparu skaitļi $\overline{xyx}$ un $\overline{yxy}$. Zināms, ka $\overline{xyx}$ dalās ar 3, bet $\overline{yxy}$ dalās ar 4. Kāds var būt izveidotais trīsciparu skaitlis $\overline{yxy}$?

Atrisinājums. Skaitlis dalās ar 3 tad, ja tā ciparu summa dalās ar 3. Tātad $(2x + y)$ dalās ar 3. Skaitlis dalās ar 4 tad, ja tā divu pēdējo ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4. Tātad $\overline{xy} = 10x + y$ dalās ar 4.

Ievērojam, ka $10x + y = 8x + 2x + y$. Tā kā $10x + y$ dalās ar 4, un $8x$ dalās ar 4, tad arī $(2x + y)$ ir jādalās ar 4. Bet tas nozīmē, ka $(2x + y)$ ir jādalās ar 12, jo 3 un 4 ir savstarpēji pirmskaitļi. Ievērojot, ka x un y ir cipari *(*$2x + y < 27$*)*, iespējami divi gadījumi:

- ja $2x + y = 12$ jeb $\mathrm{y} = 12 - 2x$, tad ievērojam, ka $x \leq 5$, un pārbaudām visus iespējamos gadījumus:

x	1	2	3	4	5
$y = 12 - 2x$	10 (neder, jo nav cipars)	8	6	4 (neder, jo $x = y$)	2

- ja $2x + y = 24$ jeb $y = 24 - 2x$, tad ievērojam, ka $x > 7$, un pārbaudām abus iespējamos gadījumus:

x	8	9
$y = 24 - 2x$	8 (neder, jo $x = y$)	6

Līdz ar to trīsciparu skaitlis $\overline{yxy}$ var būt 828, 636, 252, 696.

Piezīme. Uzdevumu var atrisināt, veicot pilno pārlasi, tas ir, pārbaudot visus divciparu skaitļus $\overline{xy}$, kas dalās ar 4.

3. UZDEVUMU APKOPOJUMS

No iepriekšējās nodaļās aprakstītā var secināt, ka pilnās pārlases metodi var izmantot dažāda veida uzdevumu risināšanā. Skolā to visbiežāk mēdz izmantot algebriskos uzdevumos, bet aplūkojot metodes izcelsmi, redzam, ka ir iespējas šo metodi pielietot arī ģeometrijas uzdevumu risināšanā.

Šajā nodaļā tiks aplūkoti dažādi uzdevumi un to risinājumi, kuros var izmantot pilnās pārlases metodi.

3.1. Pilnās pārlases metode uzdevumos par skaitļiem

Viens no visbiežākajiem uzdevumu veidiem, kuros var izmantot pilno pārlasi, ir uzdevumi par skaitļiem. Šajos uzdevumos bieži tiek prasīts atrast skaitļus ar kādu konkrētu īpašību, vai arī uzdevuma nosacījumos parādās tādi raksturīgi vārdi kā „cik?', „kādi var būt?", „kādā veidā?". Aplūkosim uzdevumus par skaitļiem no [15], [16], [17] un [18].

1. Cik ir tādu divciparu skaitļu, kuru ciparu kvadrātu summa dalās ar 13?

   Atbilde. Kopā ir 16 tādi divciparu skaitļi, kuru ciparu kvadrātu summa dalās ar 13.

   Risinājums. Lai atrastu visas divciparu skaitļu $\overline{ab}$ ciparu kvadrātu summas, tās apkoposim 3.1. tabulā, kur a *(vertikāli)* apzīmē desmitus, bet b *(horizontāli)* apzīmē vienus. No iegūtajām summām izvēlas tās, kuras dalās ar 13.

3.1. tabula

Iespējamās divciparu skaitļu ciparu kvadrātu summas

$a^2 \backslash b^2$	**0**	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**
1	1	2	5	10	17	26	37	50	65	82
4	4	5	8	13	20	29	40	53	68	85
9	9	10	13	18	25	39	45	58	73	90
16	16	17	20	25	32	41	52	65	80	97
25	25	26	29	39	41	50	61	74	89	106
36	36	37	40	45	52	61	72	85	100	117
49	49	50	53	58	65	74	85	98	113	130
64	64	65	68	73	80	89	100	113	128	145
81	81	82	85	90	97	106	117	130	145	162

Ievērojam, ka ir tieši 16 tādi divciparu skaitļi, kuru ciparu kvadrātu summa dalās ar 13. Tie ir skaitļi 15; 18; 23; 32; 35; 46; 47; 51; 53; 64; 69; 74; 79; 81; 96; 97.

2. Atrast divciparu skaitli, kurš vienāds ar savu ciparu summas kvadrātu!

Atbilde. Vienīgais divciparu skaitlis, kurš vienāds ar savu ciparu summas kvadrātu ir skaitlis 81.

Risinājums. Visas iespējamās divciparu skaitļa $\overline{ab}$ ciparu summas kvadrātu vērtības apkopojam 3.2. tabulā:

3.2. tabula

Iespējamie divciparu skaitļu ciparu summas kvadrāti

$a \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
2	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
3	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
4	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
5	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196
6	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
7	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256
8	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289
9	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324

Ievēro, ka viencipara un trīsciparu summas var neaplūkot. Tabulā var redzēt, ka skaitļa 81 ciparu summas kvadrāta vērtība arī ir 81, tādēļ šis ir meklētais skaitlis.

3. Atrast visus divciparu skaitļus ar šādu īpašību: ja skaitļa ciparu summai pieskaita šīs summas kvadrātu, tad iegūst pašu skaitli.

Atbilde. Šāda īpašība piemīt skaitļiem 12, 42 un 90.

Risinājums. Aplūkojam visus iespējamos divciparu skaitļus $\overline{ab}$. Nosakām katra skaitļa ciparu summu $(a+b)$, šīs summas kvadrātu $(a+b)^2$, un aprēķinām vērtību $(a+b)+(a+b)^2$. Šīs vērtības apkopojam 3.3. tabulā:

3.3. tabula

Visu iespējamo summu apkopojums

a\b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110
2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132
3	12	20	30	42	56	72	90	110	132	156
4	20	30	42	56	72	90	110	132	156	183
5	30	42	56	72	90	110	132	156	183	210

6	42	56	72	90	110	132	156	183	210	240
7	56	72	90	110	132	156	183	210	240	272
8	72	90	110	132	156	183	210	240	272	306
9	90	110	132	156	183	210	240	272	306	342

Risinājuma piemērs: $\overline{ab} = 47;\ (4+7) + (4+7)^2 = 11 + 11^2 = 11 + 121 = 132$

Ievēro, ka viencipara un trīsciparu summas var neaplūkot. No tabulas nolasa, ka ir trīs skaitļi, kuriem piemīt uzdevumā prasītā īpašība: 12, 42, 90.

4. Veikalā ir smērviela 16 kg, 17 kg un 21 kg kārbās. Cik veidos ir iespējams pārdot 185 kg smērvielas, neatverot nevienu kārbu?

Atbilde. To ir iespējams izdarīt piecos veidos.

Risinājums. Vispirms nosaka visus iespējamos katra veida kārbas smagumus pie dažāda kārbu skaita.

3.4. tabula

Kārbu smagums atkarībā no kārbu skaita

Kārbu skaits	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
16kg	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176
17kg	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187
21kg	21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	231

Ievēro, ka katrai kārbai ir noteikts maksimālais daudzums, kurš kopā nepārsniedz vajadzīgos 185 kg. Tālāk aplūko visas iespējamās 16 kg un 17 kg kārbu skaita kombinācijas un to kopējo smagumu. 3.5. tabulā apkopota informācija par vēl nepieciešamo svaru, lai tiktu sasniegti tieši 185 kg. (Aprēķina pēc formulas: $185 - 16x - 17y$, kur x un y – kārbu skaits). Izslēdz tos gadījumus, kuros 16 kg un 17 kg smago kārbu kopējais svars pārsniedz 185 kg.

3.5. tabula

Vēl nepieciešamais smērvielas daudzums atkarībā no 17 kg un 16 kg kārbu skaita

17kg\16kg	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
0	185	169	153	137	121	105	89	73	57	41	25	9
1	168	152	136	120	104	88	72	56	40	24	8	-8
2	151	135	119	103	87	71	55	39	23	7	-9	-25
3	134	118	102	86	70	54	38	22	6	-10	-26	-42
4	117	101	85	69	53	37	21	5	-11	-27	-43	-59
5	100	84	68	52	36	20	4	-12	-28	-44	-60	-76

6	83	67	51	35	19	3	-13	-29	-45	-61	-77	-93
7	66	50	34	18	2	-14	-30	-46	-62	-78	-94	-110
8	49	33	17	1	-15	-31	-47	-63	-79	-95	-111	-127
9	32	16	0	-16	-32	-48	-64	-80	-96	-112	-128	-144
10	15	-1	-17	-33	-49	-65	-81	-97	-113	-129	-145	-161

No pāri palikušajām tabulas vērtībām izraugās tās, kuras dalās ar 21. Tātad ir tieši pieci veidi, kā izmantojot 16 kg, 17kg un 21kg kārbas var pārdot kopā 185 kg smēres. (skat. 3.6. tabulu)

3.6. tabula

Visi iespējamie veidi kā pārdot 185 kg smēres

	16 kg	**17kg**	**21kg**
KĀRBU SKAITS	1	5	4
	2	9	0
	6	4	1
	5	0	5
	0	1	8

5. Trīsciparu skaitlim nosvītroja pirmo ciparu, iegūto divciparu skaitli pareizināja ar 7 un ieguva sākotnējo trīsciparu skaitli. Atrast to.

Atbilde. Šis trīsciparu skaitlis ir 350.

Risinājums. Skaitlim $\overline{abc}$ aplūko visus iespējamos $\overline{bc}$ gadījumus. Cipari b un c var būt no 0 līdz 9. Visi iespējamie $\overline{bc}$ skaitļu reizinājumi ar 7 apkopoti 3.7. tabulā.

3.7. tabula

Visu divciparu skaitļu reizinājumi ar septiņi

b\c	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	7	14	21	28	35	42	79	56	63
1	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133
2	140	147	154	161	168	175	182	189	196	203
3	210	217	224	231	238	245	252	259	266	273
4	280	287	294	301	308	315	322	329	336	343
5	350	357	364	371	378	385	392	399	406	413
6	420	427	434	441	448	455	462	469	476	483
7	490	497	504	511	518	525	532	539	546	553
8	560	567	574	581	588	595	602	609	616	623
9	630	637	644	651	658	665	672	679	686	693

No iegūtajiem reizinājumiem atrod tādu trīsciparu skaitli $\overline{abc}$, kura desmitus un vienus veido skaitlis $\overline{bc}$. Ieraugam, ka meklētais skaitlis ir „350”, jo tas apmierina uzdevuma nosacījumus.

6. Trīsciparu skaitlim, kura visi cipari nepāra, izsvītroja vidējo ciparu. Izrādījās, ka iegūtais divciparu skaitlis ir sākotnējā skaitļa dalītājs. Atrast visus šādus trīsciparu skaitļus.

Atbilde. Ir trīs tādi skaitļi – 135, 195 un 315

Risinājums. Aplūko visus iespējamos trīsciparu skaitļus $\overline{abc}$, kur *a, b, c* nepāra cipari. Tie ir apkopoti 3.8. un 3.9. tabulā, kur 1. rindā ir jauniegūtais skaitlis, bet 1. kolonnā ir izsvītrotais cipars.

3.8. tabula

Trīciparu skaitļu apkopojums

b\ac	11	13	15	17	19	31	33	35	37	39	51	53	55
1	111	113	115	117	119	311	313	315	317	319	511	513	515
3	131	133	135	137	139	331	333	335	337	339	531	533	535
5	151	153	155	157	159	351	353	355	357	359	551	553	555
7	171	173	175	177	179	371	373	375	377	379	571	573	575
9	191	193	195	197	199	391	393	395	397	399	591	593	595

3.9. tabula

Trīciparu skaitļu apkopojums (turpinājums)

b\ac	57	59	71	73	75	77	79	91	93	95	97	99
1	517	519	711	713	715	717	719	911	913	915	917	919
3	537	539	731	733	735	737	739	931	933	935	937	939
5	557	559	751	753	755	757	759	951	953	955	957	959
7	577	579	771	773	775	777	779	971	973	975	977	979
9	597	599	791	793	795	797	799	991	993	995	997	999

Pārbauda katru tabulā ierakstīto skaitli $\overline{abc}$, vai tas dalās ar skaitli $\overline{ac}$. Rezultātā iegūst, ka ir trīs tādi trīsciparu skaitļi, kuri apmierina uzdevumā prasīto.

7. Kāds cipars var būt * vietā, lai skaitlis 987* dalītos ar 5?

Atbilde. Der cipari 0 un 5.

1.atrisinājums (pilnā pārlase). Aplūko visus iespējamos gadījumus un to dalījumu ar 5:

- **9870 : 5 = 1974**
- 9871 : 5 = 1974,2

- 9872 : 5 = 1974,4
- 9873 : 5 = 1974,6
- 9874 : 5 = 1974,8
- **9875 : 5 = 1975**
- 9876 : 5 = 1975,2
- 9877 : 5 = 1975,4
- 9878 : 5 = 1975,6
- 9879 : 5 = 1974,8

No rezultātiem var secināt, ka * vietā var būt 0 vai 5, lai izpildītos uzdevumā prasītais.

2.atrisinājums. Izmantot dalāmības īpašības. Lai skaitlis dalītos ar 5, tā pēdējam ciparam ir jādalās ar 5. Līdz ar to * vietā var būt cipari 0 vai 5.

8. Kuriem divciparu skaitļiem abu ciparu summa ir lielāka nekā 13?

Atbilde. Ir 15 šādi skaitļi - 59, 68, 69, 77, 78, 79, 86, 87, 88, 89, 95, 96, 97, 98, 99.

Risinājums. Aplūko visus divciparu skaitļus $\overline{ab}$. To ciparu summas attēlotas 3.10. tabulā. Atzīmētas tās summas, kuras ir lielākas par 13. Katrai summai atrod atbilstošo skaitli.

3.10. tabula

Divciparu skaitļu ciparu summas

a\b	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

9. Cik 4-centu pastmarkas nepieciešamas, lai izveidotu vērtību 35 centi, izmantojot tikai 4-centu un 9-centu pastmarkas?

Atbilde. Ir nepieciešamas divas 4-centu pastmarkas un trīs 9-centu pastmarkas.

Risinājums. Aprēķina katras pastmarkas veida vērtību atkarībā no pastmarku skaita (skat. 3.11. tabulu). Pārbauda visus iespējamos pastmarku veidu un skaitu pārus, un atrod to pāri, kas kopā veido 35 centu vērtību. Tāds ir tikai viens pāris – divas 4-centu pastmarkas un trīs 9-centu pastmarkas.

3.11. tabula

Pastmarku vērtība atkarībā no skaita

Pastmarku skaits	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
4-centu	4	8	12	16	20	24	28	32	36
9-centu	9	18	27	36					

10. Dots skaitlis 407. Kur jāieraksta cipars 5, lai iegūtais četrciparu skaitlis būtu vismazākais?

Atbilde. Cipars 5 jāieraksta starp 0 un 7, lai iegūtu skaitli 4057.

Risinājums. Aplūko visus četrus iespējamos gadījumus:

1) 5407; 3)4057;

2) 4507; 4)4075.

Vismazākais no šiem skaitļiem ir 4057, līdz ar to ir iegūta atbilde uz uzdevuma jautājumu.

11. Cik divciparu skaitļiem desmitu cipars ir par 3 lielāks nekā vienu cipars?

Atbilde. Ir seši šādi divciparu skaitļi – 30, 41, 52, 63, 74, 85, 96.

Risinājums. Izmantojot pilno pārlasi, secīgi aplūko visus ciparus no 0 līdz 9, kas varētu būt skaitļa $\overline{ab}$ vienu cipars, katram šim ciparam piekārto par trīs lielāku desmitu ciparu. Ievēro, ka 6 ir lielākais cipars, kurš var atrasties vienu pozīcijā, lai izpildītos prasītais. Šādi tiek iegūti seši divciparu skaitļi, kuriem desmitu cipars ir par 3 lielāks nekā vienu cipars.

12. Cik ir tādu dažādu taisnstūru, kuru laukums ir 36 cm^2? Taisnstūru malu garumiem jābūt veselos centimetros.

Atbilde. Ir seši tādi taisnstūri.

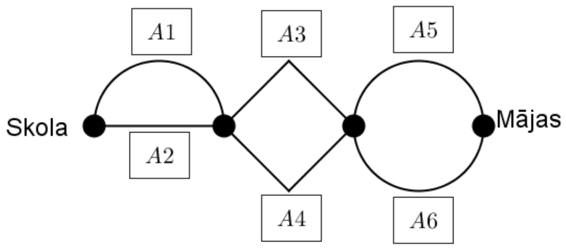
Risinājums. Visi iespējamie gadījumi taisnstūra malu garumiem ir apkopoti 3.12. tabulā. Tajā izmantoti visi skaitļa 36 dalītāji – 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Ievēro, ka trijstūris ar malu garumiem $a \times b$ ir tas pats, kas $b \times a$.

3.12. tabula

Iespējamie taisnstūra malu garumi

Mala *a*	1	2	3	4	6
Mala *b*	36	18	12	9	6

13. Cik dažādos veidos Paula no skolas var aiziet uz mājām, ja pa katru ceļu var iet tikai vienu reizi (skat. 3.1. att.)? Uzraksti visus iespējamos ceļus, izmantojot dotos apzīmējumus!

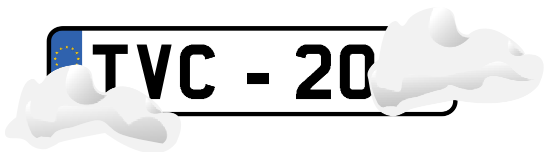


3.1. att. **Ceļš no skolas uz mājām**

Atbilde**.** Ir astoņi iespējamie ceļi:

1) A1 – A3 – A5;	5)A2 – A3 – A5;
2)A1 – A3 – A6;	6)A2 – A3 – A6;
3)A1 – A4 – A5;	7)A2 – A4 – A5;
4)A1 – A4 – A6;	8)A2 – A4 – A6.

14. Sētā stāv automašīna, kuras numura zīmes pirmie divi cipari ir redzami, bet pēdējie divi ir aizputināti. Kādi var būt šīs numura zīmes pēdējie divi cipari, ja zināms, ka visu ciparu summa ir 7 (skat. 3.2. att.).



3.2. att. **Automašīnas numura zīme**

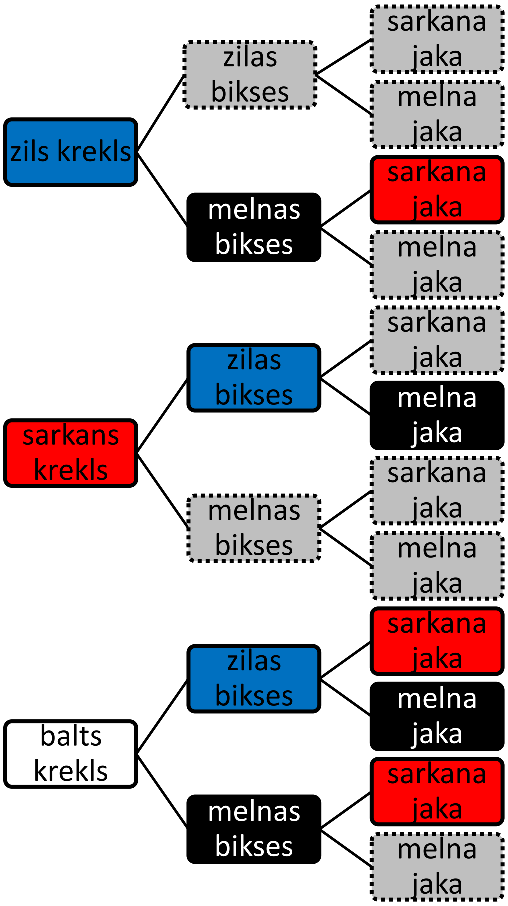
Atbilde. Pēdējie divi cipari var būt 05, 50, 14, 41, 23, 32.

Risinājums**.** Tā kā pirmo divu zināmo ciparu summa ir 2, tad zināms, ka pēdējo divu ciparu summai jābūt 5. Tātad iespējamie ciparu pāri ir 0 un 5, 1 un 4, 2 un 3, no kuriem var izveidot visas iespējamās ciparu kombinācijas.

15. Helvijam ir trīs krekli – zils, sarkans un balts, divas bikses – zilas un melnas, un divas jakas – sarkana un melna. Viņš grib katru dienu iet uz skolu ģērbies citādāk un tā, lai visi uzvilktie apģērbi būtu atšķirīgās krāsās. Cik dienas Helvijs varēs realizēt savu ideju?

Atbilde. Ir pieci veidi kā Helvijs var saģērbties atbilstoši savām vēlmēm.

Risinājums. Izveido koka diagrammu (skat. 3.3. att.), kurā atspoguļo visus iespējamos veidus, kuros Helvijs var apģērbties, un „izslēdz" tos gadījumus, kuros atkārtojas krāsas:



3.3. att. **Helvija iespējamie ģērbšanās veidi**

16. Šobrīd ciematā ir iespēja iegādāties mājas ar mājas numuriem no 1 līdz 50. Izvēlīgais Valfrīds vēlas iegādāties māju jaunajā ciematā, bet viņš nevēlas māju, kuras numurs dalās ar 3 vai 5. Cik māju numuri atbilst Valfrīda prasībām?

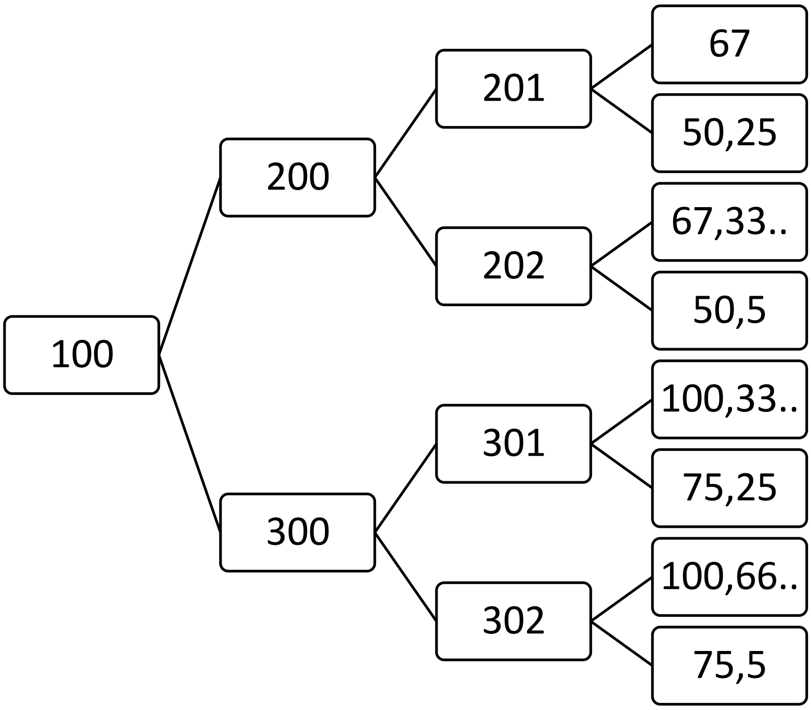
Atbilde. Valfrīda prasībām atbilst 27 šādi numuri.

Risinājums. Aplūko visus skaitļus no 1 līdz 50 un izsvītro tos, kuri dalās ar 3 vai 5. Pāri paliek 27 derīgie māju numuri.

17. Skaitli 100 reizina vai nu ar 2, vai ar 3, tad rezultātu palielina vai nu par 1, vai par 2, pēc tam jauno rezultātu dala vai nu ar 3, vai ar 4 un iegūst naturālu skaitli. Kāds ir iegūtais skaitlis?

Atbilde. Iegūst skaitli 67.

Risinājums. Var veidot koka diagrammu (skat. 3.4. att.), kurā aplūko visus iespējamo darbību rezultātus, un tādā veidā atrod meklēto naturālo skaitli.



3.4. att. **Visu iespējamo darbību rezultāti**

18. Cik dažādos veidos skaitli 50 var izteikt kā divu pirmskaitļu summu? (Piezīme: $x + y$ un $y + x$ nav dažādi veidi)

Risinājums. Aplūko visus pirmskaitļus, kas nepārsniedz 50: 2, **3**, 5, **7**, 11, **13**, 17, **19**, 23, 29, **31**, **37**, 41, **43**, **47**. Skaitli 50 kā divu pirmskaitļu summu var izteikt 4 veidos:

- $50 = 47 + 3$
- $50 = 43 + 7$
- $50 = 37 + 13$
- $50 = 31$ un 19

Pierāda, ka vairāk veidu nav:

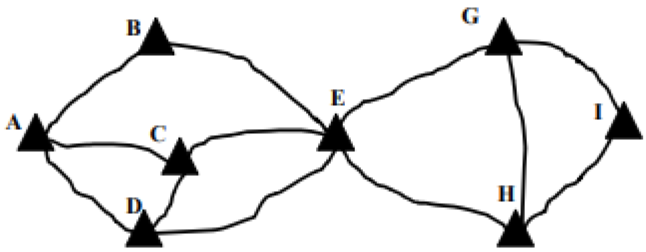
- 41 neder, jo $50 = 41 + 9$; (9 nav pirmskaitlis)
- 29 neder, jo $50 = 29 + 21$; (21 nav pirmskaitlis)
- 23 neder, jo $50 = 23 + 27$; (27 nav pirmskaitlis)
- 17 neder, jo $50 = 17 + 33$; (33 nav pirmskaitlis)
- 11 neder, jo $50 = 11 + 39$; (39 nav pirmskaitlis)
- 5 neder, jo $50 = 5 + 45$; (45 nav pirmskaitlis)
- 2 neder, jo $50 = 2 + 48$; (48 nav pirmskaitlis)

19. Attēlā 3.5. redzams Rūķu ciema plāns. Rūķi dzīvo draudzīgi un šad tad viens otru apciemo. Viņi pastaigājas pa ierastām taciņām, bet nekad, dodoties ciemos, neiet pa vienu un to pašu taciņu turp un atpakaļ un vairākas reizes vienā mājiņā neiegriežas.

a) Cik dažādos veidos rūķītis A var nokļūt pie rūķīša E?

b) Cik dažādos veidos rūķītis E var nokļūt pie rūķīša I ?

c) Cik dažādos veidos rūķītis A var nokļūt pie rūķīša I ?



3.5. att. **Rūķu ciema plāns**

<u>Atbilde.</u> a) 5 veidi; b) 4 veidi; c) 20 veidi.

3.2. Pilnās pārlases izmantošana pierādījuma uzdevumā

Pilnās pārlases metodi visbiežāk izmanto, lai aplūkotu visas konkrētās iespējamās vērtības, līdzīgi 3.1. nodaļā aplūkotajiem uzdevumiem. Bet avots [9] atklāj, ka pilnās pārlases metode var tikt izmantota arī pierādījuma uzdevumos, kuros aplūko visu iespējamo skaitļu vispārīgās formas. Pierādījuma uzdevumos šīs metodes izmantošanas mērķis ir sadalīt kādu konkrētu vispārīgu spriedumu atsevišķās daļās, un pierādīt, ka visiem pieļaujamiem skaitļiem izpildās vai arī neizpildās prasītā īpašība. Šādu paņēmienu var plaši izmantot matemātikas olimpiādēs. Tiks aplūkots viens pierādījuma uzdevums, kurš labi atspoguļo pilnās pārlases metodes izmantošanu pierādījuma uzdevumos.

Uzdevums: Pierādīt, ka jebkura naturāla skaitļa kvadrāts ir uzrakstāms formā $3k$ vai arī $3k+1$.

Piezīme. Šis ir vienkāršs piemērs, kura pierādījumā ir ļoti izdevīgi sadalīt problēmu divos atsevišķos gadījumos un aplūkot tos atsevišķi, jo citādi pierādījumu būtu grūti pamatot. Vispirms naturālo skaitli a izsaka formā $2q + r$, $(q, r \in$ Z), un tad to kāpina kvadrātā. Tad sadala problēmu divos gadījumos un pierāda, ka apgalvojums ir spēkā abos gadījumos.

Pierādījums. Ir zināms, ka katru naturālo skaitli var uzrakstīt formā $3q + 1$ vai $3q + 2$, vai $3q$. Apzīmē: $a = 3q + r$, kur $q \in Z, r \in 0, 1, 2$. Tādēļ

$$a^2 = (3q + r)^2 = 9q^2 + 6qr + r^2 = 3(3q^2 + 2qr) + r^2.$$

Ievēro, ka $(3q^2 + 2qr) \in Z$, jo $q, r \in$ Z

Tālāk apzīmē: $3q^2 + 2qr := k, k \in Z$. Iegūst, ka $a^2 = 3k + r^2$

Aplūko divus gadījumus:

1) $r = 0$ vai $r = 1$, kur uzreiz tiek iegūts prasītais;

2) $r = 2 \rightarrow r^2 = 4$ un tad $a^2 = 3k + 4 = 3k + 3 + 1 = 3(k + 1) + 1$, kas ir nepieciešamā forma.

4. UZDEVUMU KOMPLEKTI SKOLAI

5. klase

1. uzdevums. Tēma: „Naturāli skaitļi”

Uz tāfeles bija rakstīts skaitlis 308. Atnāca Anniņa un pierakstīja ciparu 5 vienā no vietām – pirms skaitļa 308, pēc skaitļa 308 vai starp diviem jau uzrakstītajiem skaitļa 308 cipariem. Kādus skaitļus varēja uzrakstīt Anniņa? Kur Anniņai jāieraksta skaitlis 5, lai iegūtais četrciparu skaitlis būtu vismazākais no visiem iespējamajiem?

2. uzdevums. Tēma: „Parastās daļas”

Andra apgalvo, ka skaitlim 64 ir vairāk dalītāju nekā skaitlim 54. Bet Santa tam nepiekrīt, jo uzskata, ka ir otrādāk. Kurai meitenei ir taisnība? Pierādi to, uzrakstot visus šo skaitļu dalītājus.

3. uzdevums. Tēma: „Skaitļu dalāmība”

Jozefs aizmirsa sava telefona paroles pēdējo ciparu. Palīdzi Jozefam to atcerēties, ja ir zināms, ka telefona paroles veidotais četrciparu skaitlis dalās ar 7, un paroles pirmie trīs cipari ir 5, 9 un 8 tieši šādā secībā!

4. uzdevums. Tēma: „Laukuma mēri. Taisnstūra laukums”

Mājturības stundā meitenēm tika dots uzdevums izgatavot taisnstūra veida piespraudi, kuras laukums ir tieši 36 cm^2, un malu garumi ir veseli skaitļi. Cik dažādu izmēru piespraudes varēja tikt izgatavotas? *Piezīme*. Piespraudes ar izmēriem $a \times b$ un $b \times a$ nav dažādas piespraudes.

Uzdevumu komplekta atrisinājumi ir atrodami 1. pielikumā.

6. klase

1. uzdevums. Tēma: „Ģeometriskās figūras”

Ādamsonu ģimene nolēma savas privātmājas pagalmā izveidot vairākas taisnstūrveida puķudobes, kurām visām perimetrs būtu tieši 18 m. Kāds ir lielākais dažādu izmēru puķudobju skaits, kuras Ādamsonu ģimene var izveidot, ja puķudobes malu garumi ir izsakāmi veselos metros?

Papildjautājums. Kurai puķudobei būs vislielākais laukums?

2. uzdevums. Tēma: „Naturālie skaitļi, to īpašības”

Lai samazinātu laiku, kuru Marks pavada internetā, viņa vecāki mājas internetam nomainīja paroli. Vienīgais pavediens, ko vecāki atklāja Markam, bija tas, ka parole sastāv no visiem augošā secībā sakārtotiem divciparu skaitļiem, kuriem desmitu cipars ir par 7 lielāks nekā vienu cipars. Kāda bija šī parole?

3. uzdevums. Tēma: „Naturālie skaitļi, to īpašības”

Sētā stāv automašīna, kuras numura zīmes pirmie divi cipari ir redzami, un tie ir 20, bet pēdējie divi ir aizputināti. Kādi var būt šīs numura zīmes pēdējie divi cipari, ja zināms, ka visu ciparu summa ir 7?

4.uzdevums. Tēma: „Naturālie skaitļi, to īpašības”

Šobrīd ciematā ir iespēja iegādāties mājas ar mājas numuriem no 1 līdz 50. Izvēlīgais Manfrēds vēlas iegādāties māju jaunajā ciematā, bet viņš nevēlas māju, kuras numurs dalās ar 3 vai 5. Cik māju numuri atbilst Manfrēda prasībām?

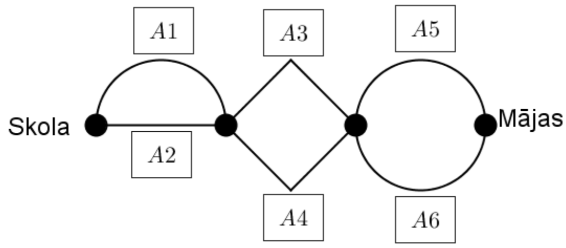
Uzdevumu komplekta atrisinājumi ir atrodami 2. pielikumā.

7. klase

Tēma: „Kā nosaka kopas visus elementus, aprēķina notikuma varbūtību?”

1.uzdevums.

Cik dažādos veidos Maija no skolas var aiziet uz mājām, ja pa katru ceļu var iet tikai vienu reizi (skat. 4.1. att.)? Uzraksti visus iespējamos ceļus, izmantojot dotos apzīmējumus!



4.1. att. **Ceļš no skolas uz māju**

2.uzdevums.

Bruno ir trīs krekli – zils, sarkans un balts, divas bikses – zilas un melnas, un divas jakas – sarkana un melna. Viņš grib katru dienu iet uz skolu ģērbies citādāk. Uzraksti visus iespējamos Bruno ģērbšanās veidus! Cik dienas Bruno varēs realizēt savu ideju tā, lai visi uzvilktie apģērbi būtu atšķirīgās krāsās?

3.uzdevums.

Kārlis iepriekšējā vakarā izpildīja matemātikas uzdevumu, bet aizmirsa to paņemt līdzi uz skolu. Lai izvairītos no nesekmīga vērtējuma viņam ir jāatceras skaitlis, kuru ieguva uzdevuma beigās. Diemžēl Kārlis atceras tikai to, ka vispirms skaitli 100 reizināja vai nu ar 2, vai ar 3, tad rezultātu palielināja vai nu par 1, vai par 2, un pēc tam jauno rezultātu dalīja vai nu ar 3, vai ar 4 un rezultāts bija naturāls skaitlis. Palīdzi Kārlim atcerēties iegūto skaitli!

Uzdevumu komplekta atrisinājumi ir atrodami 3. pielikumā.

8. klase

1.uzdevums.

Malvīne uz tāfeles uzrakstīja visus skaitļus no 1 līdz 100, un vēlējās ar dažādām krāsām apvilkt tos skaitļus, kuriem ciparu summa ir lielāka par 13. Vai viņai pietiks ar 14 krāsu krītiņiem, lai katru skaitli apvilktu savā krāsā?

2.uzdevums.

Katram skolēnam skolā ir savs skapītis, kuru var atvērt tikai tad, ja izveido pareizu trīsciparu kodu. Linda pēc pavasara brīvlaika bija aizmirsusi sava skapīša kodu, bet zina, ka tika izmantoti cipari 1, 3, 5, turklāt katrs tikai vienu reizi. Cik un kādus skapīša kodus Lindai vajag pārbaudīt, lai noteikti spētu atvērt savu skapīti?

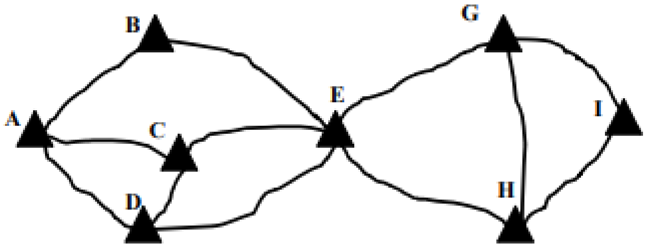
3.uzdevums

4.2. attēlā redzams Rūķu ciema plāns. Rūķi dzīvo draudzīgi un šad tad viens otru apciemo. Viņi pastaigājas pa ierastām taciņām, bet nekad, dodoties ciemos, neiet pa vienu un to pašu taciņu turp un atpakaļ un vairākas reizes vienā mājiņā neiegriežas.

a) Cik dažādos veidos rūķītis A var nokļūt pie rūķīša E?

b) Cik dažādos veidos rūķītis E var nokļūt pie rūķīša I ?

c) Cik dažādos veidos rūķītis A var nokļūt pie rūķīša I ?



4.2. att. **Rūķu ciema plāns**

Uzdevumu komplekta atrisinājumi ir atrodami 4. pielikumā.

9. klase

1.uzdevums Tēma: „Kombinatorikas elementi”

Mārcis vēlas izveidot četrciparu skaitli, kas sastāvētu no cipariem 1; 2; 3; 4. Cik un kādus dažādus četrciparu skaitļus Mārcis var izveidot, lai tas būtu pāra skaitlis un visi cipari būtu dažādi?

2.uzdevums Tēma: „Kombinatorikas elementi”

Melnbārdis un Baltbārdis no Gudro Rūķu ciemata vēlas spēlēt spēli. Melnbārdis ir iedomājies nepāra skaitli, kuram pirmais cipars ir 3 vai 5, otrais cipars ir 7 vai 8, trešais cipars ir 1, 3 vai 6, un ir zināms, ka šis skaitlis dalās ar trīs. Vai gudrajam Baltbārdim pietiks ar diviem minējumiem, lai noteikti spētu uzminēt šo skaitli? Kādi būs viņa minējumi?

3.uzdevums Tēma: „Skaitļu virknes”

Stundas laikā katrs skolēns pēc kārtas pa vienam gāja pie tāfeles un uzrakstīja skaitli, kas ir par pieci lielāks vai arī par trīs mazāks nekā iepriekšējais skaitlis. Kādi ir iespējamie skaitļi, kurus varētu būt uzrakstījis sestais skolnieks, ja pirmie trīs skolnieki uz tāfeles ir uzrakstījuši: 25; 22; 27?

Uzdevumu komplekta atrisinājumi ir atrodami 5. pielikumā.

10. klase

1.uzdevums

Uz tāfeles bija uzrakstīts trīsciparu skaitlis. Marko nosvītroja šī skaitļa pirmo ciparu, bet viņa klasesbiedrs Polo iegūto divciparu skaitli pareizināja ar septiņi un ieguva sākotnējo trīsciparu skaitli. Kāds trīsciparu skaitlis bija rakstīts uz tāfeles pašā sākumā?

2.uzdevums

Matemātiķis Bobs savai jaunajai mašīnai vēlas pasūtīt īpašu numura zīmi, kuras pirmo daļu veido burti MB, bet otro daļu veido divi augošā secībā uzrakstīti pirmskaitļi, kurus saskaitot tiek iegūts skaitlis 50. Cik daudz dažādu automašīnu numuru atbilst Boba prasībām?

3.uzdevums

Vietējās šaha sacensībās piedalās Ede, Nils, Rūdolfs, Santa, Andra un Laura. Turnīra laikā katram dalībniekam bija jāspēlē ar visiem pārējiem dalībniekiem. Uzraksti visus iespējamo spēļu partnerus un nosaki, cik šaha partijas kopā tika izspēlētas!

Uzdevumu komplekta atrisinājumi ir atrodami 6. pielikumā.

11. klase

<u>1.uzdevums</u>

Fanija un Sanija nolēma atrast visus divciparu skaitļus, kuri ir vienādi ar savu ciparu summas kvadrātu. Fanija atrada tikai vienu šādu skaitli, bet Sanija apgalvo, ka ir vismaz divi šādi skaitļi. Kurai no meitenēm ir taisnība? Atrodi visus šādus skaitļus!

<u>2.uzdevums</u>

Briežu ģimene plāno piedzīvojumu braucienu pa Latviju. Ceļojumu plānots sākt Rīgā un beigt vecmāmiņas mājās Valmierā. Ģimenei jāizvēlas, kā doties uz Valmieru: caur Cēsīm, kur iespējams piedalīties sarunu festivālā Lampa, vai caur Tūju, kur var pārnakšņot teltī pie jūras. Cik un kādos dažādos veidos var saplānot šo ceļojumu, ja pirmo ceļojuma daļu var veikt ar vilcienu vai autobusu, bet otro daļu ar vilcienu, autobusu vai velosipēdu.

<u>3.uzdevums</u>

Lai saņemtu slepeno sūtījumu ir jāievada četru dažādu ciparu kods. Ir pieļaujami tikai trīs mēģinājumi, citādi sūtījums pašiznīcināsies. Ir zināms, ka šis skaitlis sastāv no cipariem 2; 3; 6; 7, un tas dalās ar 7. Vai ar doto informāciju pietiks, lai spētu saņemt slepeno sūtījumu?

Uzdevumu komplekta atrisinājumi ir atrodami 7. pielikumā.

12. klase

1.uzdevums. Laikrakstā „Matemātiķa dzīve" reiz tika norādīts, ka visīpašākie cilvēka dzīves gadi ir tie, kuros cilvēka vecuma veidotā skaitļa ciparu kvadrātu summa dalās ar 13. Cik šādus gadus savas dzīves laikā ir piedzīvojis cilvēks, kuram šobrīd ir 100 gadi?

2.uzdevums. 12.klases skolēns Intars izaicināja savu klasesbiedru Kristapu atrast visus divciparu skaitļus, kuriem piemīt šāda īpašība: ja skaitļa ciparu summai pieskaita šīs summas kvadrātu, tad iegūst pašu skaitli. Kristaps atbildēja, ka spēj atrast tikai trīs šādus skaitļus. Vai Kristaps bija atradis visus skaitļus? Kādi ir šie skaitļi?

3.uzdevums. Rūdolfs uzzināja, ka katru naturālo skaitli a var uzrakstīt formā $3q + r$, kur $q \in Z, r \in 0, 1, 2$. Mazliet to apdomājis viņš apgalvoja, ka jebkura naturāla skaitļa kvadrāts ir uzrakstāms formā $3k$ vai arī $3k + 1$, kur $k \in Z$. Pierādi, ka viņam ir taisnība!

Uzdevumu komplekta atrisinājumi ir atrodami 8. pielikumā.

5. IZSTRĀDĀTO UZDEVUMU KOMPLEKTU APROBĀCIJA SKOLĀ

Lai spētu novērtēt iepriekšējā nodaļā izstrādāto uzdevumu komplektu efektivitāti katrā klašu grupā no 5. līdz 12. klasei, tika vadītas mācību stundas, kuru mērķis bija skolēnos veidot zināšanas par pilnās pārlases metodes būtību un pilnveidot skolēnu prasmes izmantot pilnās pārlases metodi uzdevumu risināšanā. Atbilstoši katrai klašu grupai skolēniem tika doti iepriekš izstrādāti uzdevumi, kurus var atrisināt ar pilnās pārlases metodi. Ar šo mācību stundu palīdzību tika novērtēta katra uzdevuma grūtības pakāpe atkarībā no laika, kas nepieciešams, lai paveiktu uzdevumu. Atbilstoši tam, cik skolēniem izdevās paveikt uzdevumu, tika novērtēta katra uzdevuma efektivitāte pilnās pārlases metodes apguvē. Tāpat tika arī noskaidrots skolēnu viedoklis, vai konkrētais uzdevums ir palīdzējis apgūt pilnās pārlases metodes lietošanas principus.

Izstrādāto uzdevumu komplektu aprobācijai tika izvēlēta Rīgas Centra humanitārā vidusskola. Mācību stundas tika vadītas 2021. gada pavasarī, kad valstī izsludinātās epidemioloģiskās situācijas dēļ mācības tika organizētas attālināti. Sadarbība tika veidota ar pieciem šīs skolas matemātikas skolotājiem, kuri arī paši piedalījās visās viņu mācāmo klašu mācību stundās, kuras notika šī pētījuma ietvaros. Rīgas Centra humanitārajā vidusskolā šajā mācību semestrī ir noteikts, ka tiešsaistes stundas 5.–7. klašu skolēniem notiek izmantojot ZOOM platformu, bet 8.–12. klašu skolēniem tiešsaistes mācību stundas notiek Microsoft Teams platformā. Atšķirība starp dažādajām tiešsaistes stundu platformām neradīja sarežģījumus, kas traucētu veikt uzdevumu pārbaudīšanu katrā klašu grupā.

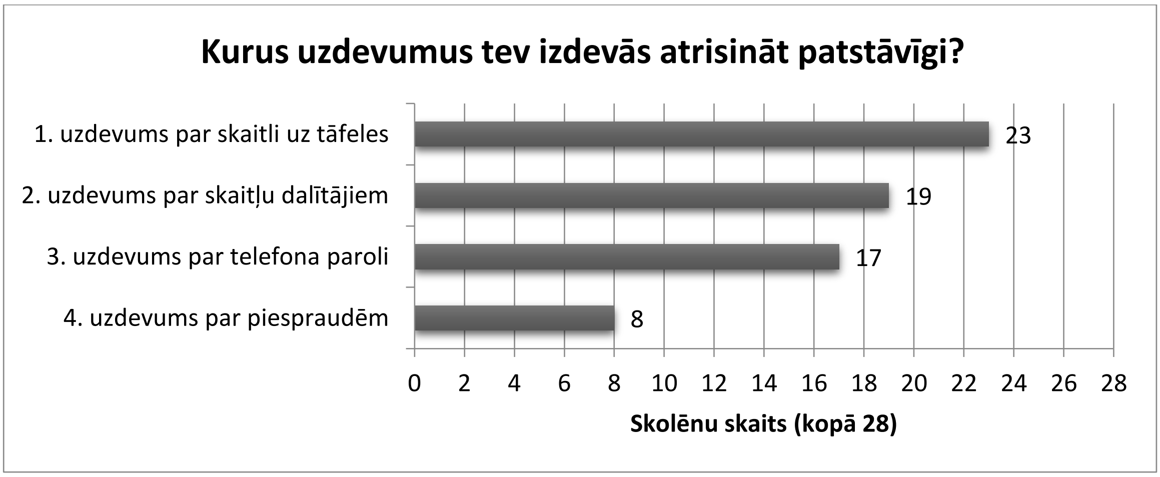
Visas vadītās mācību stundas par pilnās pārlases metodi tika plānotas un īstenotas pēc līdzīga stundas plāna. Aktualizācijā skolēni tika iepazīstināti ar pētījumu un tā autoru. Tālāk stundas ievadā skolēniem tika izskaidrota pilnās pārlases metodes būtība un sniegti uzdevumu piemēri, kuros šī metode ir pielietojama. Katrā klašu grupā tika uzsvērts, ka ir ļoti svarīgi visus iespējamos gadījumus aplūkot sistemātiski, jeb vadīties pēc kāda principa, kas palīdz nepalaist garām kādu no gadījumiem. Apjēgšanas daļā skolēniem tika doti daži vienkārši uzdevumu piemēri, no kuriem vajadzēja atrast tos, kurus var atrisināt ar pilnās pārlases metodi. Tika arī aplūkoti šo uzdevumu atrisinājumi.

Pēc stundas ievada sekoja galvenā stundas daļa, kurā skolēniem uz ekrāna pa vienam pēc kārtas tika parādīti uzdevumi. Tika uzņemts laiks, kurā pirmais skolēns spēj izpildīt uzdevumu un iegūt pareizu rezultātu. Tas tika fiksēts brīdī, kad kāds no skolēniem ieslēdza mikrofonu un pateica, ka ir ieguvis atbildi, vai tērzēšanas sadaļā atsūtīja iegūto rezultātu. No šī brīža tika uzņemts laiks 2 minūtes, kuru laikā arī pārējiem skolēniem bija iespēja pabeigt uzdevumu patstāvīgi un par to ziņot stundas vadītājam. Šādā veidā tika fiksēts skolēnu skaits, kuri ir ieguvuši atbildi šo divu minūšu laikā. Tas pats princips tika izmantots arī visiem pārējiem uzdevumiem no atbilstošā uzdevumu komplekta. Pēc katra uzdevuma tika izrunāts uzdevuma risinājums, akcentējot pilnās pārlases metodi, kas atklājas risinājumā. Pēc visu uzdevumu izpildīšanas, skolēni tika aicināti aizpildīt Google Forms aptauju (skat. 9. pielikumu), kuras mērķis bija iegūt atgriezenisko saiti no visiem skolēniem par katra uzdevuma efektivitāti pilnās pārlases metodes apgūšanā. Aptaujā tika arī noskaidrots ar kādām grūtībām saskārās skolēni pildot uzdevumus, un kādus uzlabojumus savā darbā, viņuprāt, varētu veikt, lai veiksmīgāk spētu izmantot pilnās pārlases metodi šajos uzdevumos.

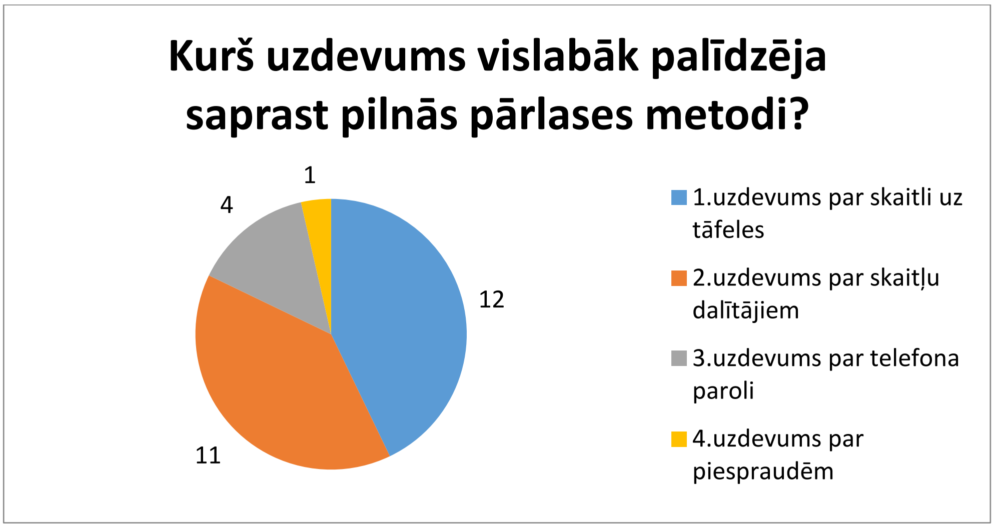
Tālāk tiks aplūkoti mācību stundu rezultāti un secinājumi par katras klašu grupas uzdevumu komplektu efektivitāti un lietderību pilnās pārlases metodes apguvē. Pie uzdevumiem iekavās tiks norādīta grūtības pakāpe (GP), kuru iegūst, izdalot skolēnu skaitu, kuri uzdevumu paveica, ar visu kopējo skolēnu skaitu.

5. klase. Stundā piedalījās 28 skolēni. No matemātikas skolotājas jau iepriekš tika noskaidrots, ka mācību gada laikā skolēni jau ir apguvuši tās tēmas par kurām ir sagatavoti uzdevumi. Tas palīdzēja skolēniem ieraudzīt un atšķirt pilnās pārlases metodi no citiem iepriekš apgūtiem uzdevumu risināšanas paņēmieniem, kas tika izmantotas, piemēram, tēmā par taisnstūra laukumu.

Mācību stundā tika novērots, ka uzdevumi jau sākotnēji bija ļoti labi sakārtoti grūtības pakāpei pieaugošā secībā. Visvieglākais uzdevums (GP=0,82), kuru patstāvīgi izdevās atrisināt 23 skolēniem, ir bijis 1. uzdevums par skaitli uz tāfeles (skat. 5.1. attēlu). Skolēni aptaujā arī norādīja, ka tieši šis uzdevums ļoti labi palīdzējis viņiem saprast pilnās pārlases metodi. Arī 2. uzdevums (GP=0,68) skolēnu vērtējumā ir bijis vienlīdz efektīvs (skat. 5.2. attēlu). Bet visgrūtākais uzdevums ir bijis 4. uzdevums (GP=0,29).



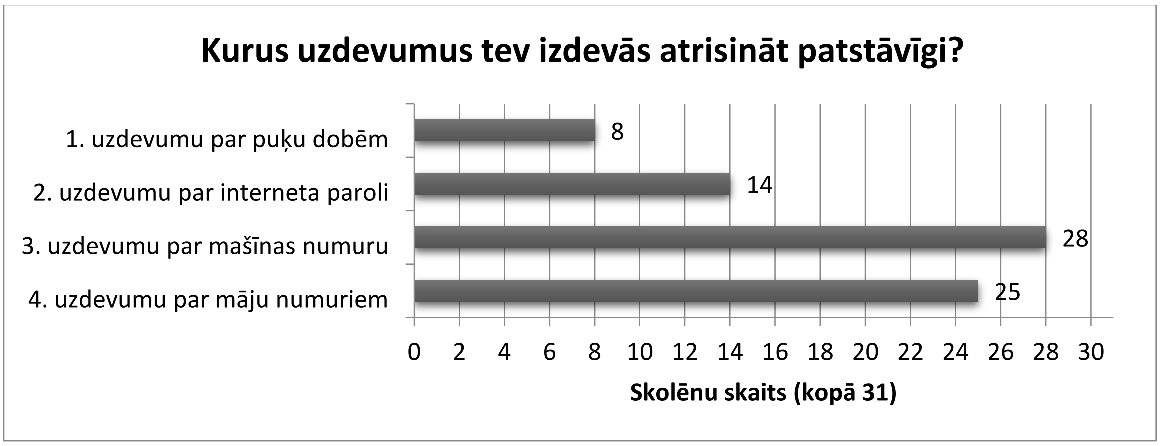
5.1. att. **Kurus uzdevumus tev izdevās atrisināt patstāvīgi? 5.klase**



5.2. att. **Kurš uzdevums vislabāk palīdzēja saprast pilnās pārlases metodi? 5.klase**

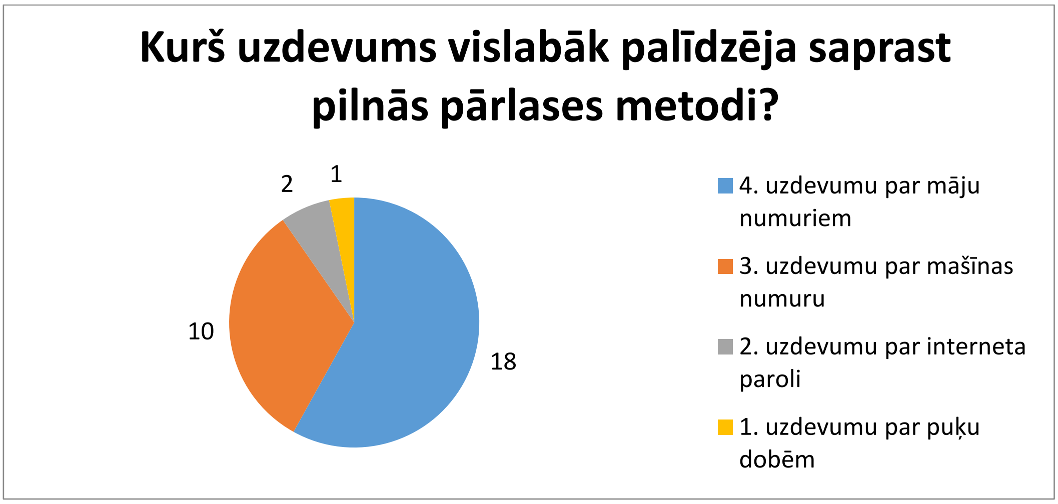
Skolēni aptaujā norādīja, ka lielākās grūtības pilnās pārlases metodes izmantošanā ir sagādājis pēdējais uzdevums par piespraužu veidošanu. Lielākoties skolēni ir mēģinājuši minēt tikai atsevišķus gadījumus, bet nav spējuši tos uzskaitīt pēc kārtas. Šī iemesla dēļ skolēniem ir gadījies izlaist kādu no iespējamiem gadījumiem. Skolēni atzīst, ka to varētu uzlabot, ja gūtu lielāku pieredzi šīs metodes pielietošanā.

6.klase. Stundā piedalījās 31 skolēns, kuri uzreiz izrādīja interesi uzzināt kaut ko jaunu par pilnās pārlases metodi. Visvieglākais uzdevums šai klasei bija 3. uzdevums par mašīnas numuru (GP=0,9). Viens skolēns uzdevumu paveica 20 sekunžu laikā, bet nākamās minūtes laikā uzdevumu bija paveikuši jau 16 skolēni. Bet kopā bija 28 skolēni, kas stundas beigās norādīja, ka ir patstāvīgi spējuši izpildīt 3. uzdevumu (skatīt 5.3. attēlu). Interesanti, ka, lai gan skolēniem 4. uzdevums prasīja visvairāk laika, lielai daļai to izdevās atrisināt patstāvīgi. Grūtākais uzdevums šajā uzdevumu komplektā izrādījās 1. uzdevums (GP=0,26), jo trīs minūšu laikā uzdevumu bija pabeiguši tikai divi skolēni, bet kopumā tikai astoņi norādīja, ka ir spējuši uzdevumu atrisināt.



5.3. att. **Kurus uzdevumus tev izdevās atrisināt patstāvīgi? 6.klase**

Skolēni aptaujā ir norādījuši, ka visefektīvākais uzdevums pilnās pārlases metodes apguvē viņiem ir bijis 4. uzdevums par māju numuriem (skat. 5.4. attēlu). Tas skaidrojams ar vienkāršo uzdevuma saturu, kas diezgan skaidri atklāj veidu, kā to atrisināt ar pilnās pārlases paņēmienu. Vēl daudzi skolēni kā noderīgu uzdevumu ir norādījuši 3. uzdevumu par mašīnas numuriem. Taču jāņem vērā, ka šis ir bijis ļoti viegls uzdevums, kuru gandrīz visiem izdevās atrisināt. Daži skolēni stundas laikā norādīja, ka nav sapratuši, kur 3. uzdevumā tiek pielietota vajadzīgā metode, jo ir rīkojušies intuitīvi, nevadoties pēc kādas konkrētas risināšanas metodes.



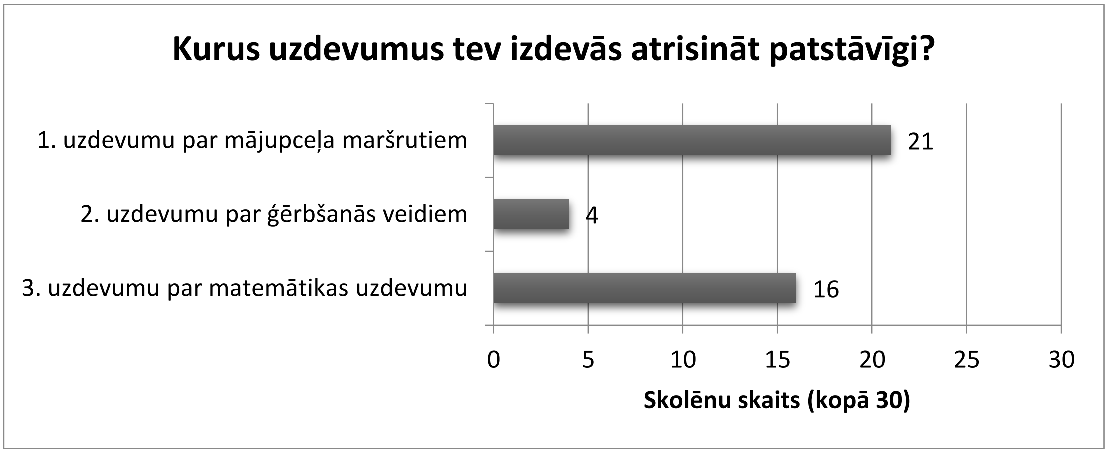
5.4. att. **Kurš uzdevums vislabāk palīdzēja saprast pilnās pārlases metodi? 6.klase**

Uz jautājumu par to, kas skolēniem ir sagādājis vislielākās grūtības, vairāki skolēni norādīja, ka ir bijuši uzdevumi, kuriem iesākumā nav sapratuši nosacījumus. Daudziem radās problēmas sistemātiski uzrakstīt visus iespējamos gadījumus, nepalaižot kādu garām. Pēc skolēnu domām, šīs problēmas atrisināmas, vairāk risinot citus līdzīgus uzdevumus. Tika arī norādīta vajadzība pēc skices veidošanas un vēlme veltīt vairāk laika katram uzdevumam.

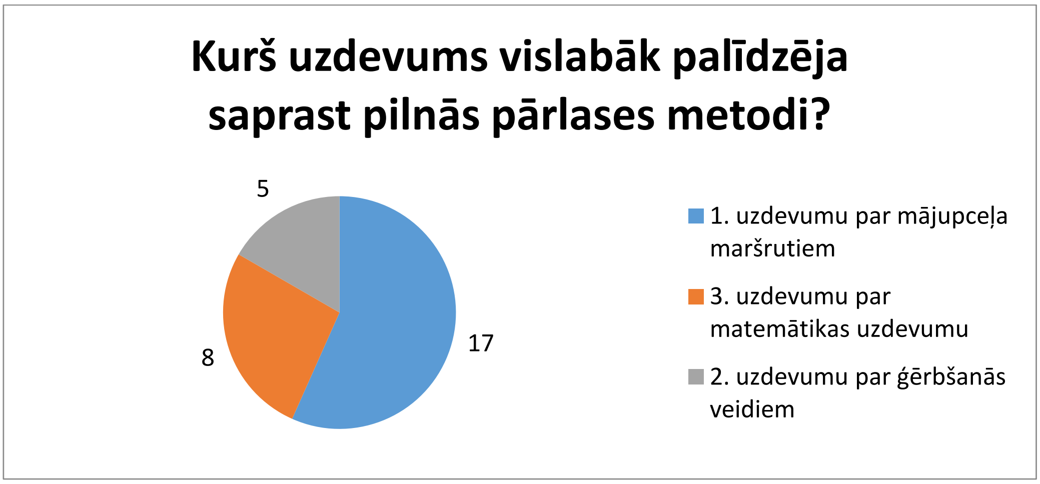
7.klase. Stundā piedalījās 30 skolēni, kuri attālināto mācību režīma dēļ šajā mācību gadā vēl nebija paspējuši apgūt tēmu „Kā nosaka kopas visus elementus, aprēķina notikuma varbūtību?”, ko paredz jaunais mācību standarts. Tas nozīmē, ka skolēni vēl neprata izmantot koka diagrammu, lai strukturētu informāciju. Tas apgrūtināja uzdevuma komplekta pārbaudi, jo divos no trim uzdevumiem ir paredzēts, ka skolēni veido koka diagrammu.

Skolēnu iepriekšējās zināšanas ļoti iespējams šajā reizē bija noteicošais faktors, kura dēļ skolēniem vislabāk ir izdevies atrisināt 1. uzdevumu (GP=0,7) par iespējamo ceļu veidošanu (skat. 5.5. attēlu). Skolēnu vērtējumā tas ir bijis arī pietiekoši efektīvs, lai apgūtu pilnās pārlases metodi (skat. 5.6. attēlu). Otrais uzdevums skolēniem ir bijis vissarežģītākais

(GP=0,13), jo tas aizņēma aptuveni sešas minūtes, lai pirmais skolēns būtu paveicis uzdevumu, bet pārējai klasei tas prasīja daudz vairāk laika. Pēc 2. uzdevuma risinājuma izrunāšanas skolēniem daudz vieglāk bija izpildīt 3. uzdevumu. Stundas noslēgumā tika secināts, ka skolēniem pirms šo uzdevumu risināšanas ir nepieciešams vairāk apgūt koka diagrammas veidošanu.

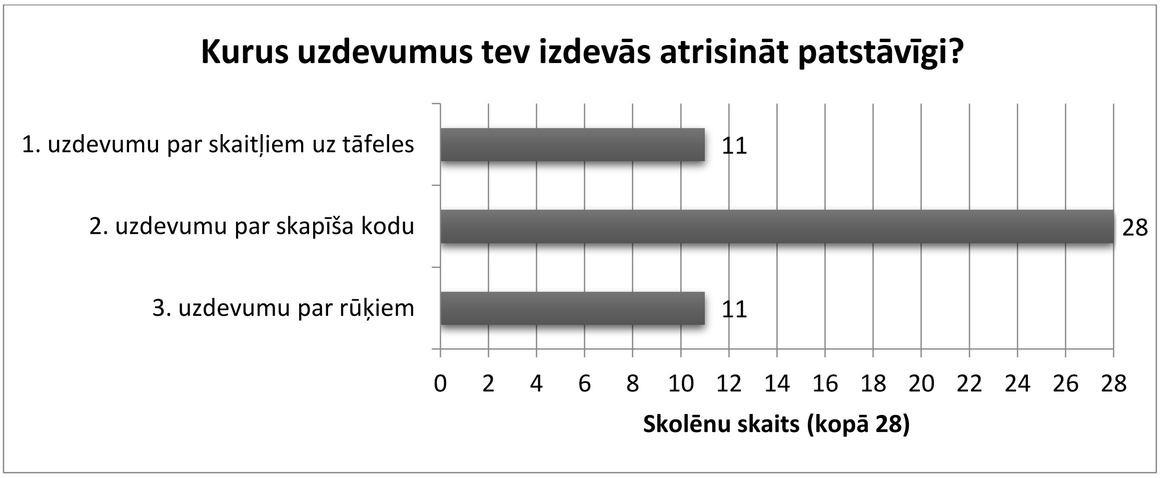


5.5. att. **Kurus uzdevumus tev izdevās atrisināt patstāvīgi? 7.klase**



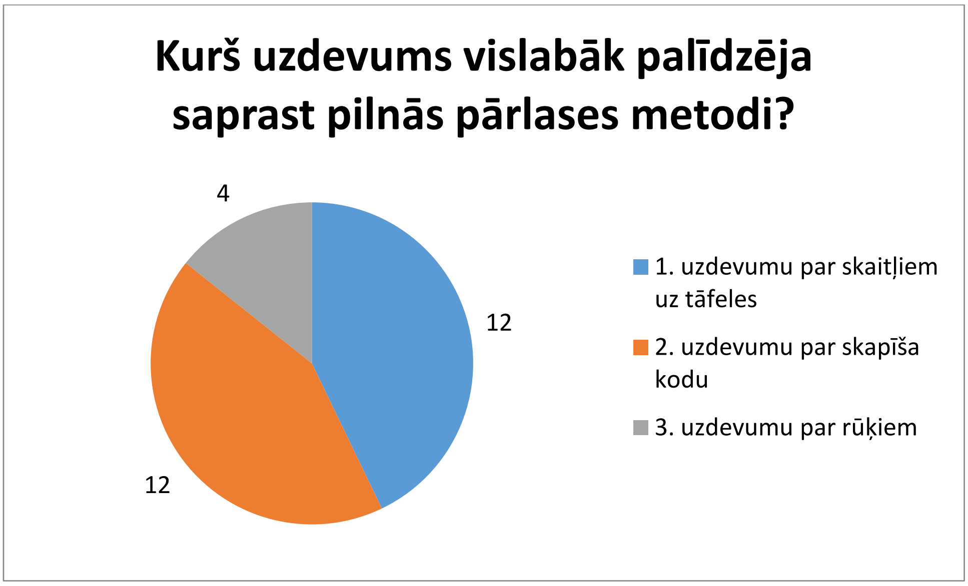
5.6. att. **Kurš uzdevums vislabāk palīdzēja saprast pilnās pārlases metodi? 7.klase**

8.klase. Stundā piedalījās 28 skolēni. Stundas ievadā kā paraugs pilnās pārlases veikšanai tika parādīts uzdevums, kurš pēc būtības ir līdzīgs 2. uzdevumam no uzdevuma komplekta. Šo piemēru skolēni bija ļoti labi sapratuši, jo 2. uzdevumu patstāvīgi spēja izpildīt pilnīgi visi skolēni (skat. 5.7. attēlu). Līdz ar to šis uzdevums ir bijis ļoti viegls (GP = 1). Uzdevumu varētu padarīt sarežģītāku, ja palielinātu izmantojamo ciparu skaitu, piemēram, dodot četrus vai piecus ciparus no kuriem jāizveido kods. Pirmais un trešais uzdevums ir bijuši vienādi grūti (GP=0,39). Tos spēja atrisināt 11 skolēni.



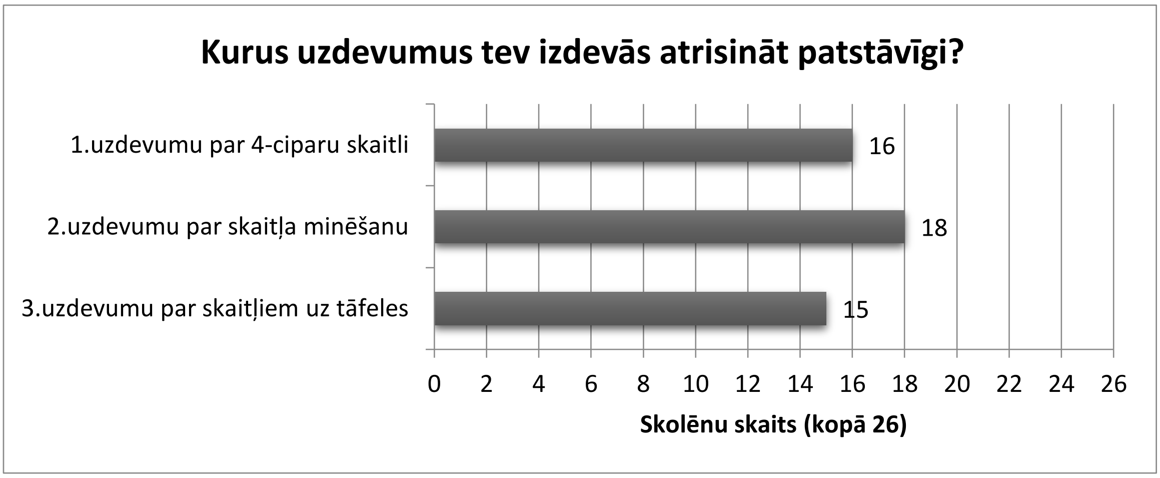
5.7. att. **Kurus uzdevumus tev izdevās atrisināt patstāvīgi? 8.klase**

Vislabāk saprast pilnās pārlases metodi ir palīdzējuši 1. uzdevums un 2. uzdevums. (skat. 5.8. attēlu) Šeit jāņem vērā, ka pirmajos divos uzdevumos skolēniem bija jādarbojas ar konkrētiem skaitļiem, kurus ir daudz vieglāk sistemātiski uzrakstīt. Bet trešajā uzdevumā bija dots grafs, kurā nācās meklēt jaunus veidus kā saskaitīt vizuāli dotos gadījumus.



5.8. att. **Kurš uzdevums vislabāk palīdzēja saprast pilnās pārlases metodi? 8.klase**

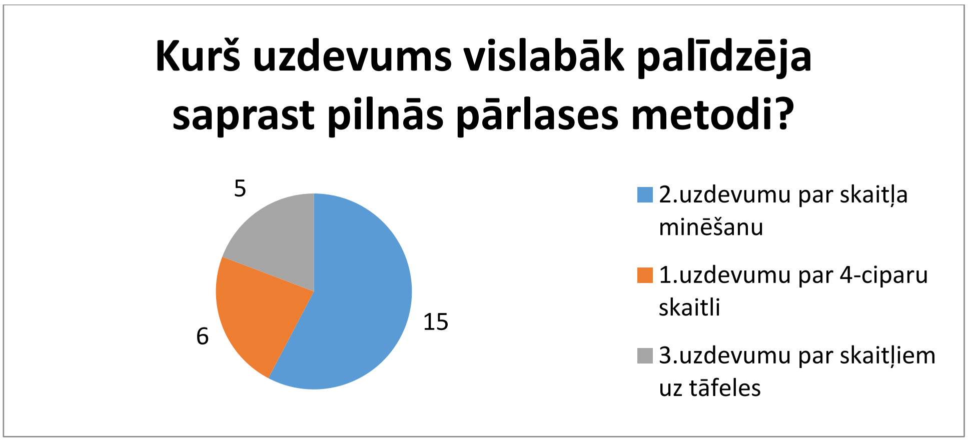
9.klase. Stundā piedalījās 26 skolēni, kuri nesen bija pabeiguši mācīties tēmu „Kombinatorikas un varbūtību teorijas elementi”, bet vēl nebija apguvuši skaitļu virknes. Taču tas netraucēja pārbaudīt šo uzdevumu komplektu. Pēc skolēnu aptaujas rezultātiem un stundā novērotā var secināt, ka visi trīs uzdevumi ir ar vidēju grūtības pakāpi, kas ir intervālā no 0,58 līdz 0,69. Ātrākais laiks, kurā tika atrisināts 3. uzdevums bija 2 minūtes un 50 sekundes, kas ir tikai par pāris sekundēm ātrāk nekā tika atrisināts 1. un 2. uzdevums. Arī atlikušajās divās minūtes katru uzdevumu bija izpildījis līdzīgs skolēnu skaits (vidēji 10 skolēni). Aptaujas rezultāti liecina, ka katru uzdevumu patstāvīgi ir spējuši atrisināt 15 – 18 skolēni (skat. 5.9. attēlu).



5.9. att. **Kurus uzdevumus tev izdevās atrisināt patstāvīgi? 9.klase**

Par noderīgāko uzdevumu pilnās pārlases metodes apgūšanas procesā vairāk kā puse jeb 58% skolēnu ir norādījuši otro uzdevumu (skat. 5.10. attēlu), kurā varēja veidot koka diagrammu, lai aplūkotu visus iespējamos skaitļus, un no tiem atlasītu vajadzīgo. Viens no iemesliem, kas varētu būt palīdzējis otrajam uzdevumam izpelnīties šādu novērtējumu, ir iepriekš pildītais pirmais uzdevums, kura risinājums ar koka diagrammu ir līdzīgs otrā uzdevuma risinājumam. Pārrunājot pirmā uzdevuma atrisinājumu ar pilnās pārlases metodi, skolēni daudz pārliecinošāk spēja atrisināt otro uzdevumu.

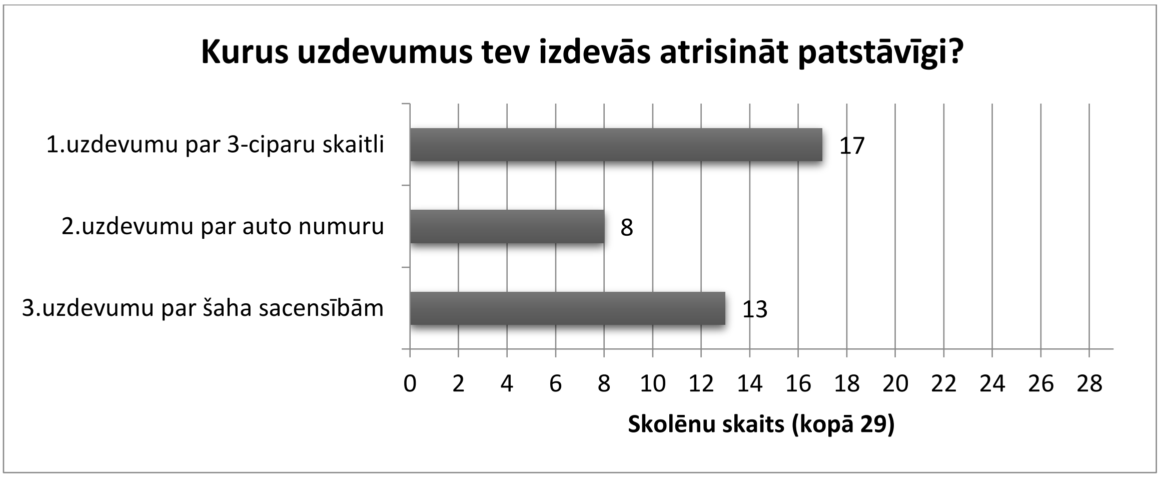
Šai klasei izteiktas grūtības sagādāja lasītprasme. Aptaujā vairāki skolēni norādīja, ka ir pārpratuši uzdevumus, jo nebija rūpīgi izlasīti nosacījumi, kā rezultātā risinājumā skolēniem radās grūtības uzrakstīt visus iespējamos gadījumus. Vēlāk matemātikas skolotājs norādīja, ka šai klasei arī citās skolā apgūstamajās matemātikas tēmās ir parādījušās grūtības ar teksta uzdevumu risināšanu, kas norāda uz nepieciešamību attīstīt lasītprasmi, lai mācētu strukturēt doto informāciju.



5.10. att. **Kurš uzdevums vislabāk palīdzēja saprast pilnās pārlases metodi? 9.klase**

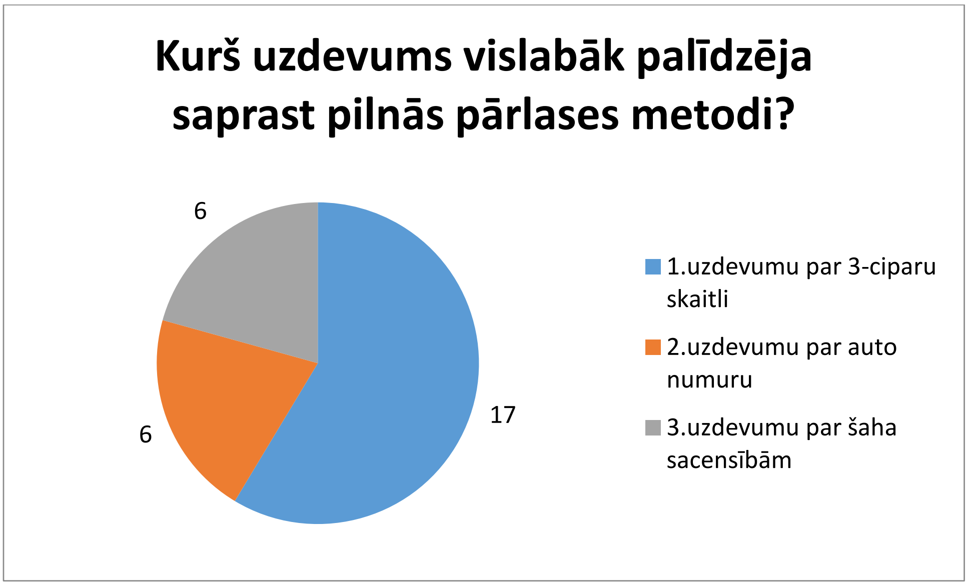
10.klase. Mācību stundā piedalījās 29 skolēni. Daži no tiem stundas sākumā atbildēja, ka ir jau kaut ko dzirdējuši par pilnās pārlases metodi. Lai sagatavotu skolēnus izmantot pilnās pārlases metodi, vispirms tika atgādināti ieguvumi no tabulas veidošanas, un tika uzsvērts, ka labi izveidota tabula var palīdzēt strukturētā veidā aplūkot visus iespējamos gadījumus.

Spriežot pēc aptaujas rezultātiem, visvairāk skolēniem ir izdevies patstāvīgi atrisināt 1. uzdevumu (GP=0,59), kurā bija jāatrod vajadzīgais trīsciparu skaitlis (skat. 5.11. attēlu). Viens no skolēniem, kas bija arī ātrākais risinātājs, uzdevumu atrisināja aptuveni deviņās minūtēs, kamēr vairākiem citiem skolēniem pietrūka laiks, lai pabeigtu uzdevumu. Visgrūtākais ir bijis 2. uzdevums (GP=0,26), kuru atrisināja tikai astoņi skolēni. Vairāki skolēni norādīja, ka šajā uzdevumā viņiem bija grūtības atrast veidu kā pārbaudīt, vai ir atrasti visi iespējamie gadījumi.



5.11. att. **Kurus uzdevumus tev izdevās atrisināt patstāvīgi? 10.klase**

Lielākā daļa skolēnu kā efektīvāko uzdevumu pilnās pārlases metodes apguvē šajā uzdevumu komplektā ir izvirzījuši pirmo uzdevumu (skat. 5.12. attēlu). To var skaidrot ar nepieciešamību veidot tabulu, kurā tiek aplūkoti visi iespējamie skaitļi. Šāds uzdevums ļoti labi atspoguļo pilnās pārlases metodes būtību. Pārējie divi uzdevumi skolēnu vērtējumā ir bijuši vienlīdz efektīvi. Protams jāņem vērā tas, ka 3. uzdevumam nedaudz pietrūka laika mācību stundas ietvaros, lai tā risinājumu paspētu izrunāt. Iespējams, ja uzdevuma risinājumu būtu paspējuši apskatīt, tad arī 3. uzdevums varētu vairāk palīdzēt skolēniem izprast pilnās pārlases metodi.

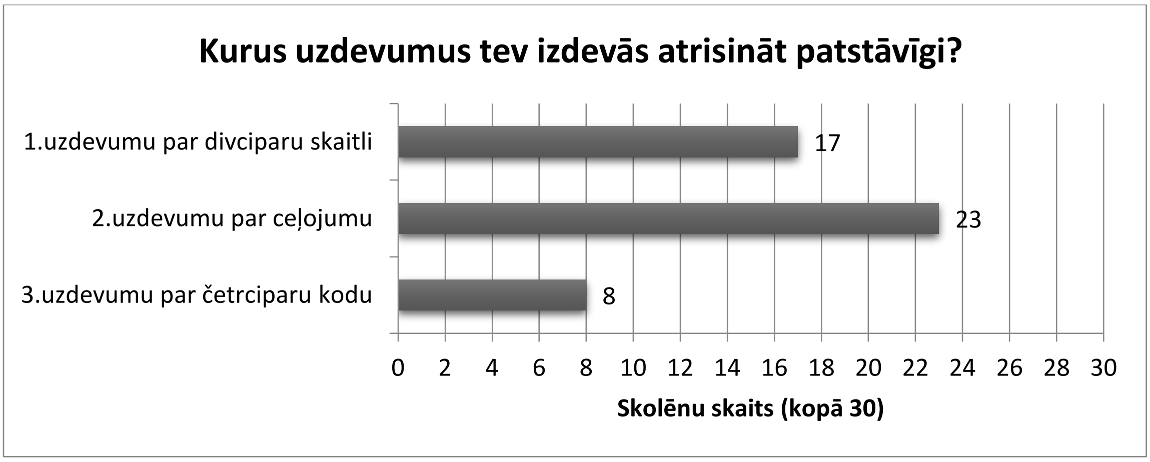


5.12. att. **Kurš uzdevums vislabāk palīdzēja saprast pilnās pārlases metodi? 10.klase**

11.klase. Mācību stundā piedalījās 30 skolēni. Lai dotu viņiem vairāk laika uzdevumu risināšanai, stundas ievadā skolēni tika iepazīstināti ar pilnās pārlases metodi, un veidiem kā var apkopot visus gadījumus (tabula, koka diagramma), bet netika aplūkoti konkrēti uzdevumu piemēri.

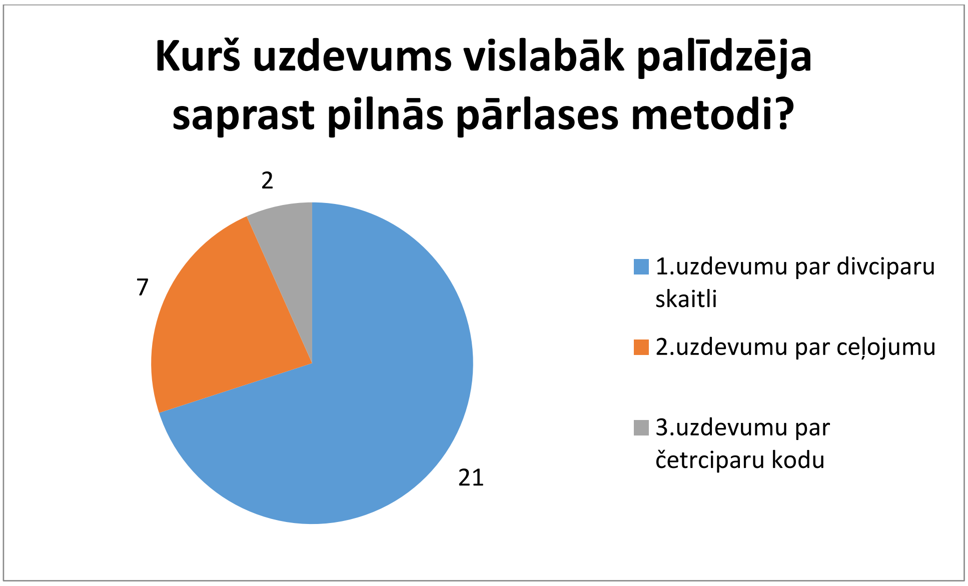
Stundas laikā tika novērots, ka skolēni pirms uzdevuma risināšanas kopīgi centās ģenerēt idejas, un vēlējās pārliecināties, vai pareizi ir sapratuši veidu kādā uzdevums jārisina. Piemēram, pirmajā uzdevumā vispirms kopīgi tika nolemts, ka tabulā ir jāuzraksta visi iespējamie skaitļi, un tad katrs skaitlis atsevišķi jāpārbauda.

Vislabāk skolēniem izdevās atrisināt 2. uzdevumu (GP=0,77), kuru patstāvīgi spēja atrisināt 23 skolēni. Bet visgrūtākais bija 3. uzdevums (GP=0,27), kurā jāatrod četrciparu kods. To spēja atrisināt tikai astoņi skolēni (skat. 5.13. attēlu). Visvairāk laika bija vajadzīgs pirmajam uzdevumam (vairāk nekā 8 min), bet visātrāk tika izpildīts 2. uzdevums.



5.13. att. **Kurus uzdevumus tev izdevās atrisināt patstāvīgi? 11.klase**

70% skolēnu ir norādījuši, ka pirmais uzdevums viņiem vislabāk ir palīdzējis saprast pilnās pārlases metodi (skat. 5.14. attēlu). Līdzīgi kā 10. klases komplektā arī šis uzdevums ļoti labi atklāj uzdevuma risinājuma veidu, kurā secīgi ir jāaplūko visi iespējamie skaitļi, un jāatrod atbilstošais. Vairāki skolēni mācību stundas laikā izteica bažas par to, ka risinot šādu uzdevumu ar pilnās pārlases metodi ir jāveic apjomīgs darbs, lai pārskatītu visus divciparu skaitļus. Bija skolēni, kas meklēja citādus veidus kā tikt līdz rezultātam, bet viņiem tas neizdevās. Tas varētu būt viens no lielākajiem šķēršļiem, kas kavē skolēnus izmantot šādu metodi, jo parasti skolā tiek apgūti daudz īsāki un atjautīgāki paņēmieni kā atrisināt uzdevumus.



5.14. att. **Kurš uzdevums vislabāk palīdzēja saprast pilnās pārlases metodi? 11.klase**

12.klase. Stundā piedalījās 28 skolēni. Atšķirībā no citām klašu grupām, šajā stundā netika uzņemts laiks, bet skolēniem vienlaicīgi tika doti visi trīs uzdevumi, kurus skolēni katrs savā tempā varēja risināt. Šīs mācību stundas laikā visiem skolēniem izdevās atrisināt pirmo uzdevumu, kura risinājums stundas vidū tika salīdzināts. Aptuveni 60% izdevās atrisināt arī otro uzdevumu. Neviens skolēns nepaspēja izpildīt trešo uzdevumu, kurā bija nepieciešams pierādīt matemātisku sakarību. Tikai viens skolēns stundas beigās mutiski izteica trešā uzdevuma risinājuma ideju, kas sakrīt ar īsto uzdevuma atrisinājumu, bet viņš to nebija paspējis īstenot.

Pirmie divi uzdevumi ir veidoti pēc līdzīga principa, tādēļ arī risinājuma veids abiem uzdevumiem ir ļoti līdzīgs. Lielākā atšķirība starp pirmajiem diviem uzdevumiem ir to atrisināšanai nepieciešamais laiks. Pirmajam uzdevumam visvairāk laika skolēni iztērēja, lai apzinātu formu, kādā tiks uzrakstīti visi iespējamie gadījumi. Bet otrais uzdevums bija laikietilpīgāks tieši risināšanas fāzē.

Lai pārbaudītu trešo uzdevumu, būtu nepieciešama vēl viena matemātikas mācību stunda, taču šajā reizē šādas iespējas nebija.

SECINĀJUMI

Pilnās pārlases metodes izcelsme ir saistāma ar tās plašo pielietojumu ģeometrijā, piemēram, ģeometrisku ķermeņu laukumu vai tilpumu aprēķināšanā, kas ir neraksturīgi veidam kā mūsdienās visbiežāk izmanto pilno pārlasi. Tas liecina, ka šai metodei ir ļoti plašs pielietošanas potenciāls dažādu veidu uzdevumos.

Pilnās pārlases būtība sevī ietver vajadzību konkrētu problēmu sadalīt vairākās daļās, un risinājumā katru daļu aplūkot atsevišķi. Pilnā pārlase ir visu gadījumu uzskaitījums. Lietojot šo metodi pavisam noteikti ir jāaplūko visi iespējamie gadījumi, citādi šīs metodes izmantošanai nebūs jēgas.

Pilnās pārlases lietošana palīdz attīstīt kritisko domāšanu un problēmrisināšanas prasmi. Tādēļ jau beidzot 6. klasi skolēniem vienkāršās situācijās ir jāprot lietot pilnā pārlase. Bet līdz 9. klasei ir jāiemācās izmantot pilno pārlasi, lai pazīstamās un jaunās situācijās noteiktu elementu eksistenci un skaitu. Matemātikas olimpiādēs tieši pamatskolas klasēm visbiežāk ir sastopami tādi uzdevumi, kuru risinājumā var izmantot pilno pārlasi. Bet, ņemot vērā uzdevumu sarežģītības līmeni, ir nepieciešama prasme pareizi sastrukturēt informāciju un sadalīt doto problēmu vairākos atsevišķos gadījumos. Lai to panāktu, skolotājam ir jāvelta laiks skolēniem, lai padziļināti apgūtu pilnās pārlases metodes lietošanu.

Vidusskolā pilno pārlasi visbiežāk izmanto kombinatorikas satura uzdevumos, bet to var arī izmantot, piemēram, lai atrastu naturālās vai veselās vienādojuma saknes. Matemātikas olimpiādēs vidusskolas posmam ļoti bieži var ieraudzīt pilnās pārlases metodes izmantošanas iespējas pierādījuma uzdevumos. Taču kā tika noskaidrots pētījumā, pat 12. klases skolēni lielākoties nav sagatavoti lietot pilno pārlasi šāda tipa uzdevumos.

Bakalaura darba ietvaros tika ievērota nepieciešamība pēc atbalsta materiāla skolotājiem, lai varētu mācīt skolēnus lietot pilno pārlasi. Tādēļ tika izstrādāti uzdevumu komplekti 5. – 12. klasei, kurus var izmantot gan skolotāji, gan skolēni, lai padziļinātu zināšanas par pilnās pārlases metodi. Uzdevumu komplekti ir atbilstoši skolas kursā apgūstamajām tēmām, un tas var būt materiāls, kas palīdz sagatavoties dalībai matemātikas olimpiādēs. Līdz ar to var secināt, ka izvirzītais mērķis ir sasniegts.

IZMANTOTĀS LITERATŪRAS SARAKSTS

[1] O'Connor, J.J., Robertson, E. F, „Antiphon the Sophist”, *University of St Andrews, Scotland,* [Tiešsaiste] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Antiphon/.

[2] Dainian, F., Cohen, Robert S**.,** *Chinese Studies in the History and Philosophy of Science and Technology* , Netherland: Kluwer Acadamic Publishers. 279.–287.lpp.

[3] Bursill-Hall, P., The Method of exhaustion: Eudoxus & Euclid, *History of Mathematics lecture notes***,** [Tiešsaiste] https://www.dpmms.cam.ac.uk/~piers/h_of_m_lectures/ch8.pdf?fbclid=IwAR12PK4qs_N55WYXaqcaEFcge85esJS61hq13QADmx7Ncg7FqkKI_sQ-RKY

[4] Joyce, David E., Euclid’s Elements Book XII**,** *Department of Mathematics and Computer Science, Clark University,* [Tiešsaiste] https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookXII/bookXII.html

[5] Papadopoulos, I. How Archimedes Helped Students to Unravel the Mystery of the Magical Number Pi. *Sci & Educ* 23, 61–77 (2014). [Tiešsaiste] https://datubazes.lanet.lv:4876/10.1007/s11191-013-9643-0

[6] Oxford University Press, Brute force algorithm, *Oxford Reference* [Tiešsaiste] https://www.oxfordreference.com/view/10.1093/oi/authority.20110803095532553

[7] Method of exhaustion, *Encyclopædia Britannica*, 2016, [Tiešsaiste] https://www.britannica.com/science/method-of-exhaustion

[8] Walz, G., Exhaustionsmethode, *Spectrum*, 2017, [Tiešsaiste] https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/exhaustionsmethode/2859

[9] Stefanowicz, A**.,** Proofs and Mathematical Reasoning, *University of Birmingham,* 2014, [Tiešsaiste] https://www.birmingham.ac.uk/Documents/college-eps/college/stem/Student-Summer-Education-Internships/Proof-and-Reasoning.pdf

[10] Matemātika 1.–9. klasei. Mācību priekšmeta programmas paraugs, *Valsts izglītības satura centrs,* [Tiešsaiste] https://mape.skola2030.lv/resources/159

[11] Ministru kabineta 2018. gada 27. novembra noteikumi Nr. 747 "Noteikumi par valsts pamatizglītības standartu un pamatizglītības programmu paraugiem". *Latvijas Vēstnesis*, [Tiešsaiste] https://likumi.lv/ta/id/303768

[12] Ministru kabineta 2019. gada 3. septembra noteikumi Nr. 416 "Noteikumi par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu un vispārējās vidējās izglītības programmu paraugiem". *Latvijas Vēstnesis,* [Tiešsaiste] https://likumi.lv/ta/id/309597

[13] France I., Lāce G., Pickaine L., Miķelsone A., *Matemātika 9.klasei*, Lielvārds, 2009, ISBN 978-9984-11-255-8

[14] Uzdevumu arhīvs. *LU A.Liepas NMS vietne*. [Tiešsaiste] http://nms.lu.lv/uzdevumu-arhivs/latvijas-olimpiades/

[15] Saulīte I., Uzdevumi ārpusstundu darbam sākumskolā skolēnu matemātisko spēju attīstības veicināšanai, *LU A.Liepas NMS vietne* 2002, [Tiešsaiste] http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2014/06/saulite_UzdDarbamSsk.pdf

[16] Pilnās pārlases uzdevumi par skaitļiem, *Siguldas valsts ģimnāzijas vietne* [Tiešsaiste] https://svg.lv/wp-content/uploads/2011/10/pascal.pdf

[17] LU A. Liepas NMS kolektīvs, Ieskats olimpiāžu matemātikā, *LU A.Liepas NMS vietne* [Tiešsaiste] http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2013/10/MMU1_OlimpiazuMatematika.pdf

[18] Šuste A., Ko Jūs no manis gribat?, *LU A.Liepas NMS vietne* [Tiešsaiste] http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2016/10/2016_MMU_1nod_ASuste_web.pdf

1. uzdevums.

Risinājums. Anniņa varēja uzrakstīt skaitļus 5308, 3508, 3058 vai 3085. Vismazākais no šiem skaitļiem ir 3058.

2. uzdevums.

Risinājums. Skaitļa 64 dalītāji ir 1; 2; 4; 8; 16; 21; 64 Bet skaitļa 54 dalītāji ir 1; 2; 3; 6; 9; 18; 27; 54. Taisnība bija Santai, jo skaitlim 54 ir par vienu dalītāju vairāk nekā skaitlim 64.

3. uzdevums.

Risinājums. Aplūko visas iespējamās telefona paroles – 5980; 5981; 5982; 5983; 5984; 5985; 5986; 5987; 5988; 5989. Pārbaudot katru skaitli, vai tas dalās ar 7, redzam, ka vienīgā parole, kas atbilst uzdevumā dotajam, ir skaitlis 5985.

4. uzdevums.

Risinājums. Vispirms ir jāaplūko visi skaitļa 36 dalītāji – 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36. No šiem skaitļiem var iegūt visu iespējamo taisnstūru malu garumus, kuru laukums ir 36. Tie ir $1 \times 36;\ 2 \times 18;\ 3 \times 12;\ 4 \times 9;\ 6 \times 6$. Tātad varēja tikt izgatavotas piecu dažādu veidu piespraudes.

6. klases uzdevumu komplekta atrisinājumi

1. uzdevums.

Risinājums. Var izveidot četras dažādas puķudobes.

Ievēro, ka taisnstūrveida puķudobes perimetrs sastāv no divu dažādu malu pāru summas. Tādēļ taisnstūra divu dažādo malu summa ir vienāda ar 18 : 2 = 9. Tātad visu iespējamo taisnstūru malu garumi būs tie, kuru summa ir 9. Tādi ir taisnstūri ar izmēriem 1×8; 2×7; 3×6; 4×5. Ievēro, ka puķudobes ar izmēriem $a \times b$ un $b \times a$ nav dažādas puķudobes.

Aplūkotajiem taisnstūriem aprēķinam to laukumus, un secinām, ka vislielākais laukums ir taisnstūrim ar malu garumiem 4×5.

2. uzdevums.

Risinājums. Parole ir 708192. To iegūst secīgi aplūkojot visus ciparus no 0 līdz 9, kas varētu būt skaitļa $\overline{ab}$ vienu cipars, katram šim ciparam piekārto par septiņi lielāku desmitu ciparu. Ievēro, ka 2 ir lielākais cipars, kurš var atrasties vienu pozīcijā, lai izpildītos prasītais.

3. uzdevums. Tēma: „Naturālie skaitļi, to īpašības”

Risinājums. Pēdējie divi cipari var būt 05, 50, 14, 41, 23, 32.

Tā kā pirmo divu zināmo ciparu summa ir 2, tad zināms, ka pēdējo divu ciparu summai jābūt 5. Aplūkojot visu ciparu pāru veidotās summas, redzam, ka iespējamie ciparu pāri ir 0 un 5, 1 un 4, 2 un 3, no kuriem var izveidot visas iespējamās ciparu kombinācijas.

4.uzdevums.

Risinājums. Manfrēda prasībām atbilst 27 šādi numuri.

Aplūko visus skaitļus no 1 līdz 50 un izsvītro tos, kuri dalās ar 3 vai 5. Pāri paliek 27 derīgie māju numuri.

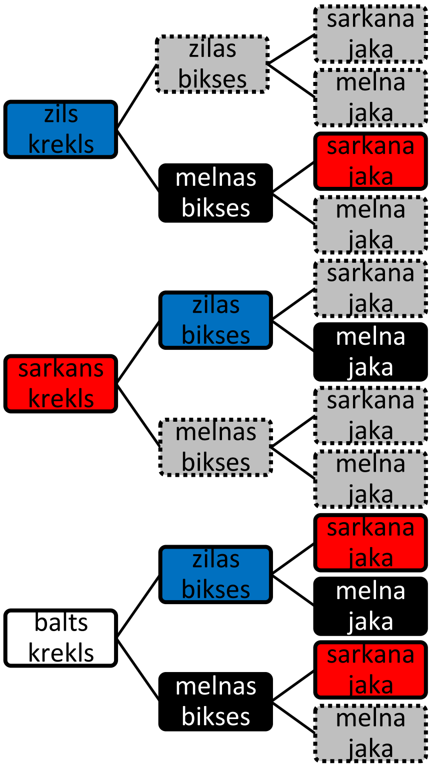
1.uzdevums.

Risinājums. Maija no skolas uz mājām var aiziet astoņos veidos.

1) A1 – A3 – A5;	5)A2 – A3 – A5;
2)A1 – A3 – A6;	6)A2 – A3 – A6;
3)A1 – A4 – A5;	7)A2 – A4 – A5;
4)A1 – A4 – A6;	8)A2 – A4 – A6.

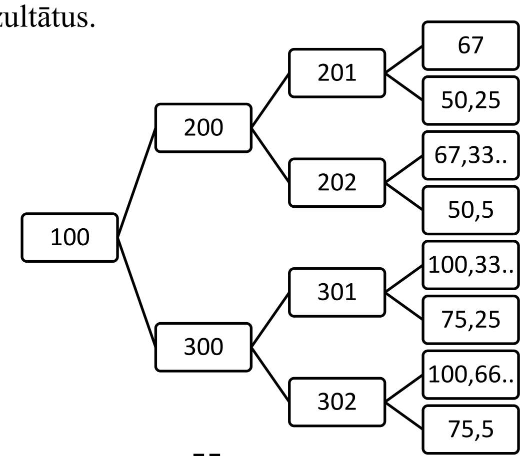
2.uzdevums.

Risinājums. Visus ģērbšanās veidus var aplūkot koka diagrammā. Ir pieci veidi kā Bruno var saģērbties, lai visi uzvilktie apģērbi būtu atšķirīgās krāsās.



3.uzdevums.

Risinājums. Kārlis ieguva skaitli 67. Lai to atrastu var veidot koka diagrammu, kurā aplūko visu iespējamo darbību rezultātus.



8. klases uzdevumu komplekta atrisinājumi

1.uzdevums.

Risinājums. Nē, viņai nepietiks ar 14 krāsām, jo kopā ir 15 šādi skaitļi - 59, 68, 69, 77, 78, 79, 86, 87, 88, 89, 95, 96, 97, 98, 99.

Lai noteiktu, kuriem skaitļiem ciparu summa ir lielāka par 13, var aplūkot visus divciparu skaitļus $\overline{ab}$. To ciparu summas attēlo tabulā, un atzīmē tās summas, kuras ir lielākas par 13. Katrai summai atrod atbilstošo skaitli.

a\b	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

2.uzdevums.

Risinājums. Lindai vajag pārbaudīt sešus skaitļus: 135; 153; 315; 351; 513; 531. Viens veids kā uzrakstīt visus iespējamos kodus ir izmantojot koka diagrammu.

3.uzdevums

Risinājums. Uzdevumā ir jāaplūko visi iespējamie ceļi.

a) Piecos veidos

b) Četros veidos

c) Divdesmit veidos

5. pielikums

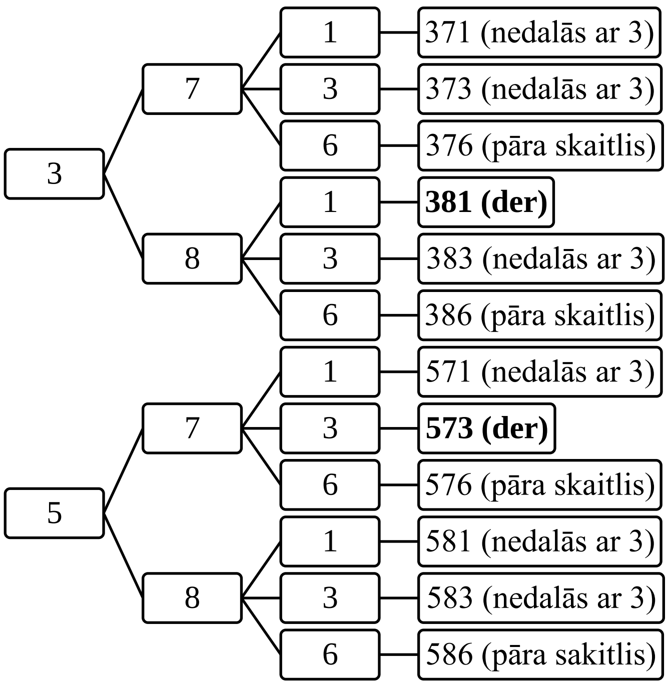
9. klases uzdevumu komplekta atrisinājumi

1.uzdevums.

Risinājums. Lai aplūkotu visus iespējamos skaitļus, var izveidot koka diagrammu, un izvēlēties iegūtos pāra skaitļus. Kopā ir iespējami 12 pāra skaitļi: 1234; 1324; 1342; 1432; 2134; 2314; 3124; 3142; 3214; 3412; 4132; 4312.

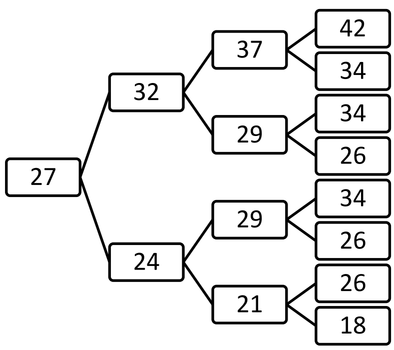
2.uzdevums.

Risinājums. Uzrakstot visus iespējamos skaitļus un pārbaudot to dalāmību ar 3 ieraugam, ka ir divi skaitļi, kurus varētu būt iedomājies Melnbārdis. Ja Baltbārdis minēs skaitli 381 vai 573, tad viņš noteikti ar ne vairāk kā diviem minējumiem būs uzminējis šo skaitli.



3.uzdevums.

Risinājums. Lai aplūkotu visus iespējamos skaitļus, kas varētu būt uzrakstīti uz tāfeles pēc sestā skolnieka, var izmantot koka diagrammu. No tās redzam, ka uz tāfeles varētu būt uzrakstīti skaitļi 18; 26; 34 vai 42.



6. pielikums

10. klases uzdevumu komplekta atrisinājumi

1.uzdevums

Risinājums. Uz tāfeles bija uzrakstīts skaitlis 350. Lai to atrastu, skaitlim $\overline{abc}$ aplūko visus iespējamos $\overline{bc}$ gadījumus. Cipari b un c var būt no 0 līdz 9. Visus iespējamos $\overline{bc}$ skaitļu reizinājumus ar 7 apkopo tabulā:

b\c	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	7	14	21	28	35	42	79	56	63
1	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133
2	140	147	154	161	168	175	182	189	196	203
3	210	217	224	231	238	245	252	259	266	273
4	280	287	294	301	308	315	322	329	336	343
5	350	357	364	371	378	385	392	399	406	413
6	420	427	434	441	448	455	462	469	476	483
7	490	497	504	511	518	525	532	539	546	553
8	560	567	574	581	588	595	602	609	616	623
9	630	637	644	651	658	665	672	679	686	693

No iegūtajiem reizinājumiem atrod tādu trīsciparu skaitli $\overline{abc}$, kura desmitus un vienus veido skaitlis $\overline{bc}$. Ieraugam, ka meklētais skaitlis ir „350”

2.uzdevums

Risinājums. Boba prasībām atbilst 4 numuri – MB347; MB743; MB 1337; MB1931. Aplūko visus pirmskaitļus, kas nepārsniedz 50: 2, **3**, 5, **7**, 11, **13**, 17, **19**, 23, 29, **31**, **37**, 41, **43**, **47**. Ievēro, ka skaitli 50 kā divu pirmskaitļu summu var izteikt 4 veidos:

1) 50=47 + 3; 2) 50=43 + 7; 3) 50=37 + 13; 4) 50=31 + 19

Pierāda, ka vairāk veidu nav:

- 41 neder, jo 50=41+9; (9 nav pirmskaitlis)
- 29 neder, jo 50=29+21; (21 nav pirmskaitlis)
- 23 neder, jo 50=23+27; (27 nav pirmskaitlis)
- 17 neder, jo 50=17+33; (33 nav pirmskaitlis)
- 11 neder, jo 50=11+39; (39 nav pirmskaitlis)
- 5 neder, jo 50=5+45; (45 nav pirmskaitlis)
- 2 neder, jo 50=2+48; (48 nav pirmskaitlis)

3.uzdevums

Risinājums. Kopā tika izspēlētas 15 šaha partijas. Ja dalībnieku vārdus apzīmējam ar viņu vārda pirmo burtu, tad spēļu partneri būs: EN, ER, ES, EA, EL, NR, NS, NA, NL, RS, RA, RL, SA, SL, AL.

11. klases uzdevumu komplekta atrisinājumi

1.uzdevums

Risinājums. Taisnība bija Fanijai, jo ir tikai viens šāds skaitlis. Tas ir 81. Uzdevumā ir jāaplūko visu divciparu skaitļu $\overline{ab}$ ciparu summas kvadrātu vērtības:

$a \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
2	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
3	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
4	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
5	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196
6	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
7	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256
8	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289
9	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324

Tabulā var redzēt, ka tikai skaitļa 81 ciparu summas kvadrāta vērtība arī ir 81.

2.uzdevums

Risinājums. Ģimene ceļojumu var saplānot 12 veidos. Lai visus šos veidus uzskaitītu var veidot grafu, kurā ataino abus iespējamos pieturas punktus, un dažādos transporta veidus, kā var nokļūt katrā pilsētā.

3.uzdevums

Risinājums. Aplūko visus 4-ciparu skaitļus, ko veido cipari 2, 3, 6, 7 bez atkārtojumiem. Tādi ir 24 skaitļi:

1) 2367;	7) 3267;	13) 6237;	19) 7236;
2) 2376;	8) 3276;	14) 6273;	20) 7263;
3) 2637;	9) 3627;	15) 6327;	21) 7326;
4) 2673;	10) 3672;	16) 6372;	22) 7362;
5) 2736;	11) 3726;	17) 6723;	23) 7623;
6) 2763;	12) 3762;	18) 6732;	24) 7632;

Pārbaudot katra skaitļa dalāmību ar septiņi, noskaidro, ka ir trīs iespējamie kodi, kas atbilst dotajai informācijai. Tie ir 3276, 6237, 7623. Tātad ar trim mēģinājumiem pietiks, lai ievadītu pareizo kodu.

1.uzdevums.

Risinājums. Ņemot vērā, ka neviena viencipara skaitļa kvadrāts nedalās ar 13, tad aplūko visas divciparu skaitļu $\overline{ab}$ ciparu kvadrātu summas. Tās apkopo tabulā, kur a *(vertikāli)* apzīmē desmitus, bet b *(horizontāli)* apzīmē vienus. No iegūtajām summām izvēlas tās, kuras dalās ar 13.

$a^2 \backslash b^2$	**0**	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**
1	1	2	5	10	17	26	37	50	65	82
4	4	5	8	13	20	29	40	53	68	85
9	9	10	13	18	25	39	45	58	73	90
16	16	17	20	25	32	41	52	65	80	97
25	25	26	29	39	41	50	61	74	89	106
36	36	37	40	45	52	61	72	85	100	117
49	49	50	53	58	65	74	85	98	113	130
64	64	65	68	73	80	89	100	113	128	145
81	81	82	85	90	97	106	117	130	145	162

Ievēro, ka ir tieši 16 tādi divciparu skaitļi, kuru ciparu kvadrātu summa dalās ar 13. Tie ir skaitļi 15; 18; 23; 32; 35; 46; 47; 51; 53; 64; 69; 74; 79; 81; 96; 97.

2.uzdevums.

Risinājums. Kristaps atrada visus skaitļus. Tie ir 12, 42 un 90. Aplūkojam visus iespējamos divciparu skaitļus $\overline{ab}$. Nosakām katra skaitļa ciparu summu $(a+b)$, šīs summas kvadrātu $(a+b)^2$, un aprēķinām vērtību $(a+b)+(a+b)^2$. Šīs vērtības apkopojam tabulā:

a\b	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110
2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132
3	12	20	30	42	56	72	90	110	132	156
4	20	30	42	56	72	90	110	132	156	183
5	30	42	56	72	90	110	132	156	183	210
6	42	56	72	90	110	132	156	183	210	240
7	56	72	90	110	132	156	183	210	240	272
8	72	90	110	132	156	183	210	240	272	306
9	90	110	132	156	183	210	240	272	306	342

Risinājuma piemērs: $\overline{ab} = 47;\ (4+7)+(4+7)^2 = 11 + 11^2 = 11 + 121 = 132$

Ievēro, ka viencipara un trīsciparu summas var neaplūkot. No tabulas nolasa, ka ir trīs skaitļi, kuriem piemīt uzdevumā prasītā īpašība: 12, 42, 90.

9. pielikums

Skolēnu Google Forms aptaujas paraugs

Pilnās pārlases metode 6.klase

* Nepieciešams

Kurus uzdevumus tev izdevās atrisināt patstāvīgi? *

- ☐ 1.uzdevumu par māju numuriem
- ☐ 2.uzdevumu par interneta paroli
- ☐ 3.uzdevumu par puķu dobēm
- ☐ 4.uzdevumu par mašīnas numuru

Kurš uzdevums vislabāk tev palīdzēja saprast pilnās pārlases metodi? *

- ○ 1.uzdevumu par māju numuriem
- ○ 2.uzdevumu par interneta paroli
- ○ 3.uzdevumu par puķu dobēm
- ○ 4.uzdevumu par mašīnas numuru

Kas tev sagādāja grūtības, mēģinot uzrakstīt visus iespējamos gadījumus? *

Jūsu atbilde

Ko varētu darīt, lai tiktu galā ar šīm grūtībām? *

Jūsu atbilde

Bakalaura darbs „Pilnās pārlases metode skolas kursā un matemātikas olimpiādēs 5. – 12. klasēm” izstrādāts LU Ķīmijas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā noslēguma darba elektroniskā versija atbilst LUIS augšupielādētā darba elektroniskai kopijai.

Autors: /Artūrs Dimitrijevs/

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītāja: Mg. Math. Elīna Buliņa 31.05.2021.

Recenzents: metodiķe Mg. paed. Aira Kumerdanka ____________________

Darbs iesniegts Ķīmijas fakultātē 31.05.2021.

Dekāna pilnvarotā persona: vecākā metodiķe Inita Šneidere ______________________

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē

09.06.2021. prot. Nr. ___

Komisijas sekretāre: metodiķe Aira Kumerdanka ________________________