LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS, MATEMĀTIKAS UN OPTOMETRIJAS FAKULTĀTE

MONTEKARLO METODES PIELIETOJUMS MĒRĪJUMU NENOTEIKTĪBAS NOVĒRTĒŠANĀ

BAKALAURA DARBS

Autors: Markuss Voldemārs Lancmanis
Studenta apliecības nr.: ml-18054
Darba vadītājs: pētniece Dr.math. Māra Delesa-Vēliņa

RĪGA 2022

Anotācija

Mērījumu nenoteiktība pastāv visiem mērījumiem. Darbā tiek aprakstītas mērījumu nenoteiktības novērtēšanas metodes. Tiek apskatīta metode, kas tiek aprakstīta GUM (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*) standartos un metode, kas balstīta uz Montekarlo simulācijām. Abas metodes tiek salīdzinātas gan ar kvantitatīvām, gan kvalitatīvām metodēm, izmantojot praktiskus piemērus.

Atslēgas vārdi: mērījumu nenoteiktība, Montekarlo metode.

Abstract

All measurments are subject to uncertainty. In this work measurment uncertainty estimation methods are described. The method which is described in GUM (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*) standards and method which is based on Monte Carlo simulations are considered. Both methods are compared using quantitative and qualitative methods on practical examples.

Keywords: measurment uncertainty, Monte Carlo method.

SATURS

APZĪMĒJUMI

$\approx$ – aptuveni vienāds

GUM – Rokasgrāmata mērījumu nenoteiktības izteikšanai (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*)

u_A – A tipa mērījumu nenoteiktība

u_B – B tipa mērījumu nenoteiktība

u_c – kombinētā mērījumu nenoteiktība

U – paplašinātā mērījumu nenoteiktība

IEVADS

Mērījumi mūsdienu pasaulē ir sastopami praktiski visur. Tā ir svarīga daļa no mūsu ikdienas dzīves, tāpēc ir svarīgi, lai mērījumi būtu precīzi. Precīzi mērījumi veicina lēmumu pieņemšanu gandrīz visos sabiedrības aspektos. Tāpēc ir arī svarīga mērījumu nenoteiktība, jo tā sniedz nepieciešamo informāciju, lai veiktu informētus lēmumus par mērījuma precizitāti. Nenoteiktība nozīmē šaubas un plašā nozīmē termins mērījumu nenoteiktība nozīmē šaubas par mērījumu rezultātu. Mērījumu nenoteiktība ir pamatā metroloģijai, zinātnei par mērījumiem. Metroloģija ir arī viena no tām zinātnēm, kas ir cieši saistīta ar statistiku. Izmantojot statistiku, ir izveidotas dažādas metodes, kā noteikt nenoteiktības.

1977. gadā, ievērojot, ka starptautiski nav nekādas vienprātības par mērījumu nenoteiktībām, pasaules augstākā autoritāte metroloģijā, CIPM (*Comité International des Poids et Mesures*), pieprasīja, lai BIPM (*Bureau International des Poids et Mesures*) šo problēmu kopā ar citu valstu nacionālajām laboratorijām risinātu un sniegtu ieteikumus [1]. Šis bija iemesls, kāpēc radās GUM (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*) standarts.

GUM ir noteikti vispārīgi nenoteiktības novērtēšanas un izteikšanas noteikumi, kurus var izmantot dažādos precizitātes līmeņos un daudzās jomās. GUM principus izmanto, lai:

- nodrošinātu un saglabātu kvalitātes kontroli ražošanā,
- visi ievērotu un izpildītu esošos likumus un noteikumus,
- veiktu pētījumus zinātnē, sākot no vienkāršākajiem un beidzot ar sarežģītākajiem,
- kalibrētu standartus, instrumentus un testus visā valsts mērījumu sistēmā, lai tie būtu viegli izsekojami atbilstoši valsts standartam. [2, 1. pants] Kalibrēšana valsts likumā definēta kā operāciju kopums, kas nosacītos apstākļos konstatē sakarību starp mērīšanas līdzekļu vai mērīšanas sistēmas uzrādīto lielumu vērtībām, materiālā mēra vai atsauces materiāla esošajām vērtībām un vērtībām, kas reproducētas no atbilstošā mērvienības etalona,
- varētu salīdzināt starptautiskos un citu valstu nacionālos standartus [1, 1. lpp.].

Attīstoties datoriem, nenoteiktību novērtēšanā sāka izmantot Montekarlo metodes. Montekarlo metodes pamatā nenoteiktību novērtēšanā ir katra mainīgā izlases simulēšana, lai tas atbilstu mainīgā varbūtību sadalījumam. Simulējot pietiekoši lielas izlases, var veikt statistiskus secinājumus par mērījuma patieso vērtību un nenoteiktību. Montekarlo metodei ir daudz priekšrocību nenoteiktību novērtēšanā, it īpaši kompleksu mērījumu gadījumā. Montekarlo metode ir relatīvi vienkārša un lēnām sāk iegūt piekrišanu industrijā. Diemžēl ir pieejami ļoti maz publikāciju par to, kā Montekarlo metode darbojas nenoteiktības novērtēšanā [3].

Labs teorētiskais materiāls par mērijumu nenoteiktības matemātisko pamatojumu un praktiskiem aspektiem atrodams Stīvena Kravdera (*Stephen Crowder*), Kolina Delkera (*Collin Delker*), Erika Foresta (*Eric Forrest*) un Nevina Martina (*Nevin Martin*) grāmatā *Introduction to Statistics in Metrology* [4].

Darba mērķis ir veikt izpēti par Montekarlo metodes pielietojumu nenoteiktības novērtēšanā un salīdzināt to ar GUM standartiem jeb GUM metodi.

Darba uzdevumi:

1. izpētīt literatūru par GUM un Montekarlo metodēm nenoteiktības novērtēšanā;
2. izmantojot abas metodes, veikt nenoteiktības analīzi, salīdzināt abas metodes;
3. veikt secinājumus un apkopot rezultātus.

Darbs sastāv no piecām nodaļām un pielikuma. Pirmajā nodaļā tiek aplūkoti mērījumu nenoteiktības aprēķināšanas metodes, izmantojot GUM standartus [1]. Otrā nodaļa veltīta Montekarlo metodei un tā pielietojumam nenoteiktības novērtēšanā. Trešajā nodaļā tiek aplūkoti populārākie varbūtību sadalījumi un to izvēle mērījumu nenoteiktības analīzei. Ceturtajā nodaļā tiek aplūkota teorija GUM un Montekarlo metodes salīdzinājumam. Piektā nodaļa aplūko praktiskus piemērus nenoteiktību analīzei, izmantojot GUM un Montekarlo metodes.

1. A UN B TIPA MĒRĪJUMU NENOTEIKTĪBAS APRĒĶINI

Šajā nodaļā aplūkota [4] grāmatas 6. nodaļa par A un B tipa mērījumu nenoteiktībām tieša un netieša mērījuma gadījumā.

Pirms tiek aprakstīti nenoteiktību aprēķini, ir svarīgi saprast metroloģijas terminoloģiju, kas saistīta ar nenoteiktības aprēķiniem.

1.1. Definīcija. Par **mērāmo lielumu** (*measurand*) sauc fizisku lielumu vai objektu, kas tiek izmērīts.

1.2. Definīcija. Par **patieso vērtību** sauc skaitlisku vērtību, kas atbilst kādas parādībās, ķermeņa vai vielas īpašībai. Patieso vērtību izsaka kā skaitli un mērvienību.

Diemžēl praksē patiesā vērtība nav zināma un to nevar noteikt, jo visiem mērījumiem ir nenoteiktība.

1.3. Definīcija. Par **mērījuma nenoteiktību** sauc nenegatīvu parametru, kas raksturo mērāmajam lielumam piešķirto skaitlisko vērtību izkliedi, pamatojoties uz izmantoto informāciju.

Svarīgi piebilst, ka mērījumu nenoteiktība vienmēr ietver A tipa un B tipa mērījumu nenoteiktības novērtējumus.

1.4. Definīcija. Par **ticamības līmeni** sauc varbūtību, ka patiesā mērījuma vērtība atradīsies norādītajā pārklājuma intervālā.

1.5. Definīcija. Par **pārklājuma intervālu** sauc intervālu, kas satur patieso mērījuma vērtību pie norādītā ticamības līmeņa.

1.6. Definīcija. Par **tiešo mērījumu** sauc mērījumu, kuru var nolasīt uzreiz no mērinstrumenta.

1.7. Definīcija. Par **netiešo mērījumu** sauc mērījumu, kura vērtību iegūst, mērot citus lielumus, kas funkcionāli saistīti ar mērāmo lielumu.

Kā tiešā mērījuma piemēru var minēt smagumu, garumu vai laiku, kur mērījums tiek noteikts ar vienkāršu mērierīci, bet kā netiešā mērījuma piemērs ir $U = IR$ jeb Oma likums (U – spriegums, I – strāva, R – pretestība).

Netiešo mērījumu var izteikt kā vienādojumu

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N),$$

kur $X_1, X_2, \ldots, X_N$ ir fiziski lielumi, kas tiks mērīti, bet funkcija f šos daudzumus sasaista, lai iegūtu daudzumu Y.

Konceptuāli mērījuma nenoteiktības intervālu izsaka formā

$$\text{Vidējā vērtība} \pm \text{Mērījuma nenoteiktība} \tag{1.1}$$

vai

$$\text{Vidējā vērtība} \pm k\,(\text{Kombinētā mērījumu nenoteiktība}). \tag{1.2}$$

Mērījuma nenoteiktība (1.1) gadījumā tiek asociēta ar paplašināto nenoteiktību. Intervālam (1.2) vidējā vērtība mērāmajam lielumam, pārklājuma koeficients k un kombinētā mērījumu nenoteiktība var tikt izteikta kā

$$\overline{y} \pm t_p(v_{\text{eff}})u_c(y).$$

Šīs nodaļas turpinājumā tiks aprakstīts, kā aprēķināt vidējo vērtību $\overline{y}$, $t_p(v_{\text{eff}})$ un kombinēto nenoteiktību $u_c(y)$.

1.1. A tipa mērījumu nenoteiktība

A tipa nenoteiktība GUM standartos definēta kā ”metode nenoteiktības novērtēšanai ar novērojumu sēriju statistisko analīzi”. Tas nozīmē, ka parasti dati tiek savākti no vairāku mērījumu sērijām. Tā ir kā daļa no plānotā mērījumu eksperimenta.

Tieša mērījuma gadījumā A tipa nenoteiktība tipiski ir mērījumu standartnovirze

$$s_A(y) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2},$$

kur n ir mērījumu skaits un $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ir savā starpā neatkarīgi mērījumi.

Tipiski nenoteiktība $u_A(y)$ viena mērījuma gadījumā ir

$$u_A(y) = s_A(y),$$

bet nenoteiktība n mērījumu gadījumā ir

$$u_A(\overline{y}) = \frac{s_A(y)}{\sqrt{n}}.$$

Brīvības pakāpes A tipa nenoteiktības aprēķinos ir $(n-1)$. Brīvības pakāpes ir atkarīgas no tā, cik daudz mērījumi tiek veikti.

1.2. B tipa mērījumu nenoteiktība

B tipa nenoteiktība GUM standartos definēta kā ”metode nenoteiktības novērtēšanai, izmantojot citus līdzekļus, nevis ar novērojumu sērijām”. Tas nozīmē, ka B tipa nenoteiktības aprēķiniem var izmantot vēsturiskos datus, kalibrēšanas ziņojumus, ražotāja specifikācijas un arī atsauces datus no rokasgrāmatām. B tipa nenoteiktības novērtējumos tiek ņemtas vērā dispersijas, kas nav novērojamas A tipa nenoteiktības novērtējumos.

Tieša mērījuma gadījumā B tipa standarta nenoteiktības novērtēšana būs atkarīga no visas pieejamās informācijas, kas laika gaitā ietekmē izmērīto lielumu.

Svarīgi B tipa nenoteiktības aprēķinos ir paplašinātās nenoteiktības U zināšana. Pārsvarā tā, rēķinot B tipa nenoteiktības, ir zināma, jo tā ir iekļauta kalibrēšanas ziņojumos, ražotāja specifikācijās vai rokasgrāmatās. Ja šāda informācija nav pieejama, tad to var arī aprēķināt. Par U aprēķināšanu vairāk ir aprakstīts apakšnodaļā par kombinētās nenoteiktības aprēķiniem.

Piemēram, ja ir zināms, ka mērījuma pielaide ir $\pm U$ (pielaide aprēķināta pie 95% ticamības intervāla) un ka mērījumi ir normāli sadalīti, tad B tipa nenoteiktība būs

$$u_B(y) = \frac{U}{2}. \tag{1.3}$$

Bieži nav zināms mērījuma sadalījums, tāpēc bieži tiek pieņemts, ka mērījumi ir sadalīti pēc vienmērīgā sadalījuma. Tādā gadījumā B tipa nenoteiktība būs

$$u_B(y) = \frac{U}{\sqrt{3}}. \tag{1.4}$$

Retāk, kad nav zināms sadalījums, tiek pieņemts, ka mērījumi ir sadalīti pēc trīsstūrveida sadalījuma. Trīsstūrveida sadalījums atšķiras no vienmērīgā sadalījuma tajā, ka var pastāvēt zināšanas par to, kuras vērtības ir ticamākas tās robežās. Tas ir ierobežots simetrisks sadalījums, ko var izmantot, ja vērtības visdrīzāk atrodas netālu no sadalījuma centra. Blīvuma funkcija trīsstūrveida sadalījumam, kas atrodas intervālā $[-a, a]$, ir

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{a^2}, -a \leq x \leq 0 \\ \frac{a-x}{a^2}, 0 < x \leq a. \end{cases}$$

Šim sadalījumam vidējā vērtība ir 0, bet standartnovirze $a/\sqrt{6}$. Tas nozīmē, ka B tipa nenoteiktība trīsstūrveida sadalījumam būs

$$u_B(y) = \frac{U}{\sqrt{6}}.$$

Ja B tipa vērtību U uzskata par precīzi zināmu, tad arī $u_B(y)$ var uzskatīt par precīzi zināmu un šī mērījuma brīvības pakāpi var uzskatīt $+\infty$. Ja šāds pieņēmums nevar tikt veikts, tad B tipa nenoteiktības brīvības pakāpes var novērtēt kā

$$\nu_B \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u_B(y)}{u_B(y)}\right]^{-2}.$$

Šajā izteiksmē iekavās esošais daudzums ir relatīvā nenoteiktība nenoteiktībai $u_B(y)$. Par relatīvo nenoteiktību sauc attiecību, cik uzticama ir nenoteiktība. Piemēram, ja tika novērtēts, ka vērtības $u_B(y)$ ticamība aptuveni ir 25%, tad relatīvā nenoteiktība $\Delta u_B(y)/u_B(y) = 0{,}25$ un tas nozīmē, ka brīvības pakāpes nenoteiktībai būs $\nu_B = (0{,}25)^{-2}/2 = 8$.

1.3. Kombinētā standarta mērījumu nenoteiktība

Kombinēto standarta nenoteiktību izsaka kā standartnovirzi nenoteiktības sadalījumā, kas iegūts, apvienojot A tipa un B tipa individuālās dispersijas un kovariācijas starp tām.

Kombinēto standarta nenoteiktību $u_c(y)$ aprēķina ar formulu

$$u_c(y) = \sqrt{u_A^2(y) + u_B^2(y)},$$

bet vairāku A un B tipa nenoteiktību gadījumā formula kļūst šāda:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_A} u_{A_i}^2(y) + \sum_{i=1}^{N_B} u_{B_i}^2(y)}. \tag{1.5}$$

Svarīga sastāvdaļa kombinētās nenoteiktības noteikšanā ir efektīvo brīvības pakāpju (ν_{eff}) noteikšana. Lai to izdarītu, tiek izmantota Velča-Satertvaita (*Welch–Satterthwaite*) aproksimācija. Efektīvās brīvības pakāpes ir brīvības pakāpes, kas saistītas ar hī-kvadrātā sadalījumu, ko izmanto, lai aproksimētu kombinētās standarta dispersijas $u_c^2(y)$ sadalījumu:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\frac{u_A^4(y)}{\nu_A} + \frac{u_B^4(y)}{\nu_B}},$$

bet vairāku A tipa un B tipa nenoteiktību gadījumā

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\frac{\sum_{i=1}^{N_A} u_{A_i}^4(y)}{\nu_{A_i}} + \frac{\sum_{i=1}^{N_B} u_{B_i}^4(y)}{\nu_{B_i}}}. \tag{1.6}$$

Ja ir zināmas efektīvās brīvības pakāpes, ir iespējams aprēķināt paplašināto nenoteiktību:

$$U = ku_c(y), \tag{1.7}$$

kur pārklājuma koeficients $k = t_p(\nu_{\text{eff}})$ jeb k tiek aprēķināts no t-sadalījuma izmantojot efektīvās brīvības pakāpes un atbilstošo ticamības līmeni.

1.4. Kombinētās mērījumu nenoteiktības matemātiskais pamatojums

Šajā apakšnodaļā apstatīta grāmatas [4] 7.3 apakšnodaļa.

Lielākā daļa mērījumu ir nelineāri. Pieeja nelineāru vienādojumu $f(X_1, X_2)$ gadījumā mērījumu nenoteiktības noteikšanai ir izmantojot pirmās kārtas Teilora rindas izvirzījumu:

$$Y = f(X_1, X_2) \approx f(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}) + \frac{\partial f}{\partial X_1}(X_1 - \mu_{X_1}) + \frac{\partial f}{\partial X_2}(X_2 - \mu_{X_2}),$$

kur μ_{X_1} un μ_{X_2} ir mainīgo X_1 un X_2 matemātiskās cerības.

Funkcija f, aproksimēta šādā veidā, kļūst par lineāro kombināciju ar vairākiem mainīgajiem. Vērts minēt, ka parciālie atvasinājumi $\left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \text{ un } \frac{\partial f}{\partial X_2}\right)$ tiek novērtēti pie vidējām vērtībām x_1 un x_2, tāpēc tie kļūst par konstantiem reizinātājiem.

Šī lineārās kombinācijas dispersija izskatās šādi:

$$\mathrm{D}(f(X_1, X_2)) \approx \mathrm{D}\left(f(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}) + \frac{\partial f}{\partial X_1}(X_1 - \mu_{X_1}) + \frac{\partial f}{\partial X_2}(X_2 - \mu_{X_2})\right).$$

$f(\mu_{X_1}, \mu_{X_2})$ ir konstanta, tāpēc tā ietekmē vidējo vērtību aproksimētajai funkcijai, bet neietekmē dispersiju. Otrajam un trešajam saskaitāmajam ir konstanti reizinātāji $\left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \text{ un } \frac{\partial f}{\partial X_2}\right)$, tāpēc šo mainīgo dispersijas ir $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1)$ un $\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2)$, kur $u^2(x_1)$ un $u^2(x_2)$ ir attiecīgi $\mathrm{D}(x_1)$ un $\mathrm{D}(x_1)$. Šo divu komponenšu savienošana veido kombinēto dispersiju:

$$u_c^2(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2).$$

Šis rezultāts var tikt vispārināts jebkādam skaitam mainīgajiem:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i),$$

kas atbilst GUM kombinētajai nenoteiktībai.

Vienādojums pieņem, ka visi mērījuma mainīgie ir nekorelēti un mērījuma modelis f ir aptuveni lineārs vajadzīgajā intervālā.

1.5. Nenoteiktības aprēķini netiešā mērījuma gadījumā (GUM metode)

Iepriekš tika aprakstīts, kā tiek aprēķinātas nenoteiktības, ja tās ir jāaprēķina tiešam mērījumam. Netiešu mērījumu nenoteiktības analīzi var aprakstīt ar šādiem soļiem.

1. Formulēt mērījuma vienādojumu. Svarīgi, lai funkcijai $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ tiktu izmantoti visi mainīgie.

2. Katram mainīgajam jānosaka varbūtību sadalījums un jāaprēķina nenoteiktības. Sadalījumiem jābūt noteiktiem ņemot vērā gan A tipa, gan B tipa nenoteiktības.

3. Izpildot pirmos divus soļus, kombinēto nenoteiktību var aprēķināt kā

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i),$$

   kur x_i ir X_i novērojumi.

4. Parciālie atvasinājumi $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ tiek saukti par jutības koeficientiem (c_i). Tie parāda, cik lielā mērā y mainās, izmanoties x_i.

5. Lielums Y tiek aproksimēts ar formulu

$$\overline{y} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_N).$$

6. Noteikt paplašināto nenoteiktību U, kas ļauj noteikt nenoteiktības intervālu formā

$$\overline{y} - U, \overline{y} + U.$$

Šī metode tiek saukta par GUM metodi.

2. MONTEKARLO METODE

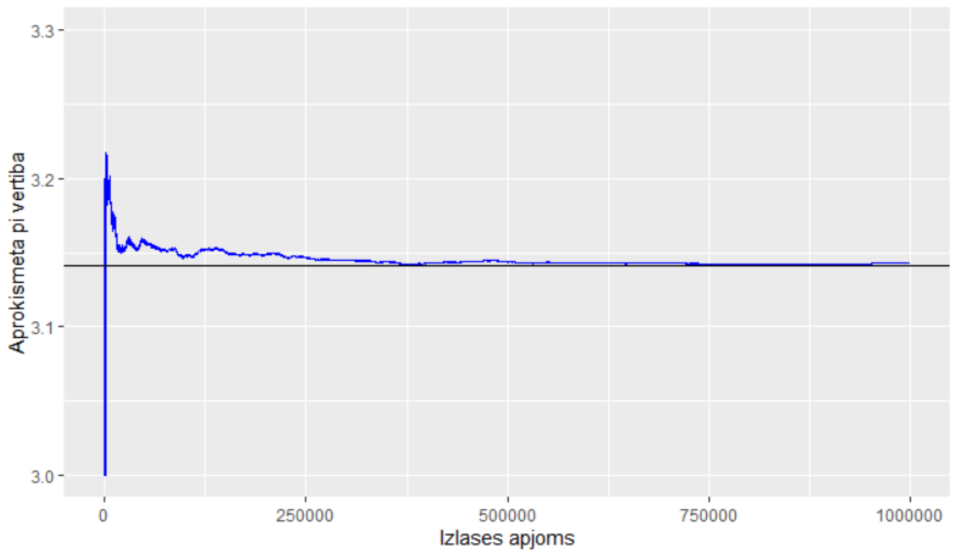
Šajā nodaļā aplūkota [4] grāmatas 8. nodaļa par Montekarlo metodi.

Montekarlo metode statistikā tiek jau izmantota kopš 1947. gada, bet lielāku popularitāti ieguva 20. gadsimta 70. gados. Montekarlo metode veic secinājumus izmantojot lielu daudzumu nejaušus skaitļus no vajadzīgā sadalījuma. Senākos laikos šī metode nebija populāra, jo Montekarlo metodes bija neprecīzas mazu izlašu dēļ.

Montekarlo metodi vieglāk ir saprast ar piemēru.

2.1. Piemērs. π vērtības aprēķināšana.

Zinot, ka kvadrāta laukuma attiecība pret ceturtdaļapļa laukumu ir $\pi/4$, punkti var tikt simulēti kvadrātā. Simulējot izlasi un skaitot attiecību, cik no tiem $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$, var tikt iegūta π vērtība. Veicot Montekarlo metodi programmā R ar 100000 simulācijām, π vērtība tika aproksimēta ar vērtību 3,13876.



1. att. π **vērtības aproksimācija atkarībā no izlases apjoma**

1.attēlā redzams, ka palielinoties simulētajam izlases apjomam, π vērtības aproksimācija tuvojas patiesajai π vērtībai. Tas nozīmē, ka pareiza izlases apjoma izvēle ir svarīga.

2.2. Piemērs. Integrāļa $\int_0^{2\pi} e^{-x/2}\sin(\frac{\pi x}{2})\,dx$ aprēķināšana.

Ir zināms, ka nepārtrauktai funkcijai $f(x)$ intervālā no a līdz b integrāli var aproksimēt kā

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{N}\sum_{i=0}^{N} f(x_i), \tag{2.1}$$

kur x_i ir izlases elements no vienmērīgā sadalījuma. Izmantojot Montekarlo metodi un simulējot 10000 vērtības no vienmērīgā sadalījuma, un izmantojot (2.1), tika iegūta vērtība 0,599. Patiesā noapaļotā vērtība integrālim ir $\approx 0{,}604$.

2.1. Gadījumizlases veidošanas tehnikas un gadījuma skaitļu ģenerēšana

Šajā apakšnodaļā aprakstīta grāmatas [4] apakšnodaļa 8.1.1.

Montekarlo metode sastāv no gadījumizlases veidošanas no varbūtību sadalījuma. Tāpēc ir svarīga laba gadījuma skaitļu ģeneratora esamība. Kādreiz šos nejaušos skaitļus veidoja no fiziskiem līdzekļiem, piemēram, metot kauliņus, bet tagad to dara datori. Mūsdienu programmēšanas valodās jau šobrīd ir ieviesti algoritmi gadījuma skaitļu ģenerēšanai. Šajā nodaļā tiks aprakstīta gadījumu skaitļu ģenerēšana.

Gadījuma skaitļu ģeneratorus var sadalīt divās kategorijās.

- Īstie gadījuma skaitļu ģeneratori. Tie ģenerē pilnīgi nejaušas, neatkarīgas un neparedzamas izlases.
- Fiktīvie gadījuma skaitļu ģeneratori. Ģenerētās izlases var šķist pilnīgi nejauši ģenerētas, bet tās patiesībā ievēro iepriekš veidotu algoritmu.

Īstie gadījuma skaitļu ģeneratori ir svarīgi šifrēšanā, jo skaitļu paredzamība nozīmētu iespēju šifru atšifrēšanu. Šādus ģeneratorus ir grūti ieviest programmatūrā. Fiktīvie gadījuma skaitļu ģeneratori ir paredzami, ja iepriekš ir zināms, kādi ir algoritma nosacījumi, bet tos ir viegli ieviest programmatūrā. Tieši šī iemesla dēļ tie tiek izmantoti Montekarlo metodei.

Lai varētu izmantot fiktīvo gadījuma skaitļu ģeneratorus, ir jāizpildās šādām īpašībām.

1. Skaitļu sērijas garums. Fiktīvo skaitļu ģeneratori atkārtojas pēc noteikta laika. Tāpēc ir svarīgi, ka skaitļu sērijas lielums būtu lielāks nekā izvēlētās izlases lielums. Sakarā ar iespējamām ilgtermiņa slēptām korelācijām skaitļu sērijā ir ieteicams, lai skaitļu sērijas garums būtu vismaz vajadzīgā izlases lieluma kvadrāts.
2. Nekorelētība. Ģenerētajām vērtībām jābūt neatkarīgām un nekorelētām. Daudzi algoritmi var šķist neatkarīgi īsām skaitļu sērijām, bet patiesībā tā nav.
3. Vienmērība. Ģenerētajām vērtībām jābūt sadalītām pēc vienmērīgā sadalījuma, lai tās būtu vērtīgas Montekarlo simulācijām.
4. Skaitļu sērijām jābūt ģenerējamām dažādos laikos. Tas ir svarīgi, lai spētu simulāciju testēt.

Lineārais kongruenciālais ģenerators

Viens no visvienkāršākajiem fiktīvo skaitļu ģeneratoriem ir lineārais kongruenciālais ģenerators (LCG). Šis skaitļu ģenerators nav piemērots tieši Montekarlo metodēm, bet uz šī ģeneratora pamata ir radīti ģeneratori, kas der Montekarlo simulācijām. Ģeneratora skaitļi tiek izvēlēti ar vienādojumu

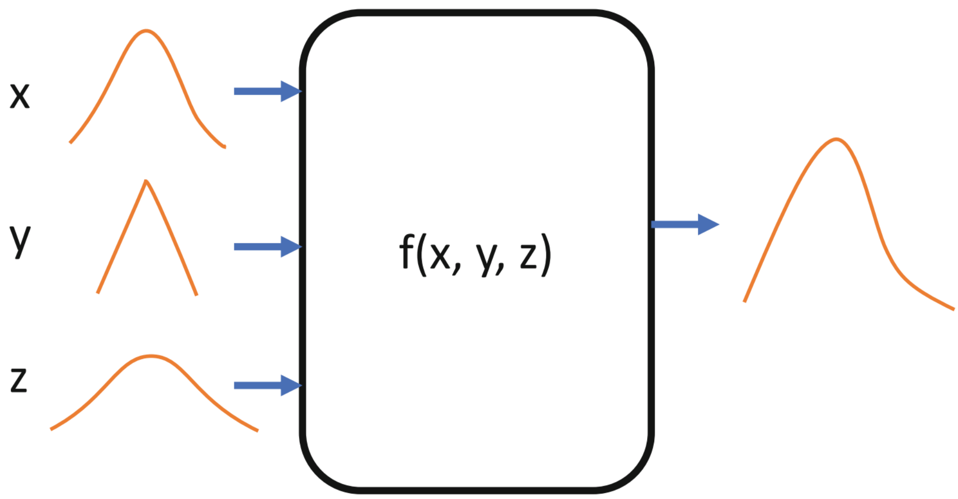
$$X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m.$$

Ģeneratoram tiek izmantoti trīs parametri – a, c un m. Šo parametru un X_0 izvēle (tiek saukta par "sēklu" (*seed*)) nosaka garumu nejaušo skaitļu virknei. Parametru a un c izvēle ir ļoti svarīga. Nepareizu šo parametru izvēle var izraisīt ļoti īsu nejaušo skaitļu virkni, jo skaitļi atkārtotos pēc konkrēta perioda.

Uz šī ģeneratora pamata ir izveidots Mersenna Tvistera (*Mersenne Twister*) ģenerators, kas tiek izmantots arī programmā R. Nosaukums radies no fakta, ka perioda garums šim ģeneratoram ir Mersenna pirmskaitlis ($M_n = 2^n - 1, n \in \mathbb{Z}$). Programmā R šis ģenerators tiek izmantots ar periodu $2^{19937} - 1$, bet maksimālā izlase šādā gadījumā var būt iespējama ar garumu $\approx 10^{3000}$.

2.2. Montekarlo metode mērījumu nenoteiktības novērtēšanā

Lai noteiktu nenoteiktību mērījumam, Montekarlo metode ir viegli īstenojama. Katram mainīgajam tiek izveidota nejauša N lieluma izlase no mainīgā sadalījuma. Mainīgos apvienojot tiek izveidotas N iespējamās vērtības mērījumam. Aprēķinot vidējo vērtību un standartnovirzi tiek novērtēta patiesā vērtība mērījumam un nenoteiktība.



2. att. **Ilustrācija Montekarlo metodes pielietojumam nenoteiktības novērtēšanai**

2.3. Piemērs. Pieņemot, ka mērījums y tiek aprēķināts ar formulu $y = xz$, tad, veicot $N = 1000$ Montekarlo simulācijas, vidējā vērtība būs

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}$$

un standartnovirze

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \overline{y})^2}{N}},$$

kur $y_i = x_i z_i,\ i = 1,...,N$.

Jutības koeficienti Montekarlo metodei

GUM metodei jutības koeficienti tiek noteikti no parciālajiem atvasinājumiem katram mērījuma mainīgajam. Tā tiek noteikta katra mainīgā ieguldījums kopējajā nenoteiktībā. Montekarlo metodei jutības koeficienti netiek noteikti, bet tos var novērtēt, izmantojot nelineāro modeli. Veids, kā to paveikt, ir visus mainīgos, izņemot vienu, atstāt fiksētus. Simulējot izlasi ar garumu N, var noteikt nefiksētā mainīgā nenoteiktību. Iegūto rezultātu dalot ar nenoteiktību, kas ir pašam mainīgajam, tiek iegūts ”nelineārais jutības koeficients”. Ja modelis ir lineārs, tad jutības koeficients būs līdzīgs ar GUM metodes aprēķinātajiem koeficientiem. Lai atrastu proporciju, mainīgā jutības koeficients jādala ar visu jutības koeficientu summu. Vērts minēt, ka proporciju summa var nebūt 100%, jo simulācijas tiek veiktas atsevišķi katram mainīgajam.

3. VARBŪTĪBU SADALĪJUMU IDENTIFIKĀCIJA UN IZVĒLE

Šajā nodaļā aplūkota [4] grāmatas 4. nodaļa par varbūtību sadalījumu identifikāciju un izvēli.

Metroloģijā varbūtību sadalījumus var izmantot, lai noteiktu nenoteiktības. Liela nozīme ir varbūtību sadalījumu parametriem. Piemēram, ja mērījumi ir sadalīti pēc normālā sadalījuma, tad ar vidējo vērtību μ un standartnovirzi σ var novērtēt mērāmā objekta patieso vērtību un nenoteiktību.

Ir trīs soļi, kā noteikt varbūtību sadalījumu:

1. noteikt potenciālos sadalījumus,
2. novērtēt parametrus potenciālajiem sadalījumiem,
3. novērtēt sadalījuma saderību.

Lai noteiktu potenciālos sadalījumus svarīgi ir šādi faktori.

- Datu veids. Sadalījuma izvēlē ir jāsaprot, vai dati ir diskrēti vai nepārtraukti.
- Datu daudzums. Ja datu daudzums nav liels, papildus informācija (vēsturiskie dati, ražotāja specifikācijas) var būt nepieciešama sadalījuma izvēlē. Ja datu ir daudz, tad histogrammas vai varbūtību grafiki var palīdzēt izvēlē.
- Sadalījuma svarīgums. Sadalījumi mainīgajiem, kas ievērojami var ietekmēt nenoteiktības novērtēšanu, ir jāizvēlas ar lielu piesardzību.

Kā vispopulārākais nepārtrauktais sadalījums nenoteiktību analīzē tiek izmantots normālais sadalījums. Varbūtību blīvuma funkcija tiek definēta kā

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad -\infty < x < \infty,$$

kur μ ir vidējā vērtība un σ ir vidējā vērtība.

Vienmērīgais sadalījums tiek izmantots gadījumos, kad ir zināms, ka mērījuma patiesā vērtība atradīsies noteiktā intervālā, bet nav zināms kādas iespējamajām vērtībām varētu būt varbūtības. Tāpēc tiek pieņemts, ka katru vērtību intervālā ir iespējams iegūt ar vienādu varbūtību. Metroloģijā vienmērīgo sadalījumu izmanto, ja nenoteiktība tiek dota formā kā intervāls. Varbūtību blīvuma funkcija intervālā $[a, b]$ ir

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)}, & b \le x \le a \\ 0, & \text{citos gadījumos.} \end{cases}$$

Vidējā vērtība ir $\frac{a+b}{2}$ un standartnovirze ir $\frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}$.

Trīsstūrveida sadalījums atšķiras no vienmērīgā sadalījuma ar to, ka intervālā ir zināms, kurai vērtībai ir lielāka varbūtība tikt iegūtai. Varbūtību blīvuma funkcija intervālā $[-a, a]$ ir

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+a)}{a^2}, & -a \le x \le 0 \\ \frac{(a-x)}{a^2}, & 0 < x \le a \\ 0, & \text{citos gadījumos.} \end{cases}$$

Šajā intervālā vidējā vērtība ir 0 un standartnovirze ir $a/\sqrt{6}$.

Stjūdenta sadalījums metroloģijā tiek izmantots, ja mērījumu skaits ir mazs $(n < 30)$. Varbūtību blīvuma funkcija ar parametru ν ir

$$p(t, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{-(\nu+1)}{2}} \qquad -\infty < t < \infty, \quad \nu > 0.$$

Ar Γ tiek apzīmēta Gamma funkcija. Vidējā vērtība Stjūdenta sadalījumam ir 0, bet standartnovirze, ja $\nu > 2$ ir $\left(\frac{\nu}{\nu-2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

1. tabula

Varbūtību sadalījumu raksturojums un pielietojums metroloģijā

Sadalījums	**Ierobežoti dati**	**Informācija par datiem**	**Kad izmantot**
Normālais	Nē	Jā	Nepārtrauktām vērtībām (masa, temperatūra)
Vienmērīgais	Jā	Nē	Kalibrēšanās intervāli bez informācijas par varbūtībām
Trīsstūrveida	Jā	Jā	Ierobežotam intervālam ar datiem, kas iespējamāki viduspunktā
Stjūdenta	Nē	Jā	Veicot maz mērījumus

4. MONTEKARLO UN GUM METODES SALĪDZINĀJUMS

Šajā nodaļā aplūkota [4] grāmatas 8.3 apakšnodaļa par Montekarlo metodes salīdzinājumu ar GUM metodi.

Montekarlo un GUM metodēm ir savas priekšrocības un arī savi mīnusi. Montekarlo metodei nav vajadzīgi pieņēmumi par linearitāti mērījuma modelim. Katrs mainīgais var saglabāt savu varbūtību sadalījumu. GUM metodei ievades mainīgie tiek pārveidoti normālajā sadalījumā. Montekarlo metodes trūkumi ir

- laba skaitļu ģeneratora vajadzība,
- laiks, kas vajadzīgs, lai ģenerētu izlases, var būt ilgs,
- rezultātu atšķirība, jo simulācijas var atšķirties.

Abas metodes nenoteiktību novērtējumu var labi salīdzināt, izmantojot vizualizācijas. Izmantojot GUM metodes varbūtību funkcijas grafiku un Montekarlo metodes histogrammu.

Kvantitatīvs veids kā šīs metodes salīdzināt ir GUM metodes derīguma tests. Tests tiek veikts, veicot šādus soļus.

1. Aprēķināt 95% ticamības intervālu gan GUM metodei, gan Montekarlo metodei.
2. Noteikt ciparus aiz komata n_{dig}.
3. Nenoteiktību pierakstīt formā $a \times 10^r$, kur a ir vesels skaitlis ar n_{dig} cipariem aiz komata un r ir vesels skaitlis.
4. Aprēķināt pielaidi $\delta = \frac{1}{2}10^r$.
5. Salīdzināt 95% intervāla galapunktus starp abām metodēm. Ja atšķirība starp galapunktiem ir mazāka par δ, tad GUM metode ir derīga aproksimācija.

5. PIEMĒRI MĒRĪJUMU NENOTEIKTĪBAS NOVĒRTĒŠANĀ

5.1. Nenoteiktības novērtēšana diska blīvumam

Ir zināms, ka diska blīvuma aprēķināšanas formula ir

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi(d/2)^2 t} = \frac{4m}{\pi d^2 t}. \tag{5.1}$$

Veicot diametra un biezuma mērījumus 15 reizes un masas mērījumu 1 reizi, tika iegūti šādi rezultāti.

2. tabula

Mērījumu rezultāti diska blīvuma un tā nenoteiktības novērtēšanai

Ievades lielums	Vidējā vērtība	A tipa nenoteiktība	Blīvuma funkcija (A tipa)	B tipa nenoteiktība	Blīvuma funkcija (B tipa)
diametrs (d)	9,7 cm	0,07 cm	Vienmērīgais	-	-
biezums (t)	0,8 cm	0,03 cm	Vienmērīgais	-	-
masa (m)	178,2 g	-	-	0,2 g	Normālais

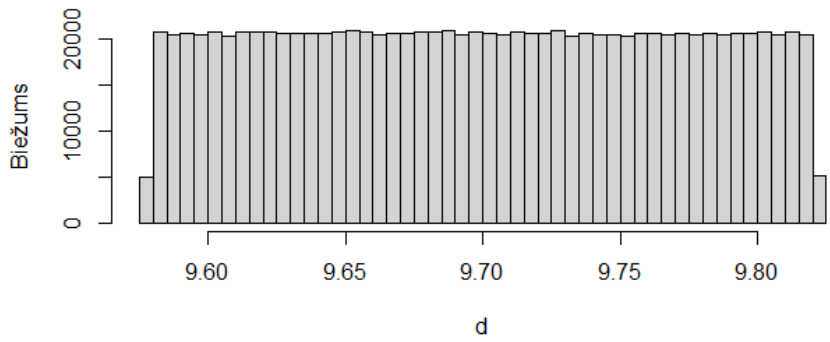
Ir zināms, ka svariem, uz kuriem tika veikts mērījums, pielaide $\pm U$ ir 0,8, un ja tiktu veikti vairāki mērījumi, tad tie būtu sadalīti normāli. Izmantojot (1.3) nenoteiktība diska masai ir $\frac{U}{2} = 0{,}4$.

Novērtēšana ar Montekarlo metodi

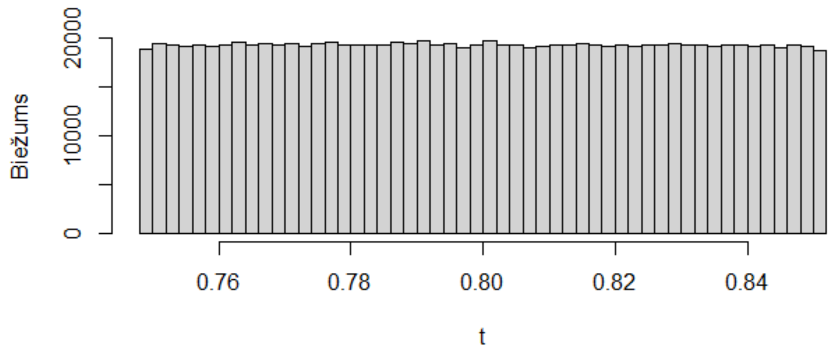
Lai novērtētu nenoteiktību ar Montekarlo metodi katram mainīgajam no formulas, izmantojot informāciju par diska blīvuma mainīgajiem, jāizveido gadījuma izlases. Par izlases apjomu tiek izvēlēts $N = 1000000$. Parasti gadījuma skaitļu ģeneratoriem, ja tiek izmantots vienmērīgais sadalījums, vajadzīga pielaide $\pm U$ no vienmērīgā sadalījuma nevis nenoteiktība. $\pm U$ būs vienmērīgā sadalījuma galapunkti. (1.4) var izmantot, lai to aprēķinātu.

$$U_d = u_B(d) \times \sqrt{3} = 0{,}07\,\text{cm} \times \sqrt{3} = 0{,}12\,\text{cm},$$

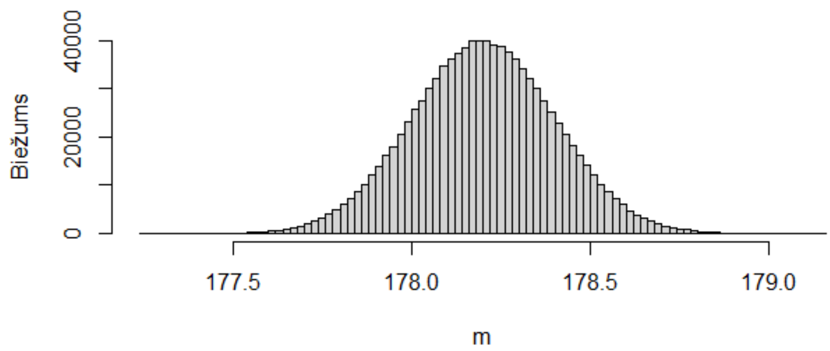
$$U_t = u_B(t) \times \sqrt{3} = 0{,}03\,\text{cm} \times \sqrt{3} = 0{,}05\,\text{cm}.$$



3. att. **Montekarlo gadījuma izlases histogramma diska diametram izmantojot vienmērīgo sadalījumu**



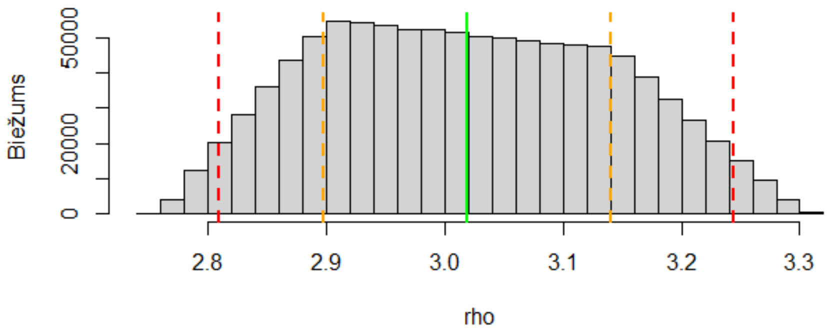
4. att. **Montekarlo gadījuma izlases histogramma diska biezumam izmantojot vienmērīgo sadalījumu**



5. att. **Montekarlo gadījuma izlases histogramma diska masai izmantojot normālo sadalījumu**

Izmantojot formulu (5.1), visas gadījuma izlases tiek sakombinētas un tiek izveidots kombinētais sadalījums. Aprēķinot kombinētajai izlasei vidējo vērtību un standartnovirzi tiek novērtēts diska blīvums un tā nenoteiktība.

Izmantojot programmu R diska blīvums tika novērtēts ar vērtību $3{,}01$ g/cm^3, bet nenoteiktība ir $0{,}12$ g/cm^3. To var uzrakstīt formā 3,01 g/cm^3 $\pm$ 0,12 g/cm^3.



6. att. **Diska blīvuma histogramma, novērtējums (zaļā līnija), nenoteiktība (oranžā pārtrauktā līnija) un 95% ticamības intervāls (sarkanā pārtrauktā līnija), izmantojot Montekarlo metodi**

Novērtēšana ar GUM metodi

Lai novērtētu nenoteiktību, vispirms jāiegūst jutības koeficienti. A tipa nenoteiktībām (diska diametram d un biezumam t) tie attiecīgi ir

$$\frac{\partial \rho}{\partial d} = -\frac{8m}{\pi t d^3} \tag{5.2}$$

un

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{4m}{\pi d^2 t^2}. \tag{5.3}$$

B tipa nenoteiktībai jeb diska masai jutības koeficients ir

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{4}{\pi d^2 t}. \tag{5.4}$$

Izmantojot nenoteiktības no 2. tabulas un jutības koeficientus (5.2)-(5.4), A tipa kombinētā nenoteiktība ir

$$u_A(\rho) = \sqrt{\left(-\frac{8m}{\pi t d^3}\right)^2 u^2(d) + \left(-\frac{4m}{\pi d^2 t^2}\right)^2 u^2(t)} = 0{,}12.$$

Tā kā B tipa nenoteiktība ir tikai diska masa, tāpēc

$$u_B(\rho) = \sqrt{\left(\frac{4}{\pi d^2 t}\right)^2 u^2(m)} = 0{,}003.$$

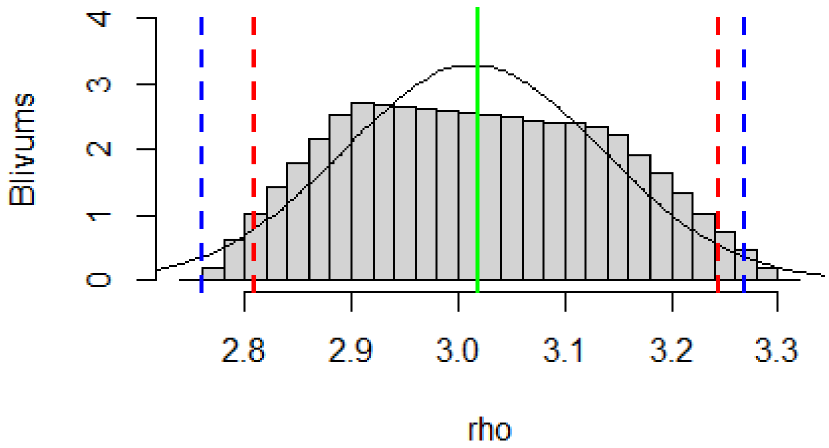
Kombinētā nenoteiktība diska blīvumam ir

$$u_c(\rho) = \sqrt{u_A^2(\rho) + u_B^2(\rho)} = 0{,}121. \tag{5.5}$$

Efektīvās brīvības pakāpes tiek aprēķinātas ar Velča-Satertvaita aproksimāciju (1.6)

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(\rho)}{\sum_{i=1}^{3} \frac{(c_i u(x_i))^4}{v_i}} \approx 18. \tag{5.6}$$

Montekarlo un GUM metodes salīdzinājums



7. att. **Montekarlo un GUM metožu grafiskais salīdzinājums diska blīvumam, izmantojot Montekarlo metodes histogrammu un GUM metodes blīvuma funkciju. Zaļā līnija sakrīt ar novērtēto patieso vērtību Montekarlo metodei. Ar sarkanajām pārtrauktajām līnijām attēlots Montekarlo metodes** 95% **ticamības intervāls, ar zilo pārtraukto līniju – GUM metodes** 95% **ticamības intervāls**

Lai abas metodes aplūkotu vizuāli, tiek pieņemts, ka GUM metodes blīvuma funkcija ir sadalīta pēc normālā sadalījuma, kur vidējā vērtība ir diska blīvuma vērtība, bet standartnovirze ir GUM metodes novērtētā nenoteiktība (5.5). Ticamības intervāls tiek atrasts ar (1.7). Grafikā redzams, ka Montekarlo metodes 95% ticamības intervāls ir mazāks nekā GUM metodes.

Veicot GUM metodes derīguma testu, kas aprakstīta 4. nodaļā, tika iegūti šādi rezultāti.

$$u_c(\rho) = 0{,}121 \approx 1 \times 10^{-3},$$
$$r = -3,$$
$$\delta = 0{,}5 \times 10^{-3} = 0{,}0005.$$

3. tabula

GUM metodes derīguma tests

	Apakšējā robeža	Augšējā robeža
GUM	2,76	3,27
Montekarlo	2,81	3,24
|GUM - MC|	0,05	0,03
|GUM - MC| < δ	Nē	Nē

No 3. tabulas var secināt, ka Montekarlo metode šajā gadījumā ir labāka aproksimācija, jo GUM metode aproksimācija pēc testa veikšanas var tikt uzskatīta par nederīgu aproksimāciju, jo $|\mathrm{GUM} - \mathrm{MC}| > \delta$.

Salīdzinot abu metožu jutības koeficientus tika iegūti šādi rezultāti.

4. tabula

GUM un Montekarlo metodes jutības koeficienti diska blīvumam

	GUM	Montekarlo
d	-0,62	0,62
t	-3,76	3,78
m	0,02	0,02

Aplūkojot 4. tabulas rezultātus var secināt, ka koeficienti ir līdzīgi abām metodēm. Montekarlo metodei šie koeficienti ir tikai pozitīvi, jo no standartnovirzēm nevar iegūt negatīvus rezultātus.

5.2. Nenoteiktības novērtēšana koriģētam rentgena XRF biezumam

Koriģēts rentgena XRF biezuma mērījums, $Y_{\text{koriģēts}}$, tiek novērtēts netieši no nekoriģēta biezuma mērījuma, $Y_{\text{nekoriģēts}}$, ar formulu

$$Y_{\text{koriģēts}} = \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^2 + Y^2_{\text{nekoriģēts}}, \tag{5.7}$$

kur X_1 un X_2 ir neatkarīgi korekcijas koeficienti. 5. tabula nodrošina ar vajadzīgo informāciju nenoteiktības analīzei.

5. tabula

Mērījumu rezultāti koriģētam XRF biezumam

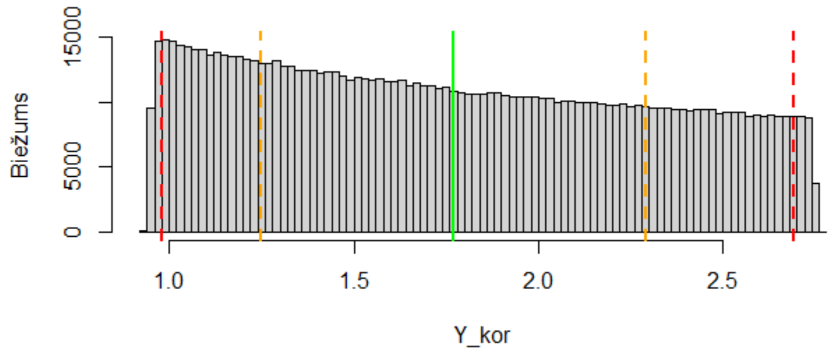
Ievades lielums	Vidējā vērtība	A tipa nenoteiktība	Blīvuma funkcija (A tipa)	Brīvības pakāpe
$Y_{\text{nekoriģēts}}$	1,3 μm	0,2	Vienmērīgais	19
X_1	0,1763 μm	0,00097	Normālais	9
X_2	0,1912 μm	0,00060	Normālais	19

Novērtēšana ar Montekarlo metodi

Izmantojot 5. tabulas informāciju par mainīgo nenoteiktībām un sadalījumiem, tiek uzģenerētas gadījuma izlases. $Y_{\text{nekoriģēts}}$, lai uzģenerētu izlasi, tiek izmantots pusplatums, kas tiek iegūts ar formulu (1.4).

$$U_{Y_{\text{nekoriģēts}}} = u_A \times \sqrt{3} = 0{,}35.$$

Izmantojot formulu (5.7), visas gadījuma izlases tiek sakombinētas un tiek izveidots kombinētais sadalījums. Aprēķinot kombinētajai izlasei vidējo vērtību un standartnovirzi tiek novērtēts koriģētais XRF biezums un tā nenoteiktība.



8. att. **Montekarlo metodes histogramma koriģētam XRF biezumam. Zaļā līnija apzīmē novērtēto patieso vērtību ar Montekarlo metodi. Ar sarkanajām pārtrauktajām līnijām attēlots Montekarlo metodes 95% ticamības intervāls, ar oranžajām pārtrauktajām līnijām – nenoteiktība koriģētam XRF biezumam.**

Aplūkojot 8. attēlu, var ieraudzīt, ka sadalījums koriģētajam XRF biezuma mērījumam nav simetrisks. Patiesā vērtība tika novērtēta ar ar 1,76, bet nenoteiktība ar 0,52. 95% ticamības intervāla galapunkti ir $[0{,}98;\ 2{,}69]$.

Novērtēšana ar GUM metodi

Lai novērtētu nenoteiktību vispirms jāiegūst jutības koeficienti. A tipa nenoteiktībām jeb X_1, X_2 un $Y_{\text{nekoriģēts}}$ ir

$$\frac{\partial Y_{\text{koriģēts}}}{\partial X_1} = \frac{2X_1}{X_2^2} \tag{5.8}$$

un

$$\frac{\partial Y_{\text{koriģēts}}}{\partial X_2} = -\frac{2X_1^2}{X_2^3}, \tag{5.9}$$

un

$$\frac{\partial Y_{\text{koriģēts}}}{\partial Y_{\text{nekoriģēts}}} = 2Y_{\text{nekoriģēts}}. \tag{5.10}$$

Izmantojot nenoteiktības no 5. tabulas un jutības koeficientus (5.8)-(5.10), A tipa kombinētā nenoteiktība ir

$$u_A(Y_{\text{koriģēts}}) = \sqrt{\left(\frac{2X_1}{X_2^2}\right)^2 u^2(X_1) + \left(-\frac{2X_1^2}{X_2^3}\right)^2 u^2(X_2) + \left(\frac{2X_1}{X_2^2}\right)^2 u^2(Y_{\text{nekoriģēts}})} = 0{,}52.$$

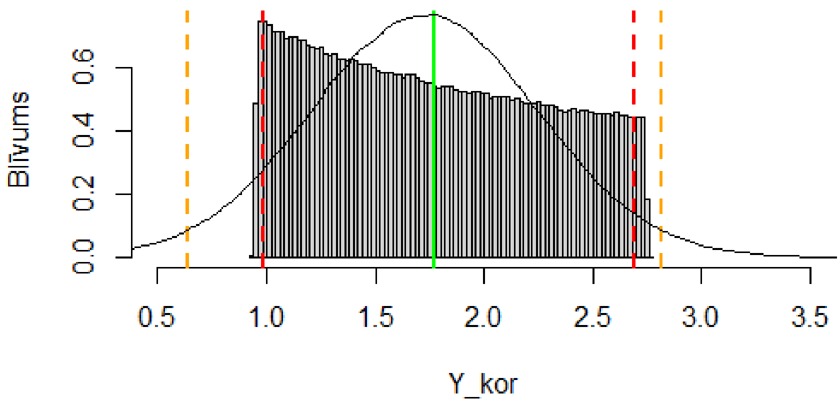
$Y_{\text{koriģēts}}$ B tipa mērījuma nenoteiktības nav, tāpēc kombinētā nenoteiktība ir

$$u_c(Y_{\text{koriģēts}}) = u_A(Y_{\text{koriģēts}}) = 0{,}52. \tag{5.11}$$

Efektīvās brīvības pakāpes tiek aprēķinātas ar Velča-Satertvaita aproksimāciju (1.6)

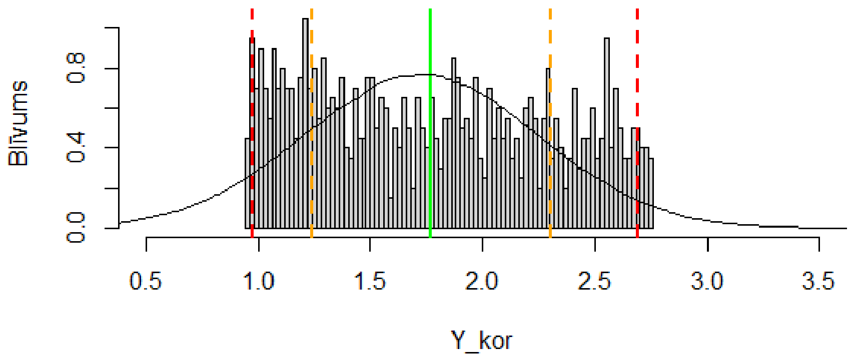
$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(Y_{\text{koriģēts}})}{\sum_{i=1}^{3} \frac{(c_i u(x_i))^4}{v_i}} \approx 19. \tag{5.12}$$

Montekarlo un GUM metodes salīdzinājums



9. att. **Montekarlo un GUM metožu grafiskais salīdzinājums koriģētam XRF biezumam, izmantojot Montekarlo metodes histogrammu un GUM metodes blīvuma funkciju. Zaļā līnija apzīmē novērtēto patieso vērtību Montekarlo metodei. Ar sarkanajām pārtrauktajām līnijām attēlots Montekarlo metodes** 95% **ticamības intervāls, ar oranžajām pārtrauktajām līnijām – GUM metodes** 95% **ticamības intervāls. Montekarlo izlases lielums** $N = 1000000$

Lai abas metodes aplūkotu vizuāli, tiek pieņemts, ka GUM metodes blīvuma funkcija ir sadalīta pēc normālā sadalījuma, kur vidējā vērtība ir koriģētā XRF biezuma vērtība, bet standartnovirze - GUM metodes novērtētā nenoteiktība (5.11). (5.5). Ticamības intervāls tiek atrasts ar (1.7). 9. attēlā redzams, ka GUM metodes 95% ticamības intervālā atrodas visi rezultāti, kas var būt iespējami, izmantojot Montekarlo metodi. No tā var secināt, ka šajā gadījumā GUM metode nedod uzticamus rezultātus, jo tā neņem vērā informāciju par mainīgo varbūtību sadalījumiem.



10. att. **Montekarlo un GUM metožu grafiskais salīdzinājums koriģētam XRF biezumam, izmantojot Montekarlo metodes histogrammu un GUM metodes blīvuma funkciju. Zaļā līnija apzīmē novērtēto patieso vērtību Montekarlo metodei. Ar sarkanajām pārtrauktajām līnijām attēlots Montekarlo metodes** 95% **ticamības intervāls, ar oranžajām pārtrauktajām līnijām – Montekarlo metodes nenoteiktība. Montekarlo izlases lielums** $N = 1000$

Salīdzinot Montekarlo simulētās histogrammas 9. attēlam un 10. attēlam var vizuāli redzēt, ka Montekarlo sadalījumi atšķiras krasi. Mērījums, kas veikts ar izlasi $N = 1000000$ ir uzticamāks, ko sadalījums ir daudz vienmērīgāks, bet izlasei ar lielumu $N = 1000$ tā nav. Arī nenoteiktības veicot simulācijas atšķīrās. Ar izlasi $N = 1000$ nenoteiktība tika novērtēta ar vērtību 0,51, bet ar $N = 1000000$ – 0,52. Zinot, ka palielinoties izlases lielumam, novērtējums tuvojas savai patiesajai vērtībai, tad var uzskatīt, ka novērtējums ar izlasi $N = 1000$ ir neuzticams.

SECINĀJUMI

Šī darba mērķis izpētīt Montekarlo metodes pielietojumu nenoteiktības novērtēšanā un salīdzināt to ar GUM standartiem jeb GUM metodi. Izpētot literatūru par mērījumu nenoteiktībām, tika secināts, ka Montekarlo metodes veiksmīgai darbībai ir vajadzīga laba skaitļu ģeneratora esamība, mainīgo sadalījumu pareiza izvēle. Sadalījumu izvēli var veikt izmantojot pieejamo informāciju (eksperimenta mērījumi, vēsturiskie dati, kalibrēšanas ziņojumi, ražotāja specifikācijas, atsauces dati no rokasgrāmatas). Teorētiski salīdzinot GUM un Montekarlo metodes tika secināts, ka Montekarlo metode ir relatīvi vienkāršāka un ar šo metodi tiek saglabāts katra mainīgā sadalījums. GUM metodei katrs mainīgais tiek pārveidots normālajā sadalījumā. Darba uzdotais mērķis tika izpildīts, apskatot divus praktiskus piemērus nenoteiktības novērtēšanā.

No darbā apskatītajiem piemēriem var secināt, ka Montekarlo metode ir vienkāršāka un tā sniedz daudz vairāk informāciju par varbūtību sadalījumu mērījumam. Apskatītajos piemēros mērījumu nenoteiktība praktiski neatšķīrās, bet atšķīrās varbūtību sadalījums un šī iemesla dēļ arī 95% ticamības intervāls. Apskatot praktisko piemēru koriģētajam XRF biezumam, tika secināts, ka svarīgs ir Montekarlo simulāciju skaits, lai tas dotu precīzus rezultātus un simulācijas neaizņemtu daudz laika. Abiem piemēriem GUM metode izrādījās nederīga mērījumu nenoteiktības analīzei.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA UN AVOTI

[1] Evaluation of measurement data — guide to the expression of uncertainty in measurement. https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM_100_2008_E.pdf/cb0ef43f-baa5-11cf-3f85-4dcd86f77bd6. [Skatīts 24.05.2022].

[2] Par mērījumu vienotību. https://likumi.lv/doc.php?id=42562. [Skatīts 24.05.2022].

[3] Christos E. Papadopoulos and Hoi Yeung. Uncertainty estimation and monte carlo simulation method. *Flow Measurement and Instrumentation*, 12(4):291–298, 2001.

[4] Eric Forrest Nevin Martin Stephen Crowder, Collin Delker. *Introduction to Statistics in Metrology*. Springer Cham, 2020.

A. R KODS NENOTEIKTĪBAS ANALĪZEI DISKA BLĪVUMAM

```
### Nenoteiktibas analize diska blivumam
rho <- function(d, t, m) {
  (4*m)/ (pi*(d^2)*t)
}

d <- c(9.7, 0.07)
t <- c(0.8, 0.03)
m <- c(178.2, 0.2)

### Montekarlo metode

Ud <- d[2] * sqrt(3)
Ut <- t[2] * sqrt(3)

n <- 1000000
dIzlase <- runif(n = n, min = d[1] - Ud, max = d[1] + Ud)
tIzlase <- runif(n = n, min = t[1] - Ut, max = t[1] + Ut)
mIzlase <- rnorm(n = n, mean = m[1], sd = m[2])

dHist <- hist(dIzlase, main = ””, xlab = ”d”, ylab = ”īBlvums”, freq = FALSE
    , breaks = 100)
tHist <- hist(tIzlase, main = ””, xlab = ”t”, ylab = ”īBlvums”, freq = FALSE
    , breaks = 100)
mHist <- hist(mIzlase, main = ””, xlab = ”m”, ylab = ”īBlvums”, freq = FALSE
    , breaks = 100)

rhoIzlase <- rho(dIzlase, tIzlase, mIzlase)
rhoNovertejums <- mean(rhoIzlase)
rhoNenoteiktiba <- sd(rhoIzlase)
ticamibasInt <- quantile(rhoIzlase, probs = c(0.025, 0.975))

### GUM metode

rhoVien <- expression((4*m)/ (pi*(d^2)*t))

atvasinajums <- function(d, t, m, by){
  atv <- D(rhoVien, by)
  eval(atv)
```

```
}

dRHOdD <- atvasinajums(d[1], t[1], m[1], "d")
dRHOdT <- atvasinajums(d[1], t[1], m[1], "t")
dRHOdM <- atvasinajums(d[1], t[1], m[1], "m")

ud <- dRHOdD * d[2]
ut <- dRHOdT * t[2]
um <- dRHOdM * m[2]

uTypeA <- sqrt(ud^2 + ut^2)
uTypeB <- sqrt(um^2)

uC <- sqrt(uTypeA^2 + uTypeB^2)
rhoEst <- rho(d[1], t[1], m[1])

brivPak <- data.frame(d = 14, t = 14, m = Inf)

veff <- uC^4 / ((ud^4/brivPak$d) + (ut^4/brivPak$t) + (um^4/brivPak$m))
expUnc <- qt(p = 0.975, df = 18) * uC
ticInt <- c(rhoEst - expUnc, rhoEst + expUnc)

gum <- rnorm(n = n, rhoEst, uC)

### Montekarlo un GUM salidzinajums

gumLimits <- c(2.76, 3.27)
gumSD <- 0.121
mcLimits  <- c(2.81, 3.24)

ndig <- 1
r <- floor(log(gumSD)) - (ndig - 1)
delta <- 0.5 * 10.0^r
diff <- abs(gumLimits-mcLimits)
testResult <- ifelse(diff < delta, 'PASS', 'FAIL')
validity <- t(data.frame(GUM = gumLimits, MC = mcLimits, Difference = diff,
    Result = testResult))
colnames(validity) <- c("Lower Limit", "Upper Limit")

### Grafiks Montekarlo un GUM metodes salidzinajumam
```

```

hist(rhoIzlase, freq = FALSE, main = ””, xlab = ”rho”, ylab = ”īBlvums”,
    ylim = c(0, 4))
lines(density(gum))
abline(v = c(ticamibasInt[1], ticamibasInt[2], ticInt[1], ticInt[2],
    rhoNovertejums)
        , col = c(”red”, ”red”, ”blue”, ”blue”, ”green”)
        , lty = c(2,2,2,2,1)
        , lwd = c(2,2,2,2,2))
lines(density(gum))

### Jutibas koeficienti Montekarlo metodei

dJut <- rho(d = dIzlase, m = m[1], t = t[1])
dKoef <- sd(dJut)

tJut <- rho(d = d[1], t = tIzlase, m = m[1])
tKoef <- sd(tJut)

mJut <- rho(d = d[1], t = t[1], m = mIzlase)
mKoef <- sd(mJut)

koef <- t(data.frame(d = dKoef/d[2], t = tKoef/t[2], m = mKoef/m[2]))

prop <- t(data.frame(d = dKoef/rhoNenoteiktiba, t = tKoef/rhoNenoteiktiba,
    m = mKoef/rhoNenoteiktiba))

rez <- cbind(koef, prop)
colnames(rez) <- c('Jutiba', 'Proporcija')
```

B. R KODS NENOTEIKTĪBAS ANALĪZEI KORIĢĒTAM RENTGENA XRF BIEZUMAM

```
### Nenoteiktibas analize XRF
yNekor <- c(1.3, 0.2, 19)
X1 <- c(0.1763, 0.00097, 9)
X2 <- c(0.912, 0.060, 19)

```

```
UyN <- yNekor[2] * sqrt(3)

### Montekarlo metode

n <- 1000000

yNekorIzl <- runif(n = n, min = yNekor[1] - UyN, max = yNekor[1] + UyN)
X1Izl <- rnorm(n = n, mean = X1[1], sd = X1[2])
X2Izl <- rnorm(n = n, mean = X2[1], sd = X2[2])

yNekorHist <- hist(yNekorIzl, main = ””, xlab = ”Y_nekor”, ylab = ”īBlvums”,
    freq = FALSE, breaks = 100)
X1Hist <- hist(X1Izl, main = ””, xlab = ”X1”, ylab = ”īBlvums”, freq = FALSE
    , breaks = 100)
X2Hist <- hist(X2Izl, main = ””, xlab = ”X2”, ylab = ”īBlvums”, freq = FALSE
    , breaks = 100)

yKor <- function(yNekor, X1, X2) {
  (X1/X2)^2 + yNekor^2
}

yKorIzl <- yKor(yNekorIzl, X1Izl, X2Izl)
yKorNovert <- mean(yKorIzl)
yKorNenoteikt <- sd(yKorIzl)
yKorTicamibasInt <- quantile(yKorIzl, probs = c(0.025, 0.975))

### GUM metode

yKorVien <- expression((X1/X2)^2 + yNekor^2)

atvasinajums <- function(yNekor, X1, X2, by){
  atv <- D(yKorVien, by)
  eval(atv)
}

dYKordYNekor <- atvasinajums(yNekor[1], X1[1], X2[1], ”yNekor”)
dyKordX1 <- atvasinajums(yNekor[1], X1[1], X2[1], ”X1”)
dyKordX2 <- atvasinajums(yNekor[1], X1[1], X2[1], ”X2”)

uYNekor <- dYKordYNekor * yNekor[2]
```

```
uX1 <- dyKordX1 * X1[2]
uX2 <- dyKordX2 * X2[2]

uC <- sqrt(uYNekor^2 + uX1^2 + uX2^2)
yKorEst <- yKor(yNekor[1], X1[1], X2[1])

veff <- uC^4 / ((uYNekor^4/yNekor[3]) + (uX1^4/X1[3]) + (uX2^4/X2[3]))
yKorexpUnc <- qt(p = 0.975, df = 18) * uC
yKorInt <- c(yKorEst - yKorexpUnc, yKorEst + yKorexpUnc)
gum <- rnorm(n = n, yKorEst, uC)

### Grafiks GUM un Montekarlo metodes īāsaldzinjumam

hist(yKorIzl, freq = FALSE, main = ””, xlab = ”Y_kor”, ylab = ”īBlvums”,
    breaks = 100, xlim = c(0.5, 3.5))
abline(v = c(yKorTicamibasInt[1], yKorTicamibasInt[2], yKorInt[1], yKorInt
    [2], yKorNovert)
        , col = c(”red”, ”red”, ”orange”, ”orange”, ”green”)
        , lty = c(2,2,2,2,1)
        , lwd = c(2,2,2,2,2))
lines(density(gum))
```

BAKALAURA DARBS darbs "Montekarlo metodes pielietojums mērījumu nenoteiktības novērtēšanā" izstrādāts LU Fizikas, Matemātikas un Optometrijas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Markuss Voldemārs Lancmanis

(paraksts) (datums)

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai:

Vadītājs: pētniece Dr.math. Māra Delesa-Vēliņa

(paraksts) (datums)

Recenzents:

(paraksts) (datums)

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā 2022. gada 2. jūnijā.

(Dekāna pilnvarotā persona: vecākā metodiķe Inita Šneidere)

Darbs aizstāvēts bakalaura darbs gala parbaudījuma komisijas sēdē

2022. gada ____. jūnijā.