

LATVIJAS UNIVERSITĀTE  
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE  
MATEMĀTIKAS NODAĻA

**MAGISKIE DAUDZSTŪRI UN TO ĪPAŠĪBAS**

BAKALAURA DARBS

Autors: **Elīna Buliņa**

Studenta apliecības Nr.: eb12030

Darba vadītājs: prof. Dr. math. Andrejs Cibulis

RĪGA 2016

## Anotācija

Darbā aplūkoti maģiskie daudzstūri – polimino, kuriem visu malu garumi ir dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz  $n$ , un pētītas vairākas to īpašības: eksistences nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi, laukumu vērtību kopa, malu garumu monotonitāte. Izstrādāta datorprogramma, ar kuras palīdzību ir atrasti visi maģiskie 8-stūri un visi perfekti  $n$ -stūri, ja  $n = 8$  un 16. Aplūkoti arī maģiskie polimondi. Vairāki iegūtie rezultāti ir jauni un pagaidām nav atrodami literatūrā.

Atslēgvārdi: laukums, maģiskie  $n$ -stūri, polimino, polimondi, perfekti  $n$ -stūri.

## **Annotation**

In this research paper magic polygons – polyominoes whose lengths of edges are all different integers from 1 to  $n$  are examined, and several their properties are studied: sufficient and necessary conditions of existence, set of area values, monotonicity of edge lengths. The computer program allowing to find all magic octagons and all perfect  $n$ -gons, if  $n = 8$  and 16, has been elaborated. Magic polyiamonds are also examined. Several of the obtained results are new and are not found in literature yet.

Keywords: area, magic polygons, polyomino, polyiamonds, perfect magic polygons

## SATURS

Ievads.....	5
1. Maģiskie polimino.....	7
1.1. Maģisko $n$ -stūru eksistences nepieciešamais un pietiekamais nosacījums .....	8
1.2. Maģiskie polimino ar secīgu malu izvietojumu .....	13
1.3. Maģisko polimino meklēšana ar datorprogrammu.....	16
2. Maģisko astoņstūru laukumi.....	17
3. Maģiskie polimondi.....	19
Nobeigums.....	21
Izmantotā literatūra.....	22
Pielikumi.....	23
1. pielikums. Tabula ar visiem maģisko 8-stūru laukumiem.....	23
2. pielikums. Izstrādātas datorprogrammas kods.....	33
3. pielikums. Daži perfektie $n$ -stūri .....	39

## IEVADS

Bakalaura darbā aplūkoti īpaša veida  $n$ -stūri, kuriem visi malu garumi ir dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz  $n$  un turklāt daudzstūru visas malas atrodas uz režģa līnijām. Darbā šādi daudzstūri nosaukti par **maģiskajiem daudzstūriem**. Ja režģis ir kvadrātisks, tad šādi daudzstūri ir pazīstami ar nosaukumu polimino, savukārt, ja režģis ir trīsstūra, tad – polimondi.

Klasisks avots par polimino ir Solomona Golomba grāmata [6], tā ir 1965. gadā publicētā pirmā izdevuma papildināts un pārstrādāts variants. Šī grāmata ir tulkota vairākās valodās un ir kalpojusi kā stimuls tajā publicēto (tad vēl neatrisināto) uzdevumu pētīšanā, polimino tematikas attīstībā. Plašs materiāls par šiem uzdevumiem un par polimino tematiku ir atrodams grāmatās [1], [2].

Par **polimino** sauc plaknes figūru, kas sastāv no vienības kvadrātiem, kuri pievienoti viens otram pa vesela garuma malām. Ja polimino sastāv tieši no  $n$  kvadrātiem to sauc par  $n$ -mino. Par **polimundu** sauc plaknes figūru, kas sastāv no regulāriem vienības trijstūriem, kuri pievienoti viens otram pa vesela garuma malām. Ja polimino sastāv tieši no  $n$  trijstūriem, to sauc par  $n$ -mondu.

2014. gadā Liepājā notika ievērojamā Latvijas pedagoga Jāņa Menča (1914 – 2011) 100 gadu jubilejai veltītā konference par matemātikas mācīšanu (15<sup>th</sup> International Conference: Teaching Mathematics: Retrospective and Perspectives), sk. mājaslapu [8]. Tajā Andrejs Cibulis nolasīja referātu par dažādiem polimino uzdevumiem, kuros (pat negaidīti) parādās skaitlis 100, sk. referātam sekojošo publikāciju [3]. Viens no tur piedāvātajiem pētniecības projektiem ir saistīts tieši ar maģiskajiem daudzstūriem, proti, atrast visas iespējamās maģisko 8-stūru laukumu vērtības; pierādīt, ka maģisko  $n$ -stūru eksistences nepieciešamais nosacījums ir  $n$  dalāmība ar 4, noskaidrot, vai šis nepieciešamais nosacījums ir arī pietiekamais nosacījums.

Daži uzdevumi par maģiskajiem daudzstūriem ir atrodami matemātikas olimpiādēs. 2016. gada Novada matemātikas olimpiādē attiecīgi 6. un 10. klašu skolēniem ir piedāvāti uzdevumi šādā formulējumā: „Rūtiņu lapā, kurā katras rūtiņas malas garums ir 1 vienība, pa rūtiņu līnijām uzzīmē astoņstūri tā, lai tā malu garumi pēc kārtas ir 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 vienības!” [9]. „Pierādīt, ka katram naturālam  $n$  rūtiņu lapā, kurā rūtiņas malas garums ir 1, pa rūtiņu līnijām ir iespējams uzzīmēt astoņstūri tā, ka tā malu garumi pēc kārtas ir  $n$ ;  $n + 1$ ;  $n + 2$ ;  $n + 3$ ;  $n + 4$ ;  $n + 5$ ;  $n + 6$ ;  $n + 7$ ” [10].

Tēma par maģiskajiem daudzstūriem ir pētīta arī skolēnu zinātniski-pētnieciskajos darbos. Ezernieku vidusskolā izstrādātajā skolnieces Loretas Ievas Dārznieces darbā [4] ir atrastas visas tādu maģisko 8-stūru, kuri iegūti no taisnstūra, izgriežot tam divus pretējos stūrus, laukuma vērtības.

Bakalaura darbā šī problēma atrisināta pilnībā, t. i., ir atrastas ne tikai visas iespējamās maģisko 8-stūru laukumu vērtības, bet ar datorprogrammas palīdzību atrasti arī visi iespējamie maģiskie 8-stūri. Noskaidrots, ka minimālā maģiskā 8-stūra laukuma vērtība ir 20, bet maksimālā vērtība ir 71. Negaidīti, ka intervālā no minimālās līdz maksimālajai vērtībai nevar iegūt tikai vienu vērtību. Uzdevums par šādas vērtības atrašanu atbilst Starptautiskās matemātikas olimpiādes līmenim.

Darba gaitā tika aplūkoti gadījumi kuros  $n$ -stūra malas iet gan pa kvadrāta, gan trijstūra režģa līniju. Iegūts maģisko polimino eksistences nepieciešamais un pietiekamais nosacījums. Ir aplūkots maģisko daudzstūru atsevišķs gadījums – **perfektie daudzstūri**, t. i., kad  $n$ -stūra malu garumi iet pēc kārtas augošā secībā. Iegūts šādu daudzstūru eksistences pietiekamais nosacījums. Secināts, ka katru maģisko polimino iespējams reducēt uz diviem dažādiem maģiskajiem polimondiem. No šī rezultāta zināmi arī visi  $n = 4k$  maģiskie polimondi. Tāpat arī atrasti vairāki citi maģiskie polimondi, kad  $n = 5; 6; 7; 9; 10$ .

Lai atvieglotu maģisko  $n$ -stūru meklēšanas procesu, tika izstrādāta datorprogramma. Ar tās palīdzību ir atrasti visi maģiskie 8-stūri un vairāki 12-stūri, kā arī visi perfektie 16-stūri un vairāki 24-stūri.

Trijos pielikumos apkopoti iegūtie maģiskie polimino, sniegts datorprogrammas kods, kā arī doti perfekto 16-stūru un 24-stūru datorprogrammas izvadītie atrisinājumi simbolisku virkņu veidā ar burtiem un naturāliem skaitļiem.

Aplūkotā tēma ir jauna un par to nav gandrīz nekādu publikāciju.

Darbā ir 25 attēli, 6 tabulas, 10 literatūras avoti, kuri sakārtoti alfabētiskā secībā.

# 1. MAĢISKIE POLIMINO

Šajā nodaļā sīkāk aplūkoti maģiskie daudzstūri, kuru malas iet pa rūtiņu režģa līnijām. Ir sniegta maģisko polimino definīcija, kā arī iegūts to eksistences nepieciešamais un pietiekamais nosacījums. Nodaļas beigās aplūkots maģisko polimino speciālgadījums – perfekti maģiskie polimino, kā arī aprakstīts to konstruēšanas algoritms. Sniegsim šajā nodaļā lietoto jēdzienu definīcijas.

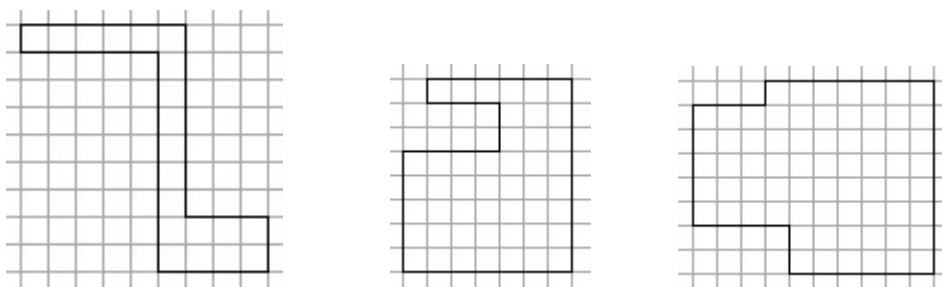
**1. definīcija.** Par **polimino** sauc plaknes figūru, kas sastāv no vienības kvadrātiem, kuri pievienoti viens otram pa vesela garuma malām. Ja polimino sastāv tieši no  $n$  kvadrātiem to sauc par  $n$ -mino. Pirmos astoņus  $n$ -mino sauc attiecīgi par: monomino, domino, trimino, tetramino, pentamino, heksamino, heptamino un oktamino.

Kādreiz polimino sauca par “super-domino” pēc Gardnera 1957. gada publikācijas [5].

**2. definīcija.** Polimino sauc par **maģisku**, ja tam visu  $n$  malu garumi ir dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz  $n$ .

**3. definīcija.** Maģiskos daudzstūrus ar secīgiem malu garumiem sauc par **perfektiem daudzstūriem**.

Izrādās, ka neeksistē maģiskie  $n$ -stūri (polimino), ja  $n \leq 7$ . Pirmie maģiskie daudzstūri sākas ar  $n = 8$ , sk. 1.1. att.



1.1. att. Maģiskie 8-stūri

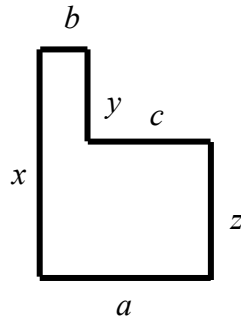
Pamatosim to, ka maģiskais 6-stūris neeksistē. Sešstūris, kas zīmēts, pa rūtiņu līnijām var uzzīmēt tikai formā, kā redzams 1.2. att. Maģiskā sešstūra perimetrs ir  $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ . Tātad

$$a + b + c + x + y + z = 21. \quad (1)$$

No 1.2. att. redzams, ka

$$a = b + c; \quad x = y + z.$$

No šejienes un (1) iegūstam, ka  $2a + 2x = 21$ , kas nevar būt, jo vienādojuma kreisā pusē ir pārskaitlis, bet labajā nepārskaitlis. Tas nozīmē, ka maģiskais 6-stūris neeksistē.



1.2. att. 6-stūris

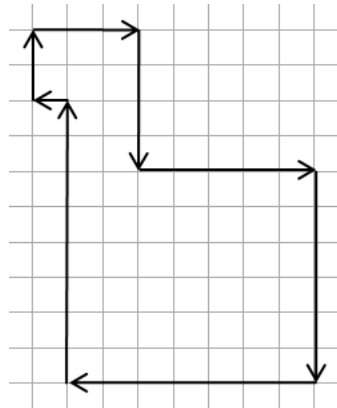
### 1.1. Maģisko $n$ -stūru eksistences nepieciešamais un pietiekamais nosacījums

Ievērosim, ka maģiskā  $n$ -stūra (polimino) eksistences nepieciešamais nosacījums ir  $n = 2k$ , t. i., malu skaits ir pārskaitlis. Tas izriet no tā, ka jebkurai polimino ir tikpat horizontālo, cik vertikālo malu. Pierādīsim spēcīgāku rezultātu.

**1. teorēma.** Maģiskā  $n$ -stūra eksistences nepieciešamais un pietiekamais nosacījums ir  $n = 4k$ . Pierādījums.

1. Pieņem, ka  $n$ -stūris (polimino) ir maģisks. Jāpierāda, ka  $n$  dalās ar 4.

Piešķirsim virzienu malām, piemēram, tā kā 1.3. att. Tad malas var sadalīt 4 kopās:  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $H_1$  un  $H_2$ , kopā  $V_1$  iekļaujam malas, kas iet vertikāli uz augšu ( $\uparrow$ ), kopā  $V_2$  iekļaujam malas, kas iet vertikāli uz leju ( $\downarrow$ ), kopā  $H_1$  iekļaujam malas, kas iet horizontāli pa labi ( $\rightarrow$ ) un kopā  $H_2$  iekļaujam malas, kas iet horizontāli pa kreisi ( $\leftarrow$ ).



1.3. att. Malu virzienu piešķiršana

Ievērosim, ka malu garumu summa virzienā uz augšu sakrīt ar malu garumu summu virzienā uz leju. Tas pats attiecas arī uz malu garumu summu virzienam pa labi un pa kreisi. Tātad, ja kopu  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $H_1$  un  $H_2$  malu garumu summas apzīmējam ar  $v_1, v_2, h_1$  un  $h_2$ , tad

$$v_1 = v_2,$$

$$h_1 = h_2.$$

Apzīmēsim polimino malu garumus (saskaņā ar iepriekš teikto maģiskajiem daudzstūriem malu skaits ir pārskaitlis) ar  $1, 2, \dots, 2k$ . Tad perimetrs ir

$$v_1 + v_2 + h_1 + h_2 = 2(v_1 + h_1) = \frac{1+2k}{2} \cdot 2k = (1+2k)k.$$

Tā kā  $2(v_1 + h_1)$  ir pāra skaitlis, tad  $k$  ir jābūt pārskaitlim  $k = 2m$ , tātad  $n = 4m$ . Ir iegūta dalāmība ar 4.

2. Pieņem, ka  $n = 4k$ . Jāpierāda, ka eksistē maģiskais  $4k$ -stūris.

Sakārtojot malu garumus  $1, 2, 3, \dots, 4k$  četrās kolonnās, kā parādīts 1. tab. Malu sadalīšanas piemēri 16-stūrim un 20-stūrim ir parādīti attiecīgi 2. un 3. tab.

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
...	...	...	...

1. tab. Malu sadalīšanas veids

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

2. tab.

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13
17	18	19	20

3. tab.

Sakārtojot  $n = 4k$  malas tabulā pēc iepriekš dotā parauga, iegūstam divus gadījumus – 4. tab. un 5. tab.

→	↑	↓	←
1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
...	...	...	...
$4k-7$	$4k-6$	$4k-5$	$4k-4$
$4k$	$4k-1$	$4k-2$	$4k-3$

4. tab. Malu sadalījums, kad  $k$  ir pāra skaitlis

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
...	...	...	...
$4k-4$	$4k-5$	$4k-6$	$4k-7$
$4k-3$	$4k-2$	$4k-1$	$4k$

5. tab. Malu sadalījums, kad  $k$  ir nepāra skaitlis

Ja  $k$  ir pāra skaitlis, tad pēdējais skaitlis  $n = 4k$  atrodas pirmajā kolonnā, sk. 4. tab. Aprēķinot 4. tab. summas pa kolonnām iegūst šādus rezultātus.

Pirmās kolonnas elementu summa ir

$$1 + \sum_{m=1}^{\frac{k}{2}} 8m + \sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}} (8m+1) = 1 + \sum_{m=1}^{\frac{k}{2}} 8m + \sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}} 8m + \sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}} 1 = \sum_{m=1}^{\frac{k}{2}} 16m + 4k + \frac{k}{2} = (k-2)2k + \frac{9k}{2}.$$

Ievērosim, ka visās pārējās 4. tab. kolonnās summās būs tādas pašas, jo blakus kolonnu pāra rindu elementi sākot par pirmo kolonnu samazinās par 1, bet nepāra rindu elementi palielinās par 1.

Katrā kolonnā ierakstītajiem malu garumiem var piešķirt virzienu, kas ir norādīts 4. tab. 1. rindā. Tā kā visas summas ir vienādas, tad arī pretējā virziena malu garumu summas ir vienādas, t. i., esam panākuši, ka ir izpildīts maģiskā  $n$ -stūra eksistences nepieciešamais nosacījums.

Tagad aplūkosim gadījums kad  $k$  ir nepārskaitlis. Tad skaitlis  $4k$  atrodas 4. kolonnā (sk. 5. tab.).

Aprēķināsim 5. tab. elementu summas pa kolonnām.

Pirmās kolonnas summa ir:

$$K_1 = 1 + \sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}} 8m + \sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}} (8m+1) = 1 + \sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}} (16m+1) = 1 + \frac{k-1}{2} + 2(k-1)(k+1).$$

Otrās kolonnas summa ir:

$$K_2 = 2 + \sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}} 8m + \sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}} (8m+1) = 2 + \sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}} (16m+1) = 2 + \frac{k-1}{2} + 2(k-1)(k+1).$$

Trešās kolonnas summa ir:

$$K_3 = 3 + \sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}} 8m + \sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}} (8m+1) = 3 + \sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}} (16m+1) = 3 + \frac{k-1}{2} + 2(k-1)(k+1).$$

Ceturtās kolonnas summa ir:

$$K_4 = 4 + \sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}} 8m + \sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}} (8m+1) = 4 + \sum_{m=1}^{\frac{k-1}{2}} (16m+1) = 4 + \frac{k-1}{2} + 2(k-1)(k+1).$$

Lai iegūtu vienādas summas divās kolonnās, mainām vietām skaitļus 1 un 3, tad mainām vietām  $4k-1$  un  $4k$ . Tagad pirmās kolonnas summa ir  $K_1 + 2$ . Arī ceturtās kolonnas summa būs  $K_4 = K_1 + 3 - 1 = K_1 + 2$ .

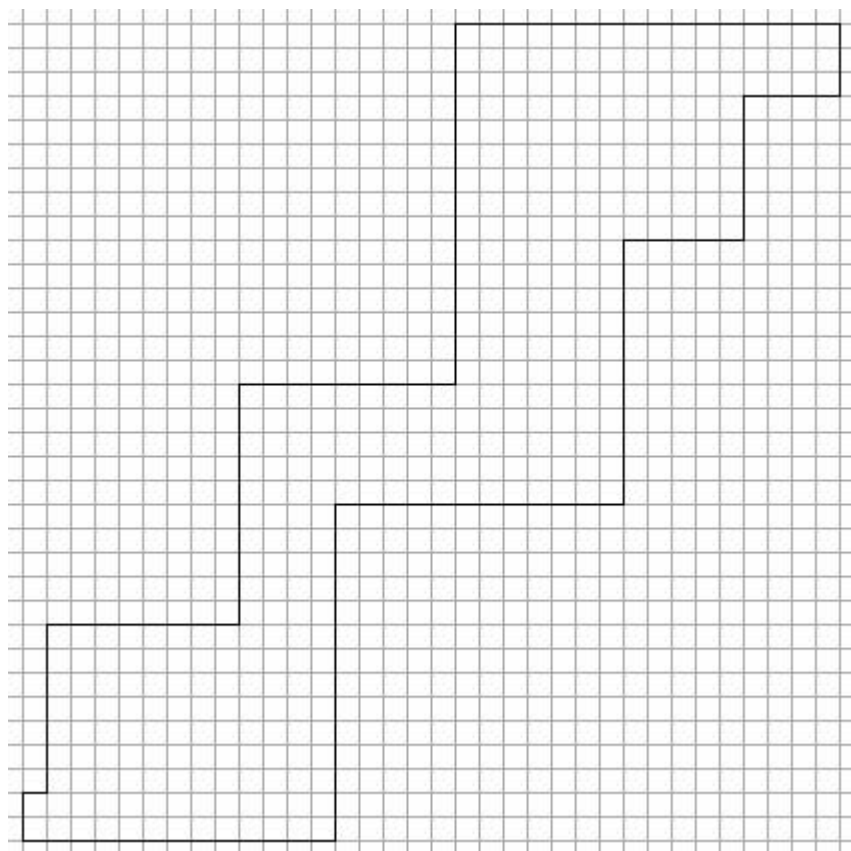
Arī otrās un trešās kolonnas summas būs vienādas, jo  $K_3 - 2 + 1 = K_3 - 1 = K_2$ .

Pēc šādu darbību veikšanas, iegūst, ka 6. tab. pirmās un ceturtās kolonnas malu garumu summas ir vienādas. Tāpat arī otrās un trešās kolonnas malu garumu summas ir vienādas.

→	↑	↓	←
3	2	1	4
8	7	6	5
...	...	...	...
$4k - 4$	$4k - 5$	$4k - 6$	$4k - 7$
$4k - 3$	$4k - 2$	$4k$	$4k - 1$

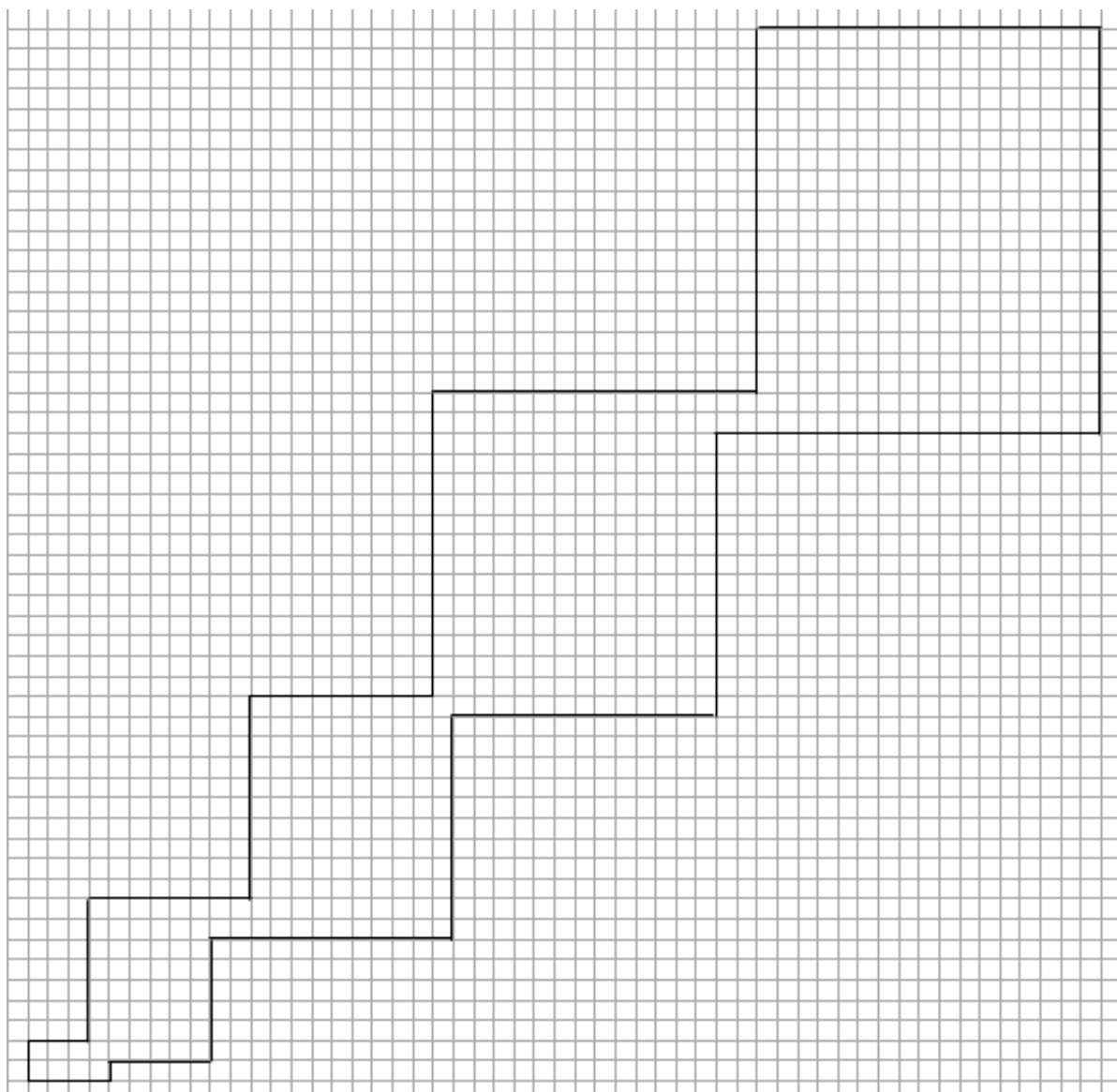
6. tab. Malu sadalījums, kad  $k$  ir nepārskaitlis

Malām piešķiram virzienus, kā redzams 6. tab. 1. rindā. Nav grūti pārlicināties, ka šādus malu sadalījumus, sk. 4. un 6. tab., var realizēt zīmējumā kā maģiskos daudzstūrus. Piemēram, ja  $k = 4$ , tad 2. tabulas sadalījums realizējams, kā šāds maģiskais 16-stūris (sk. 1.4. att.).



1.4. att. Maģiskais 16-stūris

Savukārt, ja  $k = 5$ , tad 6. tabulas sadalījums realizējams, kā šāds maģiskais 20-stūris.



1.5. att. Maģiskais 20-stūris

## 1.2. Maģiskie polimino ar secīgu malu izvietojumu

Šajā apakšnodaļā aplūkots jautājums, vai maģiskajam  $n$ -stūrim malas var būt sakārtotas augošā secībā, t. i., sākot ar 1 un beidzot ar  $n$ . Atgādināsim, ka šādus  $n$ -stūrus sauc par **perfektiem daudzstūriem**. Jau zināms, ka eksistē perfekts 8-stūris, turklāt tāds ir tikai viens, sk. 1.6. att..



1.6. att. Perfekts 8-stūris

Ievērosim, ka šim 8-stūrim visu vertikālo malu garumi ir nepārskaitļi, bet horizontālo – pārskaitļi. Šo apsvērumu izmantosim, lai pierādītu šādu teorēmu.

**2. teorēma.** Ja  $n = 8k$ , tad eksistē perfekts  $n$ -stūris.

Pierādījums. Izveidojam divas kopas

$$H = \{2; 4; 6; \dots; 8k\}, V = \{1; 3; 5; \dots; 8k - 1\},$$

Kopā  $H$  ir iekļauti daudzstūra visu horizontālo malu garumi, bet kopā  $V$  – vertikālo malu garumi. Kopu  $H$  sadalām divās apakškopās tā, lai katrā apakškopā iekļauto skaitļu summas būtu vienādas. Analogiski sadalām kopu  $V$ . Ja  $n = 8$  vai 16, tad ņemam attiecīgi šādus sadalījumus:

$$H_1 = \{4; 6\}, H_2 = \{2; 8\}, V_1 = \{3; 5\}, V_2 = \{1; 7\},$$

$$H_1 = \{6; 8; 10; 12\}, H_2 = \{2; 4; 14; 16\}, V_1 = \{5; 7; 9; 11\}, V_2 = \{1; 3; 13; 15\},$$

Vispārīgā gadījumā, kad  $n = 8k$ , ņemam šādus sadalījumus:

$$H_1 = \{2k + 2; 2k + 4; \dots; 2k + 4k\}, H_2 = H \setminus H_1 \quad (2)$$

$$V_1 = \{2k + 1; 2k + 3; \dots; 6k - 1\}, V_2 = V \setminus V_1. \quad (3)$$

Kopas  $H$  elementu summa (visu pārskaitļu summa) ir

$$\frac{2 + 8k}{2} \cdot 4k = (2 + 8k)2k. \quad (4)$$

Kopā  $H_1$  ir iekļauti  $2k$  secīgi pārskaitļi. To elementu summa ir

$$\frac{2k + 2 + 6k}{2} \cdot 2k = (2 + 8k)k. \quad (5)$$

No (4) un (5) izriet ka abās kopās  $H_1$  un  $H_2$  iekļauto pārskaitļu summas ir vienādas.

Kopā  $V_1$  ir iekļauti  $2k$  secīgi nepārskaitļi. To elementu summa ir

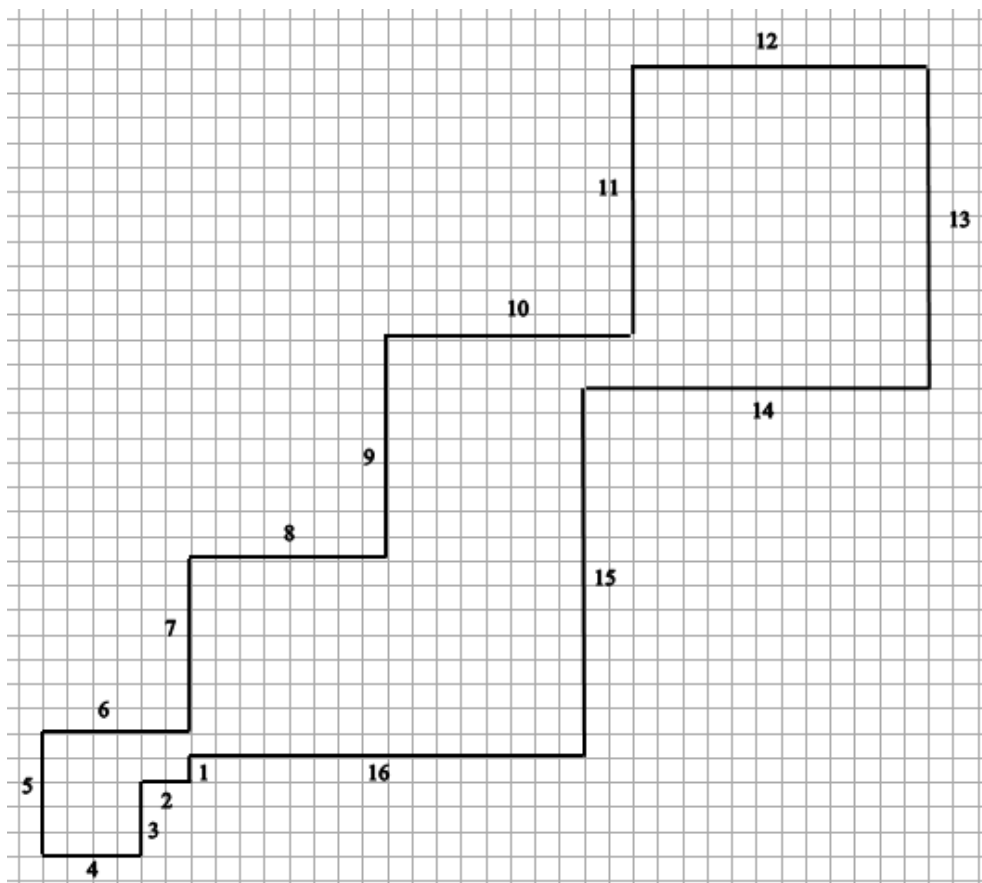
$$(2 + 8k)k - 2k = 8k^2. \quad (6)$$

Tā kā visu nepārskaitļu, kas iekļauti kopā  $V$ , summa ir:

$$1+3+\dots+(2\cdot 4k-1)=(4k)^2=16k^2,$$

No šejienes un (6) skaidrs, ka abās kopās  $V_1$  un  $V_2$  iekļauto nepārskaitļu summas ir vienādas.

Nav grūti pārliecināties, ka sadalījumi (2), (3) ir realizējami kā perfektu daudzstūru malu garumi. Perfekts 8-stūris jau ir parādīts 1.6. att., bet un perfekts 16-stūris redzams 1.7. att.



1.7. att. Perfekts 16-stūris

Izmantojot tādus pašus apsvērumus kā 2. teorēmas pierādījumā, var pierādīt šādu teorēmu.

**3. teorēma.** Ja  $n = 8k + 4$ , tad neeksistē perfekts  $n$ -stūris.

Pierādījums. Izveidojam divas kopas

$$H = \{2; 4; 6; \dots; 8k + 4\}, V = \{1; 3; 5; \dots; 8k + 3\},$$

Kopā  $H$  ir iekļauti daudzstūra visu horizontālo malu garumi, bet kopā  $V$  – vertikālo malu garumi. Kopas  $H$  elementu summa (visu pārskaitļu summa) ir

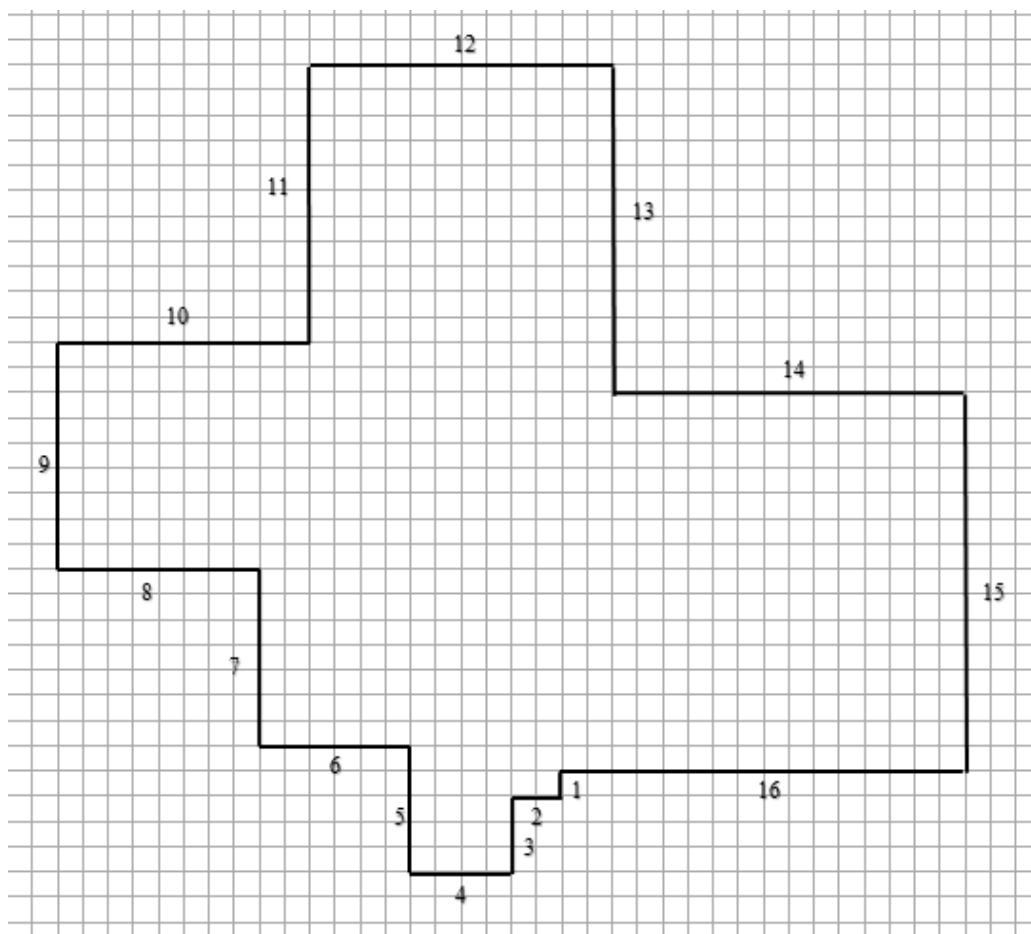
$$\frac{(8k + 4)(8k + 5)}{2} = (4k + 2)(8k + 5) = 16k^2 + 12k + 2.$$

Vertikālo malu summa:

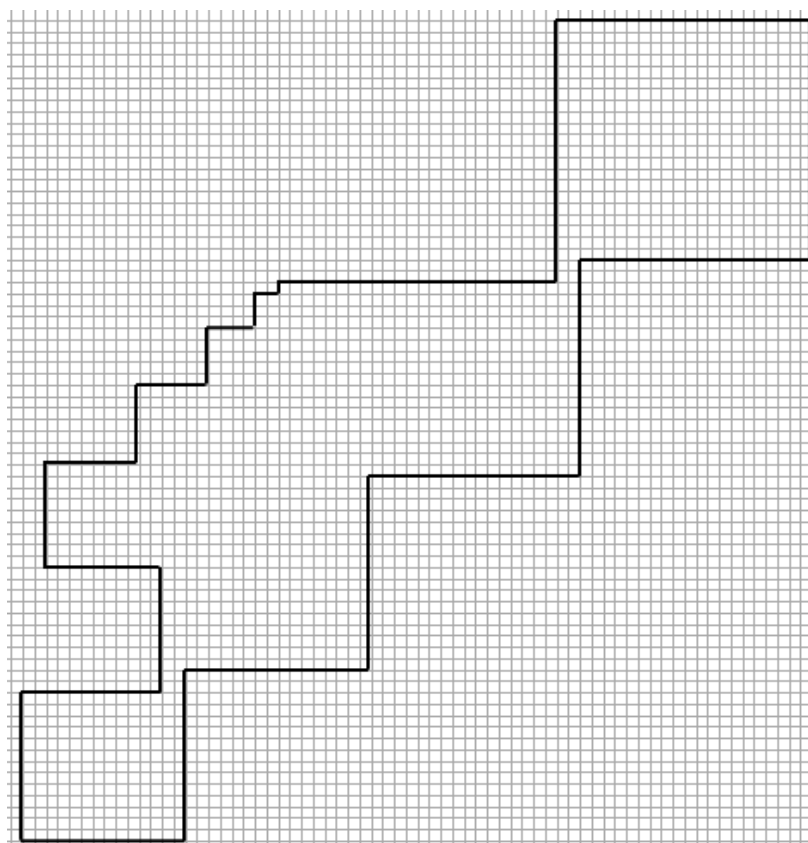
$$(8k + 3)^2 = 64k^2 + 48k + 9.$$

ir nepārskaitlis, bet, lai eksistētu perfekts daudzstūris, tai jābūt pārskaitlim. Līdz ar to perfekts  $n$ -stūris neeksistē.

Ir zināms, ka eksistē tikai viens perfekts maģiskais 8-stūris. Taču lielākām  $n$  vērtībām unitātes nav. Ar datorprogrammu (sk. 2. nodaļu) ir noskaidrots, ka pavisam eksistē 3 dažādi perfektie 16-stūri un vismaz 25 perfektie 24-stūri (sk. 3. pielikumu). Viens no perfektiem 16-stūriem ir parādīts 1.8. att. un viens no perfektajiem 24-stūriem ir parādīts 1.9. att.



1.8. att. Perfekts 16-stūris



1.9. att. Perfekts 24-stūris

### 1.3. Maģisko polimino meklēšana ar datorprogrammu

Lai atvieglotu un paātrinātu maģisko daudzstūru meklēšanas procesu, darba izstrādes laikā ar RTU doktoranta Zigmunda Buliņa palīdzību, tika izstrādāta datorprogramma valodā Free Pascal (tās kodu sk. 2. pielikumā). Ar šīs programmas palīdzību principā var atrast visus iespējamus maģiskos  $n$ -stūrus, tiesa, tā kā programma analizē visus  $n$ -stūru variantus (permutācijas) lieliem  $n$  programma nav efektīva.

Programma analizē visas lietotāja ievadītā skaitļa  $n$  permutācijas. Programma pārbauda, vai permutāciju var realizēt kā polimino. Ja tas ir iespējams, šis variants tiek saglabāts, turpretim, ja nav – tas tiek atmests. Šādi iegūst daudzstūru sarakstu, kurā tiek izvadīti malu garumi un to virzieni. Katra daudzstūra kods tiek izvadīts formā

1 Down 3 Right 2 Down 6 Left 4 Down 8 Right 7 Up 5 Left.

Lai saīsinātu pierakstu, darbā programmas izvadītie kodi saīsināti formā

1D 3R 2D 6L 4D 8R 7U 5L.

kur skaitļi ir daudzstūra malu garumi, bet burti apzīmē virzienus, kādos iet malas, D – uz leju, U – uz augšu, R – pa labi un L – pa kreisi.

Lai optimizētu programmas darbu, tiek aplūkotas permutācijas, kas sākas ar 1.

## 2. MAĢISKO ASTOŅSTŪRU LAUKUMI

Ir šādi četri astoņstūru veidi, sk. 2.1., 2.2., 2.3. un 2.4. att. Taču tikai trīs veidi, sk. 2.2., 2.3. un 2.4. att., ir derīgi, lai uzzīmētu maģisko 8-stūri. Par to, ka 2.1. att. redzamais 8-stūris nevar būt maģisks, ir viegli pārlicināties. Maģiskā 8-stūra perimetrs ir

$$a + b + c + d + x + y + z + q = 36.$$

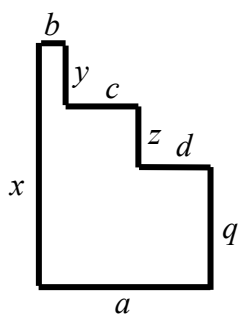
No 2.1. att. redzams, ka

$$x = y + z + q \text{ un } a = b + c + d.$$

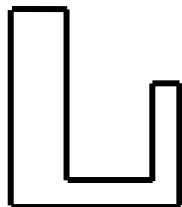
No perimetra izteiksmes iegūstam:

$$2x + 2a = 36 \Rightarrow x + a = 18,$$

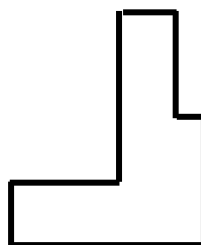
kas nav iespējams, jo divu lielāko maģiskā 8-stūra malu garumu summa ir  $7 + 8 = 15$ .



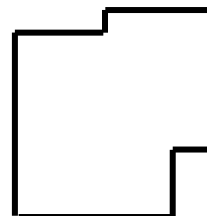
2.1. att.



2.2. att.



2.3. att.



2.4. att.

Tagad aplūkosim jautājumu par maģiskā astoņstūra laukuma ekstremālajām vērtībām.

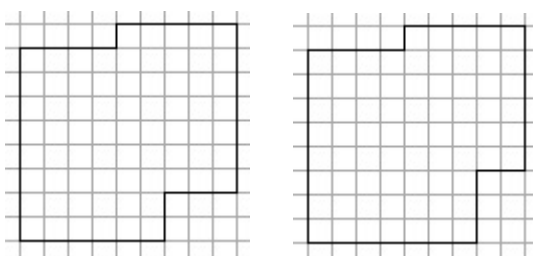
Tā kā ar datorprogrammas palīdzību tika iegūti visi (252) iespējamie maģiskie 8-stūri (sk. 1. pielikumu), var droši apgalvot, ka maģisko astoņstūru laukuma vērtības var būt visi veseli skaitļi intervālā no 20 līdz 71, izņemot vērtību 63. Astoņstūris ar laukuma vērtību 63 neeksistē.

No 2.2. – 2.4. att. var secināt, ka 8-stūri iespējams iegūt, ja no viena lielākā taisnstūra izgriež divus mazākus taisnstūrus. Šis fakts tiks izmantots nākamajā teorēmā par astoņstūra maksimālo laukumu.

**4. teorēma.** Maģiskā 8-stūra maksimālā laukuma vērtība ir 71.

**Pierādījums.** Pierādījumā izmantojam jau iepriekš minēto faktu, ka, lai iegūtu astoņstūri, no taisnstūra jāizgriež divi mazāki taisnstūri. Ievērosim, ka 2.2. attēlā redzamais 8-stūris nevar būt ar maksimālo laukumu, jo tam laukums ir mazāks nekā  $8 \cdot 7 = 56$ . Tā kā jāizgriež ir divi mazie taisnstūri ar mazāko laukumu summu, var secināt, ka to malu garumi būs 1, 2, 3 un 4. Mazāko laukumu summa ir 10, ko iegūst, izgriežot taisnstūrus  $1 \times 4$  un  $2 \times 3$ . Izgriežot šos

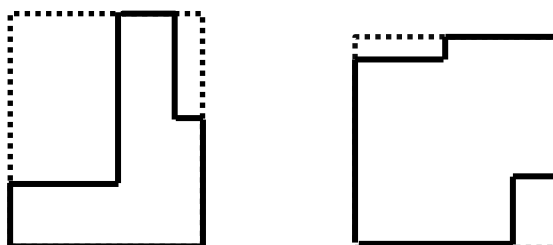
taisnstūrus no kvadrāta  $9 \times 9$ , iegūst divus dažādus maģiskos daudzstūrus (sk. 2.5. att.) ar laukumu 71.



2.5. att. 8-stūri ar vislielāko laukuma vērtību

Tagad pierādīsim, ka, izgriežot divus taisnstūrus no kāda cita taisnstūra, nevar iegūt maģisku 8-stūri ar laukumu 71. Ievērosim, ka pietiek aplūkot tikai tādus taisnstūrus, kuriem perimetrs ir 36. Tas tāpēc, ka 2.3. un 2.4. att. redzamo 8-stūru perimetri sakrīt ar tā taisnstūra perimetru, no kura ir iegūti šie 8-stūri, izgriežot divus mazākus taisnstūrus, sk. 2.6. att. Tā kā jebkura taisnstūra  $a \times b$ ,  $a \neq b$ , ar fiksētu perimetru 36, laukums nevar pārsniegt kvadrāta  $9 \times 9$  laukumu, tad skaidrs, ka no šāda taisnstūra, izgriežot divus taisnstūrus ar laukumu summu 10, var iegūt tikai tādus maģiskos 8-stūrus, kuriem laukums  $L$  apmierina novērtējumu:

$$L < 81 - 10 = 71.$$



2.6. att.

Ar iepriekš pieminētās datorprogrammas palīdzību tika iegūtas visas jau minētās maģisko astoņstūru laukumu vērtības (sk. 1. pielikumu). No tām var izdalīt vairākus rekordistus:

- Ir tikai viens maģiskais 8-stūris šādām trim laukuma vērtībām: 21, 30 un 69;
- Eksistē 13 maģiskie 8-stūri ar laukumu 35 un 43;
- Eksistē 2 maģiskie 8-stūri ar maksimālo laukumu 71;
- Eksistē 3 maģiskie 8-stūri ar minimālo laukumu 20;
- Tikai vienai laukuma vērtībai no  $[20, 71]$ , proti, 63, maģiskais 8-stūris neeksistē.

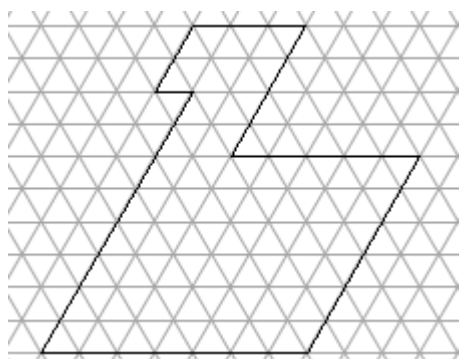
### 3. MAĢISKIE POLIMONDI

Šajā nodaļā aplūkojam tādus maģiskos  $n$ -stūrus, kuri ir polimondi.

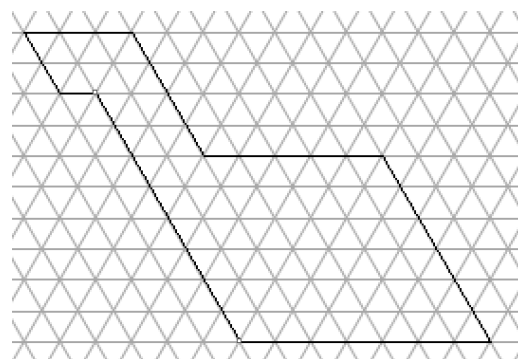
**4. definīcija.** Par **polimond**u sauc plaknes figūru, ko iegūst no vienības vienādmalu trijstūriem, pievienojot tos vienu otram pa vesela garuma malām [6], [7].

**5. definīcija.** Polimond

u sauc par **maģisku**, ja tam visu malu garumi ir dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz  $n$ .  
Tā kā kvadrātu sadalot ar diagonāli uz pusēm, var iegūt divus trijstūrus, visi iepriekš atrastie maģiskie  $n$ -stūri (polimino) ir viegli reducējami uz maģiskajiem  $n$ -stūriem (polimondiem). Piemēram, maģisko polimino, sk. 1.6. att. var transformēt par 3.1. vai 3.2. attēlā redzamo maģisko polimond

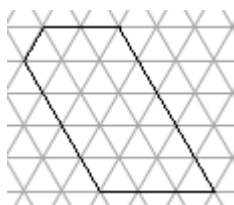


3.1. att.

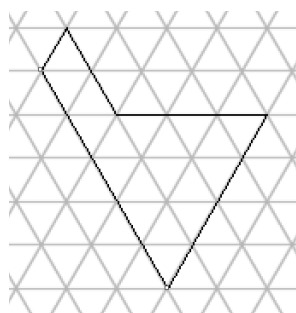


3.2. att.

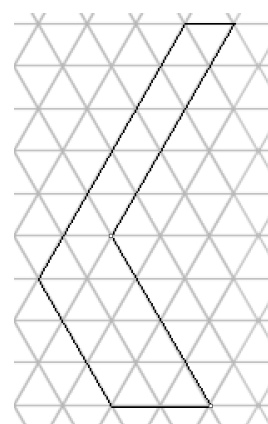
Taču atšķirībā no polimino, maģiskiem polimondiem malu skaits var ne tikai nedalīties ar 4, bet tas var būt pat nepārskaitlis. Maģiskie  $n$ -stūri (polimondi), ja  $n = 5, 6, 7, 9, 10$  ir parādīti 3.3. – 3.10. att.



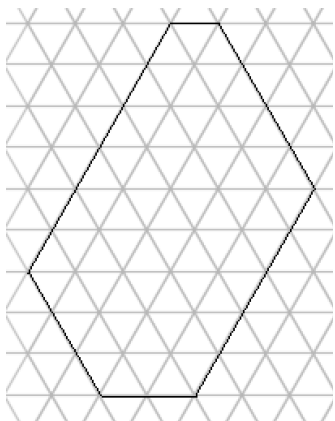
3.3. att. Maģiskais 5-stūris



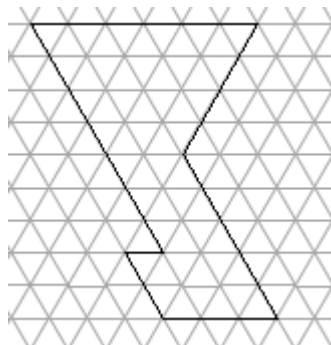
3.4. att. Maģiskais 5-stūris



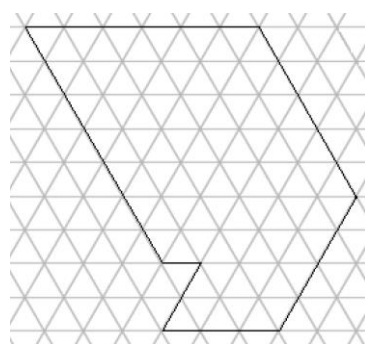
3.5. att. Maģiskais 6-stūris



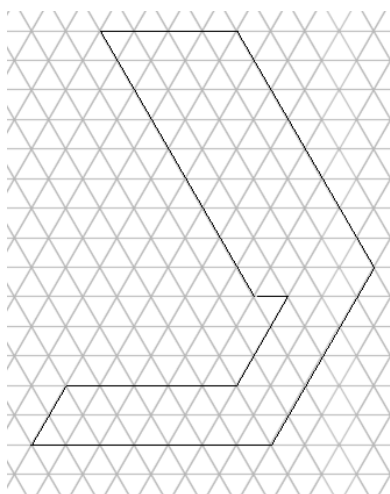
3.6. att. Maģiskais  
6-stūris



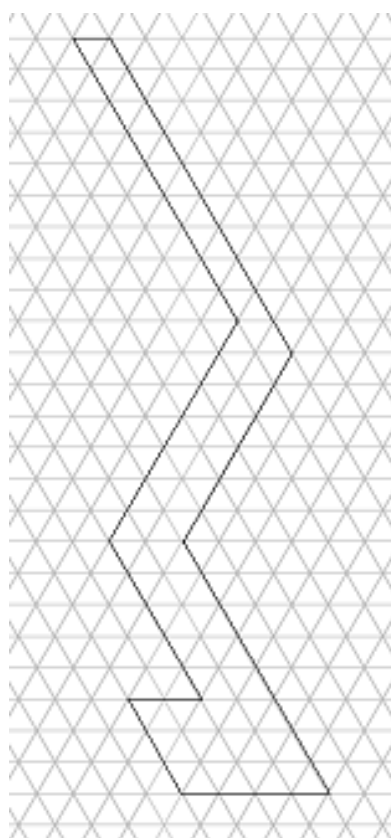
3.7. att. Maģiskais  
7-stūris



3.8. att. Maģiskais  
7-stūris



3.9. att. Maģiskais  
9-stūris



3.10. att. Maģiskais  
10-stūris

## NOBEIGUMS

Pierādīts maģisko polimino eksistences nepieciešamais un pietiekamais nosacījums, kas apgalvo, ka maģiskais polimino eksistē tad un tikai tad, ja  $n = 4k$ .

Aplūkoti perfektie maģiskie  $n$ -stūri, to eksistences nosacījumi, kā arī izstrādāts konstruēšanas algoritms, kas dod iespēju atrast šādu  $n$ -stūri, ja tāds eksistē. Pierādīts, ka perfektie  $n$ -stūri eksistē visiem  $n = 8k$ . Iegūts rezultāts, ka ir tādi  $n$ , kuriem ir vairāki perfektie maģiskie  $n$ -stūri. Pielikumā ir sniegti visi trīs perfektie maģiskie 16-stūri, kā arī 25 (ne visi) perfektie maģiskie 24-stūri, kas atrasti ar datorprogrammu.

Noskaidrots (ar datorprogrammu), ka pavisam ir 252 maģiskie 8-stūri. Maksimālā laukuma vērtība (71) ir pamatota arī teorētiski. Jautājums par laukumu vērtībām maģiskiem daudzstūriem vispārīgā gadījumā nav pētīts, tas varētu būt viens no pētījuma jautājumiem maģistra darbā. Citi maģistra darbā pētāmie jautājumi varētu būt maģisko polimondu eksistences nosacījumi, maģisko 8-stūru (polimondu) skaits un dažādās laukuma vērtības.

Aprakstīti nosacījumi, kas izpildās maģiskajiem polimondiem. Atrasti maģiskie polimondi šādām vērtībām:  $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$  un aprakstīts rezultāts, par maģisko polimino reducēšanu uz maģiskajiem polimondiem, kur no viena maģiskā polimino iegūst divus maģiskos polimondus.

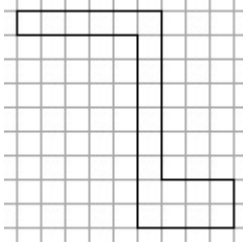
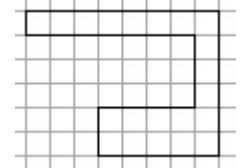
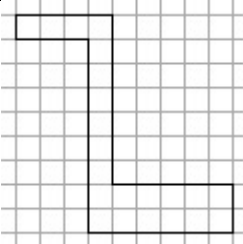
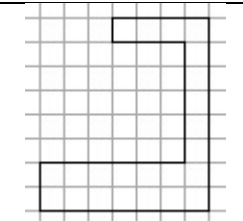

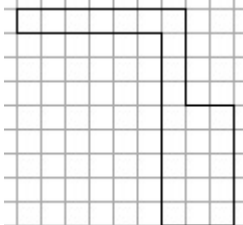
## IZMANTOTĀ LITERATŪRA

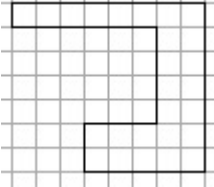

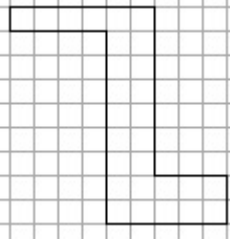
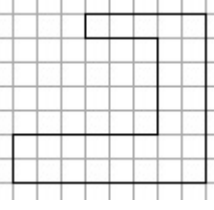
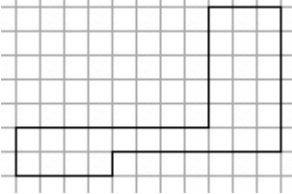
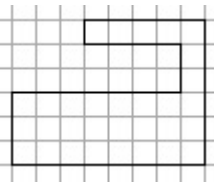
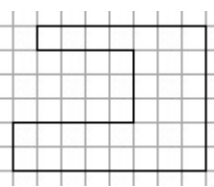
- [1] Cibulis A., Pentamino 1. daļa, Latvijas Universitāte, Rīga, 2001, 96 lpp.
- [2] Cibulis A., Pentamino 2. daļa, Latvijas Universitāte, Rīga, 2001, 106 lpp.
- [3] Cibulis A., Polyomino Variations on the Number 100, Proceedings of the 15<sup>th</sup> International Conference “Teaching Mathematics: Retrospective and Perspectives”, pp. 21 – 27, Liepāja, Latvia, 2014.
- [4] Dārzniece L. I., Maģisko astonstūru laukumi, Skolēnu zinātniski-pētnieciskais darbs, Ezernieku vidusskola, 2016, 26 lpp.
- [5] Gardner, M., Mathematical Games: About the Remarkable Similarity between the Icosian Game and the Towers of Hanoi, Sci. Amer. 196, 150 –156, May 1957.
- [6] Golomb S. W., Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems and Packings, Princeton University Press, Second edition, 1994, 184 p.
- [7] Weisstein E. W., The CRC Encyclopedia of Mathematics Volume III, 3rd ed.p.cm., CRC Press, 2009, 4308 lpp.
- [8] <http://math2014.liepu.lv>
- [9] [http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2016/02/66\\_mat\\_olimp\\_2posms\\_uzd\\_atris\\_5-8.pdf](http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2016/02/66_mat_olimp_2posms_uzd_atris_5-8.pdf)
- [10] [http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2016/02/66\\_mat\\_olimp\\_2posms\\_uzd\\_atris\\_9-12.pdf](http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2016/02/66_mat_olimp_2posms_uzd_atris_9-12.pdf)

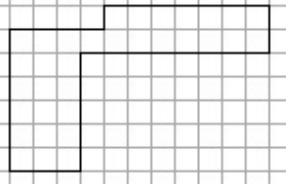
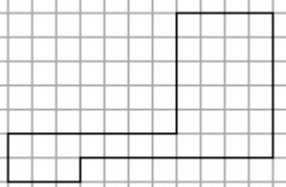
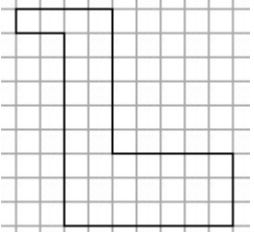
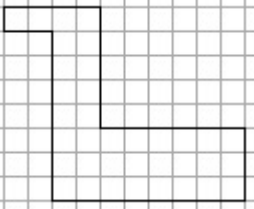
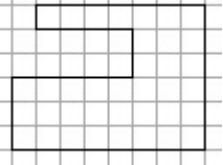
## PIELIKUMI

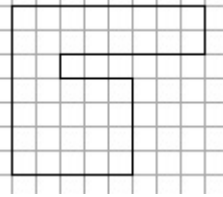
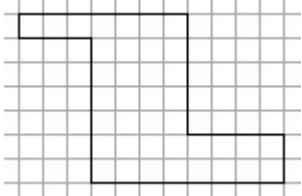
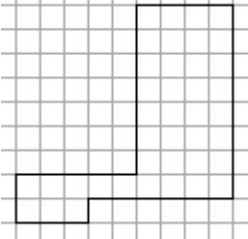
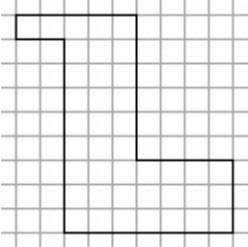
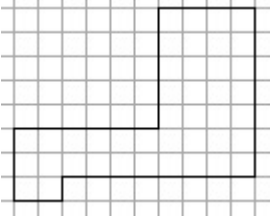
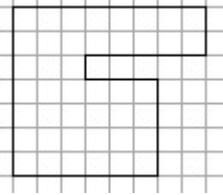
### 1. pielikums. Tabula ar visiem maģisko 8-stūru laukumiem

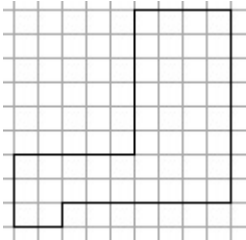

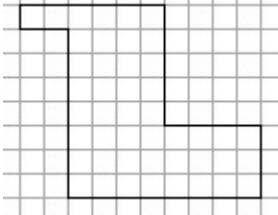
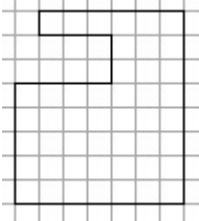
Apzīmējumi: D – uz leju, U – uz augšu, L – pa kreisi, R – pa labi.

Nr.p.k.	Laukuma vērtība	Zīmējums	Iespējamo astoņstūru kodi
1.	20		1D5R8D4R2U3L7U6L 1D6R5D3L2D4R8U7L 1D7R6D4R2U3L5U8L
2.	21		1D7R3D4L2D5R6U8L
3.	22		1D3R8D6R2U5L7U4L 1D7R4D6R2U5L3U8L
4.	23		1D3R5D6L2D7R8U4L 1D6R8D3R4U2L5U7L
5.	24		1D4R3D7L2D8R6U5L 1D5R4D8R2U7L3U6L 1D3R6D8R2U7L5U4L
6.	25		1D6R8D3R5U2L4U7L 1D7R2D4L3D5R6U8L

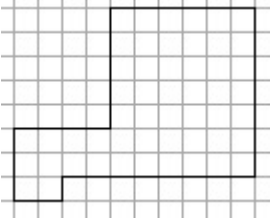
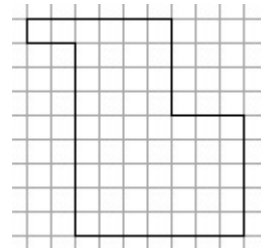
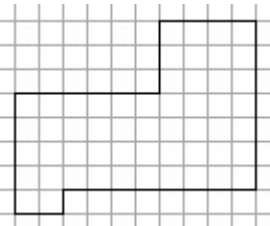
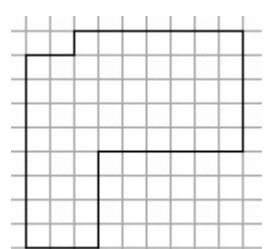
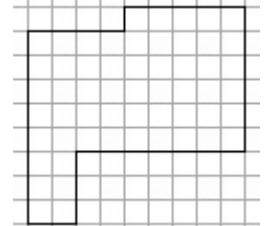
Nr.p.k.	Laukuma vērtība	Zīmējums	Iespējamo astoņstūru kodi
7.	26		1D6R4D3L2D5R7U8L 1D6R4D7R2U5L3U8L
8.	27		1D5R4D8R2U6L3U7L 1D7R4D6R3U5L2U8L
9.	28		1D4R8D5R2U3L7U6L 1D6R7D4R3U2L5U8L
10.	29		1D3R4D6L2D8R7U5L 1D3R8D6R2U4L7U5L 1D5R8D4R3U2L6U7L 1D6R2D3L5D4R8U7L 1D7R6D4R5U3L2U8L
11.	30		1D4L2U8R5U3R6D7L
12.	31		1D4R2D7L3D8R6U5L 1D5R3D4L2D7R6U8L 1D5R4D8R3U7L2U6L 1D6R4D7R3U5L2U8L
13.	32		1D4R3D5L2D8R6U7L 1D4R3D5L6U8R2D7L 1D5R4D3L2D6R7U8L 1D6R2D3L4D5R7U8L 1D6R7D4R5U2L3U8L

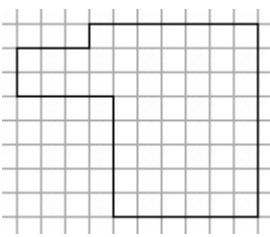

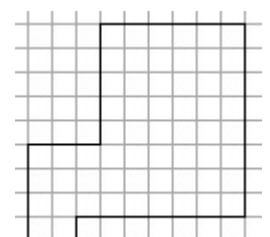
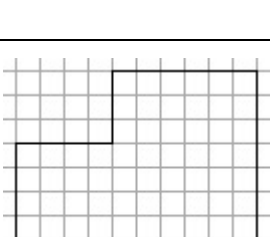
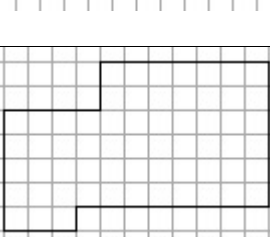
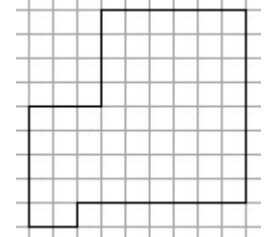
Nr.p.k.	Laukuma vērtība	Zīmējums	Iespējamo astoņstūru kodi
14.	33		1D4L6D3R5U8R2U7L 1D5R4D8R3U6L2U7L 1D6R2D4R8U3L5D7L 1D6R2D5R7U3L4D8L
15.	34		1D3L2U7R5U4R6D8L 1D3R4D5L2D8R7U6L 1D4L2U6R7U3R8D5L 1D4L3U7R6U2R8D5L 1D4L3U8R5U2R7D6L 1D4R5D3L2D6R8U7L 1D6L2U8R3U5R4D7L 1D7R2D5R6U4L3D8L
16.	35		1D2R8D7R3U5L6U4L 1D2R8D7R4U6L5U3L 1D3R5D4L2D7R8U6L 1D3R5D4L8U7R2D6L 1D4R2D5L6U8R3D7L 1D4L8D2R6U7R3U5L 1D4L8D3R7U6R2U5L 1D5R2D4L3D7R6U8L 1D5R2D6R7U3L4D8L 1D5R8D4R6U2L3U7L 1D5R8D4R7U3L2U6L 1D6L4D5R3U8R2U7L 1D7R3D5R6U4L2D8L
17.	36		1D2R7D8R3U6L5U4L 1D4L7D2R5U8R3U6L 1D5L2U7R3U6R4D8L 1D6R5D4R8U3L2D7L
18.	37		1D4R2D5L3D8R6U7L 1D4R2D6R8U3L5D7L 1D4R8D5R3U2L6U7L

Nr.p.k.	Laukuma vērtība	Zīmējums	Iespējamo astoņstūru kodi
			1D6R4D5R7U3L2D8L
19.	38		1D3R4D5L7U8R2D6L 1D4R6D7R2U3L5U8L 1D5R2D3L4D6R7U8L 1D5R2D7R6U4L3D8L
20.	39		1D3R6D8R2U4L5U7L 1D4L8U3R5D7R2D6L 1D5L2U6R3U7R4D8L 1D5L4D6R3U7R2U8L 1D5L7U3R4D8R2D6L 1D3L6D4R5U7R2U8L
21.	40		1D3L2U5R7U4R8D6L 1D3L4U7R5U2R8D6L 1D4R3D7L6U8R2D5L 1D5L2D8R4D3R7U6L
22.	41		1D2R8D7R3U4L6U5L 1D2R8D7R5U6L4U3L 1D3R2D6L4D8R7U5L 1D3R2D6L5D7R8U4L 1D4L2D7R5D3R8U6L 1D4R2D7L6U8R3D5L 1D5R3D7R6U4L2D8L 1D5R4D6R7U3L2D8L 1D5L6U4R3D8R2D7L
23.	42		1D2L3U6R5U4R7D8L 1D5L4D7R3U6R2U8L 1D6L3U8R2U5R4D7L 1D4R7D6R3U2L5U8L
24.	43		1D3R4D6L7U8R2D5L 1D3L8D2R5U7R4U6L 1D3L8U4R5D6R2D7L 1D3L8D4R7U5R2U6L

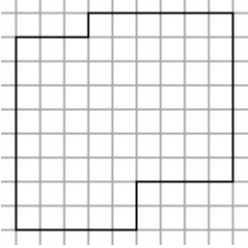
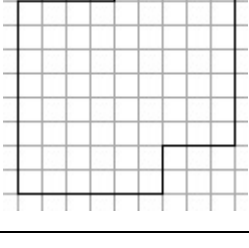
Nr.p.k.	Laukuma vērtība	Zīmējums	Iespējamo astonešūru kodi
			1D4R2D3L5D6R8U7L 1D4R2D8R6U5L3D7L 1D4L6U5R3D7R2D8L 1D4R8D5R6U2L3U7L 1D4R8D5R7U3L2U6L 1D5L2D8R3D4R6U7L 1D5L3U7R2U6R4D8L 1D6L2U5R3U8R4D7L 1D6L4D5R2U8R3U7L
25.	44		1D2L3U5R6U4R8D7L 1D2L4U6R5U3R8D7L 1D3R2D4L8U7R5D6L 1D3R2D5L4D8R7U6L 1D3R2D5L7U8R4D6L 1D6L4D8R3U5R2U7L 1D3R2D7R8U4L5D6L
26.	45		1D3L7U5R4D6R2D8L 1D5L3U6R2U7R4D8L 1D3R6D8R5U7L2U4L
27.	46		1D2R7D8R3U4L5U6L 1D4R3D8R6U5L2D7L 1D4R5D6R8U3L2D7L 1D5L4D6R2U7R3U8L 1D4R7D6R5U2L3U8L
28.	47		1D3R2D4L5D7R8U6L 1D3L2U4R7U5R8D6L 1D3L2D6R5D4R8U7L 1D3R2D6L7U8R4D5L 1D3R2D8R7U5L4D6L 1D3R5D6L8U7R2D4L 1D3L5U7R4U2R8D6L 1D3R8D6R4U2L5U7L

Nr.p.k.	Laukuma vērtība	Zīmējums	Iespējamo astoņstūru kodi
			1D3R8D6R7U5L2U4L 1D4L2D7R3D5R6U8L 1D4R6D7R5U3L2U8L
29.	48		1D2L7D4R5U6R3U8L 1D2R7D8R5U6L3U4L 1D5L4D7R2U6R3U8L 1D6L3U5R2U8R4D7L
30.	49		1D2L8D3R5U6R4U7L 1D2L8D4R6U5R3U7L 1D3L7U6R4D5R2D8L 1D3R8D6R5U2L4U7L 1D3R8D6R7U4L2U5L 1D4R2D8R6U7L3D5L 1D4L6U7R3D5R2D8L 1D5L6U4R2D8R3D7L 1D6L4D8R2U5R3U7L 1D3L2U4R5U7R6D8L
31.	50		1D2L3U4R6U5R8D7L 1D2L5U6R4U3R8D7L 1D2R8D7R4U3L5U6L 1D2R8D7R6U5L3U4L 1D3L2D6R4D5R7U8L 1D3R2D6L8U7R5D4L 1D3L8D2R4U7R5U6L 1D3L8D5R7U4R2U6L 1D4L5U8R3U2R7D6L 1D4L6U5R2D7R3D8L 1D4R3D8R6U7L2D5L
32.	51		1D3R2D8R7U6L4D5L 1D3R6D8R5U4L2U7L 1D5L3D8R2D4R6U7L

Nr.p.k.	Laukuma vērtība	Zīmējums	Iespējamo astoņstūru kodi
33.	52		1D2L3U4R5U6R7D8L 1D4L7D2R3U8R5U6L
34.	53		1D2R8D7R5U3L4U6L 1D2R8D7R6U4L3U5L 1D3R4D8R7U5L2D6L 1D3R5D7R8U4L2D6L 1D3L8U6R5D4R2D7L 1D4L2D5R3D7R6U8L 1D5L6U8R3D4R2D7L
35.	54		1D2L5U6R3U4R7D8L 1D2R7D8R5U4L3U6L 1D3L2D5R4D6R7U8L 1D3L6D7R5U4R2U8L 1D4L3D7R2D5R6U8L 1D4L5U8R2U3R6D7L 1D4L6U7R2D5R3D8L 1D3R2D7R8U6L5D4L
36.	55		1D2L8D3R4U6R5U7L 1D2L8D5R6U4R3U7L 1D3R4D8R7U6L2D5L 1D3L5U7R2U4R6D8L 1D4L2U3R5U8R6D7L 1D4L2U3R7U6R8D5L 1D4L6U7R3U2R8D5L 1D5L2D4R3D8R6U7L 1D5L7U3R2D8R4D6L
37.	56		1D4L8D2R3U7R6U5L 1D4L8D6R7U3R2U5L 1D5L4D8R2D3R7U6L

Nr.p.k.	Laukuma vērtība	Zīmējums	Iespējamo astoņstūru kodi
38.	57		1D3L2D4R5D6R8U7L 1D3R5D7R8U6L2D4L 1D3L7U5R2D6R4D8L 1D4L6D3R2U8R5U7L 1D5L6U8R2D4R3D7L
39.	58		1D2L7D6R5U4R3U8L 1D4L3D5R2D7R6U8L 1D4L6D8R5U3R2U7L
40.	59		1D2L4U3R5U6R8D7L 1D2L6U5R3U4R8D7L 1D3L7U6R2D5R4D8L 1D4L8U7R5D3R2D6L 1D5L3D4R2D8R6U7L 1D5L7U8R4D3R2D6L
41.	60		1D2L5U4R3U6R7D8L 1D2L7D4R3U6R5U8L 1D3L6D4R2U7R5U8L 1D4L8U3R2D7R5D6L 1D5L2D3R4D8R7U6L
42.	61		1D3L5U4R2U7R6D8L 1D3L8U4R2D6R5D7L 1D4L2D3R5D7R8U6L
43.	62		1D2L5U3R4U6R8D7L 1D2L6U4R3U5R8D7L 1D3L4D6R2D5R7U8L 1D4L5D7R2D3R8U6L
44.	63	-	-

Nr.p.k.	Laukuma vērtība	Zīmējums	Iespējamo astoņstūru kodi
45.	64		1D2L8D4R3U5R6U7L 1D2L8D6R5U3R4U7L 1D3L4D5R2D6R7U8L 1D4L3U2R5U8R7D6L 1D4L3U2R6U7R8D5L 1D4L5U3R2U8R6D7L 1D4L7U6R2U3R8D5L
46.	65		1D3L4U2R5U7R8D6L 1D3L5D6R2D4R8U7L 1D3L7U5R2U4R8D6L 1D3L8U6R2D4R5D7L 1D4L8D3R2U6R7U5L 1D4L8D7R6U2R3U5L 1D5L7U8R2D3R4D6L
47.	66		1D2L7D6R3U4R5U8L 1D3L6D7R2U4R5U8L 1D4L7D8R5U2R3U6L 1D5L4D3R2D8R7U6L
48.	67		1D2L8D5R3U4R6U7L 1D3L5U2R4U7R8D6L 1D3L7U4R2U5R8D6L 1D4L6D8R2U3R5U7L 1D2L8D6R4U3R5U7L
49.	68		1D3L8D4R2U5R7U6L 1D3L8D7R5U2R4U6L 1D4L5U2R3U8R7D6L 1D4L8U7R2D3R5D6L
50.	69		1D3L5D4R2D6R8U7L

Nr.p.k.	Laukuma vērtība	Zīmējums	Iespējamo astoņstūru kodi
51.	70		1D3L8D5R2U4R7U6L 1D3L8D7R4U2R5U6L 1D4L6U2R3U7R8D5L 1D4L7U3R2U6R8D5L 1D4L7D8R3U2R5U6L 1D4L5D3R2D7R8U6L
52.	71		1D4L8D6R2U3R7U5L 1D4L8D7R3U2R6U5L

## 2. pielikums. Izstrādātas datorprogrammas kods

```
program Poligons;

{$MODE OBJFPC}

uses
  SysUtils,
  DateUtils,
  Math,
  Types,
  fgl;

const
  DIR_NAMES: array [0..1, Boolean] of String =
    (
      ('Down', 'Up'),
      ('Left', 'Right')
    );

type
  TSize = Byte;
  TFigure = array of TSize;
  TDirection = Boolean;
  TDirections = array of TDirection;
  TFigureList = specialize TFPGList<TFigure>;
var
  Figures: TFigureList;
  VariantCount: Integer;

function FigureExists(AFigure: TFigure): Boolean;
var
  F: TFigure;
  i, j, N: Integer;
  LDiff: Boolean;
begin
  N := Length(AFigure);
  for F in Figures do
```

```

for i := Low(F) to High(F) do
  begin
    LDiff := False;
    for j := Low(F) to High(F) do
      if AFigure[j] <> F[(i + j) mod N] then
        begin
          LDiff := True;
          Break;
        end;
    if not LDiff then
      Exit(True);
    LDiff := False;
    for j := Low(F) to High(F) do
      if AFigure[N - j - 1] <> F[(i + j) mod N] then
        begin
          LDiff := True;
          Break;
        end;
    if not LDiff then
      Exit(True);
    end;
  FigureExists := False;
end;
function Intersect(R1, R2: TRect): Boolean;
  procedure Order(var AMin, AMax: Integer);
  var
    t: Integer;
  begin
    if AMin > AMax then
      begin
        t := AMin;
        AMin := AMax;
        AMax := t;
      end;
  end;
end;
begin
  Order(R1.Left, R1.Right);
  Order(R1.Top, R1.Bottom);

```

```

Order(R2.Left, R2.Right);
Order(R2.Top, R2.Bottom);
{ Ja abi vertikali }
if (R1.Left = R1.Right) and (R2.Left = R2.Right) then
  Intersect :=
    (R1.Left = R2.Left) and
    (
      InRange(R1.Top, R2.Top, R2.Bottom) or
      InRange(R1.Bottom, R2.Top, R2.Bottom)
    )
{ Ja abi horizontali }
else if (R1.Top = R1.Bottom) and (R2.Top = R2.Bottom) then
  Intersect :=
    (R1.Top = R2.Top) and
    (
      InRange(R1.Left, R2.Left, R2.Right) or
      InRange(R1.Right, R2.Left, R2.Right)
    )
{ Ja pirmais ir vertikals }
else if R1.Left = R1.Right then
  Intersect :=
    InRange(R1.Left, R2.Left, R2.Right) and
    InRange(R2.Top, R1.Top, R1.Bottom)
else
{ Ja pirmais ir horizontals }
  Intersect :=
    InRange(R1.Top, R2.Top, R2.Bottom) and
    InRange(R2.Left, R1.Left, R1.Right);
end;
procedure CheckFigure(const AFigure: TFigure; ADirections:
TDirections; AEdgeIndex: Integer);
var
  P: TPoint;
  i, j: Integer;
  Lines: array of TRect;
begin
  if AEdgeIndex = High(AFigure) then
    begin

```

```

SetLength(Lines, Length(AFigure));
P := Point(0, 0);
for i := Low(AFigure) to High(AFigure) do
begin
  Lines[i].TopLeft := P;
  if i and 1 = 0 then
    P.Y := P.Y + (2 * Ord(ADirections[i]) - 1) * AFigure[i]
  else
    P.X := P.X + (2 * Ord(ADirections[i]) - 1) * AFigure[i];
  Lines[i].BottomRight := P;
  for j := Low(Lines) + Ord(i = High(AFigure)) to i - 2 do
    if Intersect(Lines[i], Lines[j]) then
      Exit;
  end;
  if (P.X = 0) and (P.Y = 0) then
begin
  for i := Low(AFigure) to High(AFigure) do
    Write(AFigure[i]:4, DIR_NAMES[i mod 2,
ADirections[i]]:6);
    Writeln;
    Inc(VariantCount);
  end;
end
else
begin
  ADirections[AEdgeIndex] := False;
  CheckFigure(AFigure, ADirections, AEdgeIndex + 1);
  ADirections[AEdgeIndex] := True;
  CheckFigure(AFigure, ADirections, AEdgeIndex + 1);
end;
end;
function NextFigure(var AFigure: TFigure; const N: Byte): Boolean;
var
  i, j: Integer;
  LOk, LCarry: Boolean;
begin
  NextFigure := False;
  repeat

```

```

LCarry := False;
for i := High(AFigure) downto Low(AFigure) + 1 do
  if AFigure[i] = N then
    begin
      AFigure[i] := 1;
      LCarry := True;
    end
  else
    begin
      LCarry := False;
      Inc(AFigure[i]);
      NextFigure := True;
      Break;
    end;
  if LCarry then
    NextFigure := False;
  if NextFigure then
    begin
      LOk := True;
      for i := Low(AFigure) to High(AFigure) - 1 do
        begin
          for j := i + 1 to High(AFigure) do
            if AFigure[i] = AFigure[j] then
              begin
                LOk := False;
                Break;
              end;
            if not LOk then
              Break;
            end;
          end;
        end
      else
        LOk := True;
      until LOk;
    end;
  end;
end;
var
  N: Byte;
  i: Integer;

```

```

Figure: TFigure;
Directions: TDirections;
StartTime: TDateTime;
begin
  Write('N: ');
  Readln(N);
  if N mod 4 <> 0 then
    Halt(1);
  SetLength(Figure, N);
  SetLength(Directions, N);
  { 1, 2, 3, 4 }
  for i := Low(Figure) to High(Figure) do
    Figure[i] := i + 1;
  StartTime := Now;
  Figures := TFigureList.Create;
  try
    repeat
      if not FigureExists(Figure) then
        Figures.Add(Copy(Figure))
      else
        Continue;
      CheckFigure(Figure, Directions, 0);
    until not NextFigure(Figure, N);
    Writeln(VariantCount, ' of ', Figures.Count);
    WriteLn('Execution time: ', SecondsBetween(Now, StartTime), '
(s)');
  finally
    Figures.Free;
  end;
  Readln;
end.

```

### 3. pielikums. Daži perfektie $n$ -stūri

Perfektie 16-stūri:

1. 1D 2L 3D 4L 5U 6L 7U 8L 9U 10R 11U 12R 13D 14R 15D 16L
2. 1D 2L 3D 4L 5U 6R 7U 8R 9U 10R 11U 12R 13D 14L 15D 16L
3. 1D 2R 3D 4L 5U 6L 7U 8R 9U 10L 11U 12R 13D 14R 15D 16L

Perfektie 24-stūri:

1. 1D2L3D4L5D6L7D8L9D10R11D12L13D14R15U16R17U18R19U20R21U22L23D24L
2. 1D2L3D4L5D6L7D8R9D10R11D12L13D14L15U16L17U18R19U20R21U22R23D24L
3. 1D2L3D4L5D6L7D8R9D10R11D12R13D14R15U16R17U18R19U20L21U22L23D24L
4. 1D2L3D4L5D6L7D8R9U10R11D12L13D14L15D16L17D18R19U20R21U22R23U24L
5. 1D2L3D4L5D6L7D8R9U10R11D12R13D14R15D16R17D18R19U20L21U22L23U24L
6. 1D2L3D4L5D6L7U8L9U10R11U12L13U14R15U16R17U18R19D20R21D22L23D24L
7. 1D2L3D4L5D6L7U8R9U10L11U12L13U14R15U16R17U18R19D20L21D22R23D24L
8. 1D2L3D4L5D6L7U8R9U10R11U12L13U14L15U16L17U18R19D20R21D22R23D24L
9. 1D2L3D4L5D6L7U8R9U10R11U12R13U14R15U16R17U18R19D20L21D22L23D24L
10. 1D2L3D4L5D6R7D8L9D10L11D12R13D14L15U16L17U18R19U20R21U22R23D24L
11. 1D2L3D4L5D6R7D8L9D10R11D12R13D14R15U16R17U18L19U20R21U22L23D24L
12. 1D2L3D4L5D6R7D8L9U10L11D12R13D14L15D16L17D18R19U20R21U22R23U24L
13. 1D2L3D4L5D6R7D8R9D10R11D12R13D14L15U16L17U18L19U20R21U22R23D24L
14. 1D2L3D4L5D6R7D8R9U10R11D12L13D14L15D16R17D18R19U20R21U22L23U24L
15. 1D2L3D4L5U6L7D8L9U10R11U12L13U14R15U16R17D18R19U20R21D22L23D24L
16. 1D2L3D4L5U6L7U8R9U10R11D12R13U14R15U16R17D18R19D20L21D22L23U24L
17. 1D2L3D4L5U6L7U8R9U10R11U12R13D14R15D16R17U18R19D20L21D22L23U24L
18. 1D2L3D4L5U6R7U8L9D10L11U12R13U14L15D16L17U18R19U20R21D22R23D24L
19. 1D2L3D4L5U6R7U8L9U10R11D12R13U14R15U16R17D18L19D20R21D22L23U24L
20. 1D2L3D4R5D6L7D8L9D10R11D12R13D14R15U16L17U18R19U20R21U22L23D24L
21. 1D2L3D4R5D6L7D8L9U10L11D12L13D14R15D16L17D18R19U20R21U22R23U24L
22. 1D2L3D4R5D6L7U8L9U10L11U12L13U14R15U16L17U18R19D20R21D22R23D24L
23. 1D2L3D4R5D6L7U8L9U10R11U12R13U14R15U16L17U18R19D20R21D22L23D24L
24. 1D2L3D4R5D6R7D8L9D10L11D12L13D14R15U16R17U18R19U20R21U22L23D24L
25. 1D2L3D4R5D6R7D8L9D10L11U12L13D14R15D16R17U18R19D20R21U22L23U24L

Bakalaura darbs „Maģiskie daudzstūri un to īpašības” izstrādāts LU FMF Matemātikas nodaļā.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Elīna Buliņa

\_\_\_\_\_  
(paraksts)

\_\_\_\_\_  
(datums)

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai.

Vadītājs: prof. Dr. math. Andrejs Cibulis

\_\_\_\_\_  
(paraksts)

\_\_\_\_\_  
(datums)

Recenzents: Mg. math. doktorants Juris Čerņenoks

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā 09.06.2016.

Dekāna pilnvarotā persona: vecākā metodiķe Dzintra Holsta

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē

16. 06.2016. prot. Nr. \_\_\_\_\_

Komisijas sekretāre: docente Margarita Buiķe \_\_\_\_\_  
(paraksts)