1a

VI.

Grafiskās metodes parasto diferencialvienādojumu integrēšanai

Saturs

16

VI.

Grafiskās metodes parasto diferenciālvienādojumu integrēšanai.

<u>6.0. Ievads.</u> Pareizība, kas sasniedzama ar grafiskām metodēm, ir ierobežota. Toties šām piemīt uzskatamība un iznākumu dabū ātri. Šiem pēdējiem faktoriem (uzskatamībai, ātrumam) ir izšķiroša nozīme lietājamās zinībās, pie kurām var īpaši pieskaitīt eksperimentālo fiziku un ~~tās specializētās nozares speciāli un īpaši~~ dažādas techniskās ~~zinības~~ disciplīnas. Tā kā šinīs zinībās pētniekam parasti darīšana ar tuvinātiem datiem, tad arī rēķināšanas iznākumu pareizībai ir nospraustas robežas, un nav jēgas rēķināšanā lietāt ~~metodes~~ pārmērīgi precīzas metodes. Turpretim problēmas pilnīgai pārredzēšanai, ar to saistītai kļūdu kontrolei, un ātrai iznākuma dabūšanai — šiem jautājumiem lietājamās zinībās ir ļoti liela nozīme.

Grafiskās metodes diferenciālvienādojumu integrēšanā, saskaņā ar iepriekš sacīto, visvairāk pielāgotas apstākļiem, ~~ar kādiem darīšana~~ kādos noris eksperimentālā pētniecība, it īpaši techniskā. Lai šīs metodes sekmīgi varētu lietāt, vajadzīga precīzas rasēšanas prasme un paraša. Techniskos biŗojos šī prasme un paraša ir saprotama lieta. Pretējā gadījumā vajadzīgā rasēšanas prakse jāiegūst ar vingrinājumiem.

6.1. Virzienu lauks. ~~Paņēmieni~~ Palīglīdzekļi virzienu lauka konstrukcijai; nomogrammas, izoklīnas, staru līknes.

Pirmās kārtas diferenciālvienādojums $F(x,y,y')=0$ (6.1.1) dotām x, y vērtībām piekārto vienu vai vairākas atvasinātās y' vērtības; ģeometriskā iztulkojumā tas nozīmē, ka punktam ir piekārtots virziens. Ja dažādos plaknes punktos aprēķina attiecīgos virzienus un atzīmē rasējumā ar svītriņu, tad tādā kārtā dabū noteiktu kopumu svītriņu jeb virzienu lauku. Lai virzienu lauku konstruētu dotais diferenciālvienādojums jāatrisina attiecībā pret atvasināto:

$$y' = f(x,y) \qquad (6.1.1)$$

Mainot x un y vērtības un aprēķinot dažādām vērtību kopojumiem atbilstošās vērtības, kādas ir atvasinātai saskaņā ar (6.1.1), dabū skaitlisku tabulu:

$y \backslash x$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	...
y_1	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	...
y_2	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	f_{25}	f_{26}	...
y_3	f_{31}	f_{32}	...	...	...	...	...
y_4	f_{41}	f_{42}	...	...	...	...	...
y_5	f_{51}	f_{52}	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

(A)

Iespējams arī, ka dif. vienādojums dots tieši tādas tabulas veidā. Ja tabulas datus pārnes rasējumā, tad dabū virzienu lauku grafiskā attēlojumā.

Nomogrammas.

Diferenciālvienādojuma $F(x,y,y')=0$ kreisā pusē y' apzīmēsim ar z, un apskatīsim funkciju $F(x,y,z)$. Var gadīties, ka ~~funkciju~~ to var uzrakstīt determinanta veidā, kur mainīgie atšķirti katrs savā rindā:

$$F(x,y,z) \equiv \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(y) & g_2(y) & h_2(y) \\ f_3(z) & g_3(z) & h_3(z) \end{vmatrix}$$

Šādā gadījumā var konstruēt 3 skalas

$$\xi_i = \frac{f_i}{h_i}, \quad \eta_i = \frac{g_i}{h_i} \quad (i=1,2,3)$$

apzīmējot pirmās skalas punktus ar x vērtībām, bet otrās un trešās attiecīgi ar y un z (resp. y') vērtībām. Pie vienā taisnā līnijā ~~no~~ izvēlēti nolasījumi ir x, y un z (resp. y') vērtības, kas atbilst nolīdzinājumam $F(x,y,z)=0$ jeb dotajam diferenciālvienādojumam,

Šinī gadījumā skaitliskās tabulas ~~ar~~ (A) aizvieto izlīdzināto punktu nomogramma, ko var uzskatīt kā skaitlisku tabulu grafiskā veidā. Ja x un y vērtības ir dotas, sameklē attiecīgām skalām punktus, kuriem ir tādas atzīmes, kā dotās x un y vērtības. Šos punktus savieno ar taisni, ko vajadzības gadījumā turpina līdz krustpunktam ar trešo skalu. Šinī krustpunktā nolasa y' vērtību, kas atbilst dotām x un y.

Piemērs. ~~Lana~~

Lai attēlotu nomogrammā dif. vienādojumu

$$y' = \frac{g_1(x) - g_2(y)}{f_1(x) - f_2(y)} \qquad (6.1.1')$$

pietiek konstruēt skalas:

$$\text{I)}\ \xi = f_1(x), \quad \eta = g_1(x);$$

$$\text{II)}\ \xi = f_2(y), \quad \eta = g_2(y),$$

kur ξ un η apzīmē punkta koordinātas ortogonālā Dekarta sistēmā.

Savienojot pirmās skalas punktu, kas atbilst noteiktai parametra vērtībai x, ar otrās skalas punktu, kam klāt atzīmē y, dabūtaisni, kas ar X ass pozitīvo virzienu veido leņķi α. Viegli parādīt, ka

$$tg\alpha = \frac{g_1(x) - g_2(y)}{f_1(x) - f_2(y)} = y'.$$

Secinājums: punktam (x, y) atbilst tāds virziens (virziena koeficients), kā dif. vienādojuma nomogramā savienojumam $\overline{xy}$.

Izoklinas.

$F(x,y,y')=0$

Dotā diferenciālvienādojuma atvasināto y' aizvietojam ar noteiktu skaitlisku vērtību $y'=c$. Tad dabūjam ģeometrisko vietu virzienu lauka punktiem, kur virziena koeficientam ir vienāda dotā vērtība c. Šo ģeometrisko vietu sauc par **izoklinu**. Tās nolīdzinājums ir

$$F(x,y,c)=0; \qquad (6.1.2)$$

vai arī, ja dif. vienād. ir dots atrisinātā veidā (6.1.1):

$$f(x,y)=c. \qquad (6.1.2')$$

Virzienu lauks ir pilnīgi noteikts, ja ir dotas izoklinas un ja zina, kāds virziens katrai izoklinai atbilst. Vismaz vienam izoklinas punktam jāpiekārto attiecīgais virziens. Praktiski to var izdarīt tā, ka ~~izoklinas apzīmē ar katras numuriem~~ katru izoklinu un tās attiecīgo virziena staru apzīmē ar vienādu numuru. (Massau).

~~Izoklinu virzienus var dot ar pilnīgi patvaļīgi vilktiem stariem. Iedomāsimies, ka visi virziena stari iziet no kopīga punkta — no koordinātu asu krustpunkta. Izoklinai (6.1.2) jeb (6.1.2') tad atbilst virziena stars $y=cx$~~

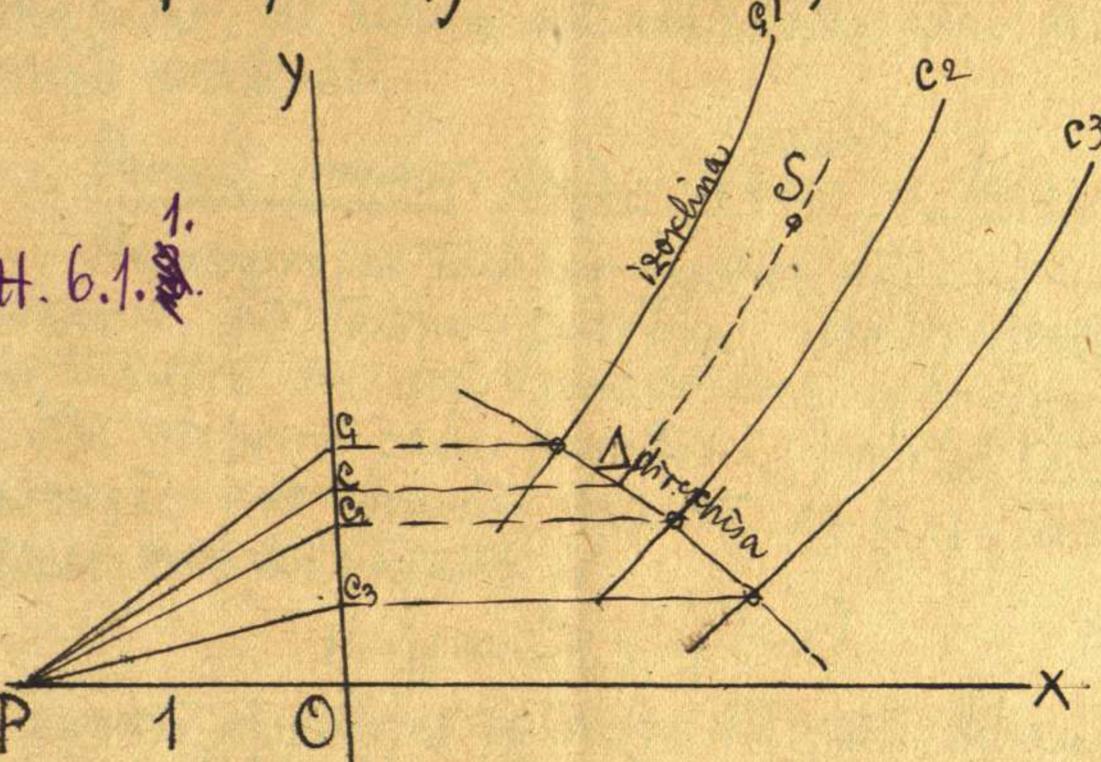
Še izšķiras ~~jaut~~ interpolācijas jautājums. Kā noteikt lauka virzienu punktā, kas nav tieši uz izoklinas? Šo ~~ja~~ uzdevumu var atrisināt ar nelielu palīgkonstrukciju.

Abscisu ass negatīvā pusē izvēlam polu P attālumā $PO=1$ no asu krustpunkta. Uz ordinātu ass atliekam nogriežņus (c=) $c_1, c_2, c_3, \ldots$, kas norāda ar vienības nogriezni ordinatu asī virzienā. Savienojot punktu P („polu") ar y ass punktu C dabū staru, kura virziena koeficients ir C. Tads virziens ir izoklinas punktos, kur $y' = c$.

Caur ordinatu ass punktiem $c_1, c_2, c_3, \dots$ velkam paralēles abscisu asīm līdz krustpunktiem ar attiecīgām izoklinām. Tad dabū līkni, kuru sauc par direktrisu, un kuras nolīdzinājumu ~~dabū~~

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{jeb} \quad y' = f(x, y) \qquad (6.1.3)$$

dabū eliminējot c no nolīdzinājumiem $y = c$ (paralele ~~y asij~~ x asij) un $F(x, y, c) = 0$ (izoklina).



Att. 6.1.1.

Lai konstruētu virzienu punktā S velk pēc acumēra līkni SΔ un paralēli x asij Δc. Tad Pc ir vajadzīgais virziens. (Att. 6.1.1)

Staru līknes.

Vēl ir cita iespējamība lauka virzienu aprēķināšanai: virzienu laukā pieņem kādu līkni K un tās punktos konstruē attiecīgos virzienus taisnes. Konstruētās taisnes pieskaras līknei~~s, taisņu saimes aploksnei~~, kuru sauc par staru līkni. Ja katrai virzienu laukā pieņemtai izejas līknei konstruē attiecīgo staru līkni, tad nav grūti ~~konstruēt virzie~~ dabūt virzienus visos pieņemto līkņu punktos. Pietiek no dotā izejas līknes punkta vilkt pieskari pret attiecīgo staru līkni; pieskares virziens ir tas, kas pieņemtajam punktam ir piekārtots.

~~Praktiski daudzas ir tādas izejas līknes kuras nevien padas, bet kurām arī atbilstošas staru līknes ir viegli konstruēt.~~

Pirmais piemērs: Izejas ~~līknes~~ līnijas ir taisnes.

Pieņemsim, ka taisnes vienādojums ir $y=mx+n$. Šīs taisnes punktiem atbilst virzieni, kuri jānoteic no dif. vienādojuma $y'=f(x,y)$. Ja šīm virzienā caur punkta (x,y) vilktās taisnes mainīgās koordinātas apzīmē ar ξ, η, tad šīs taisnes vienādojums ir

$$\eta-y=f(x,y)\cdot(\xi-x).$$

Ja punkts pārvietojas pa taisni stāvoklī blakus, tad abscisa x dabū pieaugumu Δx, bet ordināta pieaug par $\Delta y = m\Delta x$. Šinī blakus punkta virziena ~~taisnes~~ taisnes ir vienādojums

$$\eta-y-\Delta y=f(x+\Delta x, y+\Delta y)\cdot(\xi-x-\Delta x)$$

Tātad:

$$-\Delta y = \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)\right](\xi - x) - f(x+\Delta x, y+\Delta y)\cdot\Delta x$$

Izteiksmi otrajās iekavās izvirza Teilora rindā un dabū:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f'_x\,\Delta x + f'_y\,\Delta y + \cdots,$$

kur atmestajos locekļos ~~ar~~ pieaugumi Δx un Δy ir augstākās par pirmo pakāpes. No tā seko

$$-\Delta y = (f'_x\,\Delta x + f'_y\,\Delta y)(\xi - x) - f(x+\Delta x, y+\Delta y)\cdot\Delta x + \cdots$$

Izdalot abas puses ar Δx, ievērojot to, ka $\Delta y/\Delta x = m$, un liekot pieaugumiem ~~Δx~~ tiekties uz nulli atrod galīgi

$$-m = (f'_x + f'_y\,m)(\xi - x) - f(x,y).$$

Šis izteikums ir dabūts atrisinot kopā divu bezgalīgi tuvu taisnu nolīdzinājumus. Šādām divām taisnēm krustpunkts ir uz aptverošās. Krustpunkta koordinātas ξ un η seko no iepriekšējā nolīdzinājuma kopā ar taisnes $y = mx + n$ nolīdzinājumu:

~~un~~

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + \frac{f(x,y) - m}{f'_x(x,y) + m\,f'_y(x,y)}, \\ \eta &= y + \frac{f(x,y)\,(f(x,y) - m)}{f'_x(x,y) + m\,f'_y(x,y)}. \end{aligned}\right\} \quad (6.1.4)$$

Šinīs nolīdzinājumos pārcelts $y = mx + n$, tad x ieņem labā pusē kā parametrs.

Secinājums I.

Ja rezākuma taisne ir paralēla ordinātu asij $(x=a)$, tad $m=\infty$, un taisnei piekārtotā staru līkne ir izteikta ar nolīdzinājumiem:

$$\xi = x - \frac{1}{f_y(x,y)}, \quad \eta = y - \frac{f(x,y)}{f_y(x,y)}. \qquad (6.1.5)$$

Secinājums II.

Ja rezākuma taisne ir paralēla abscisu asij $(y=n)$, tad $m=0$, un taisnei piekārtotā staru līkne ir izteikta ar nolīdzinājumiem:

$$\xi = x + \frac{f(x,y)}{f_x(x,y)}, \quad \eta = y + \frac{[f(x,y)]^2}{f_x(x,y)}. \qquad (6.1.6)$$

Otrais piemērs: Izejas līnijas ir patvaļīgas pieņemtas līknes~~. (Dekarta koordinātas)~~.

Dotais dif. vienādojums: $y' = f(x,y)$.

Pieņemtās līknes nolīdzinājums: $\varphi(x,y) = c$.

Attiecīgā~~s~~ staru līkne~~s~~ ir izteikta ar nolīdzinājumiem

$$\left.\begin{aligned} \xi(x,y) &= x + \frac{f\varphi_y - \varphi_x}{f_x\varphi_y - f_y\varphi_x}, \\ \eta(x,y) &= y + f\,\frac{f\varphi_y + \varphi_x}{f_x\varphi_y - f_y\varphi_x}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.7)$$

kur labā pusē x vai y jāelimine ar pieņemtās līknes nolīdzinājumu.

26. VI. 48
parr.

No (6.1.6) redzams, ka ir spēkā identitāte

$$\frac{y-\eta(x,y)}{x-\xi(x,y)} \equiv f(x,y), \qquad (6.1.8)$$

kas tieši izteic staru līknes raksturīgo īpašību.

~~[illegible]~~

6.2. Izopolas un polu līknes.

Diferenciālvienādojums $y'=f(x,y)$ definē x,y plaknē virzienu lauku. Iedomāsimies ka laukam ir kontinuētas izoklīnas. Izvēlēsim noteiktu punktu, vilksim caur to starus, un atzīmēsim izoklīnas, kas starieni pieskaras. Izoklīnu pieskaršanās punkti ~~[illegible]~~ veido ģeometrisku vietu, kuru sauc par ~~izopolu~~ kopīgo polu līniju jeb izopolu.

Definīcija. ~~Izopola ir~~

Izopola ir tāda līnija, ka tās punktos lauka virzienā vilktām taisnēm ir viens kopīgs krustpunkts.

Šo krustpunktu sauc par izopolas attiecīgo polu.

Uzdevums I.

Patvaļīgi izvēlētam polam $P(\xi,\eta)$ dotā virzienu laukā $(y'=f(x,y))$ atrast attiecīgo izopolu.

Taisnei, kas vilkta caur doto punktu $P(\xi,\eta)$ un kurai virziena koeficients ir k, ir nolīdzinājums

$$y-\eta=k(x-\xi)$$

Taisnes punktam (x,y) atbilst lauka virziens, ko nosaka atvasinātās vērtība

$$y'=f(x,y),$$

kas aprēķināta šim punktam. Vispārīgi $k\neq y'$, bet atsevišķās vietās iespējama vienādība:

$$k=f(x,y).$$

Vajadzīgais izopolas nolīdzinājums ir

$$y-\eta=f(x,y)\cdot(x-\xi). \qquad (6.2.1)$$

Uzdevums II.

Pierādīt, ka dif. vienādojumam

$$y' = \frac{y-g(u)}{x-h(u)} \quad (u = y - mx) \qquad (6.2.2)$$

taisne $y = mx + n$ ir izopola.

Ja taisnes punktos konstruē taisnes, kas vērstas lauka virzienā, tad tās krustojas kopīgā punktā. Vai arī: šīs taisnes virzienu līkne saraucas punktā. Virzienu līknes koordinātas taisnei $y = mx + n$ ir dotas ~~n~~ ar vienādojumiem (6.1.4), kas veidoti dif. vienādojumam $y' = f(x,y)$. Mūsu gadījumā

$$f(x,y) = \frac{y - g(u)}{x - h(u)} = \frac{Y}{X}$$

Jāpierāda, ka aprēķinot ξ un η no formulām (6.1.4) dabū konstantas. Tā kā $u = y - mx = n$, tad seko, ka $g(u)$ un $h(u)$ ir konstantas. Tāpēc

$$f_x(x,y) = -\frac{Y}{X^2}, \qquad f_y(x,y) = \frac{1}{X}$$

Saskaņā ar (6.1.4)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + \frac{\frac{Y}{X} - m}{-\frac{Y}{X^2} + \frac{m}{X}} = x - X = h(n), \\ \eta &= y + \frac{\frac{Y}{X}\left(\frac{Y}{X} - m\right)}{-\frac{Y^2}{X} + \frac{m}{X}} = y - Y = g(n). \end{aligned}\right\} (6.2.2)$$

Virzienu līknes koordinatas ir atkarīgas tikai no n, bet šis lielums dotai taisnei ir nemainīgs. Visām izopolām caur kopīgu ordinatu ass punktu ir kopīgs pols. Ja izopolu nosķeltais ordinatu ass nogrieznis mainās, tad mainās arī attiecīgais pols.

Tā kā virzienu līknes koordinatas ir nemainīgas, tad līkne ir saraukusies punktā, t.i. dotā taisne ir izopola. Attiecīgā pola koordinatas ir ~~dotas~~ izteiktas ar (6.2.2').

Uzdevums III.

Pierādīt, ka dif. vienādojumam

$$y' = \frac{y - g(x)}{x - h(x)} \tag{6.2.3}$$

taisnes $x = c$ ir izopolas.

Šinī gadījumā

$$f(x,y) = \frac{y - g(c)}{c - h(c)} = \frac{Y}{C},$$

$$f_x(x,y) = 0, \quad f_y(x,y) = \frac{1}{C}.$$

Saskaņā ar (6.1.5)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= c - C = h(c) = \text{const.} \\ \eta &= y - Y = g(c) = \text{const.} \end{aligned}\right\} \tag{6.2.3'}$$

Piezīme.

(6.2.3) ir lineārs pirmās kārtas diferenciāl vienādojums, ko var pārrakstīt izskatā

$$y' = A(x)\cdot y + B(x), \qquad (6.2.4)$$

pieņemot apzīmējumus:

$$A(x) = \frac{1}{x-h(x)}, \quad B(x) = -\frac{g(x)}{x-h(x)} = -g(x)\cdot A(x).$$

No (6.2.3') seko, ka

$$\left.\begin{aligned} \xi &= h(x) = x - 1/A(x), \\ \eta &= g(x) = -B(x)/A(x). \end{aligned}\right\} \qquad (6.2.4')$$

Uzdevums IV.

Pierādīt, ka dif. vienādojumam

$$y' = \frac{y-g(u)}{x-h(u)} \quad \left(u = \varphi(x,y) \right) \quad (6.2.5)$$

līknes $\varphi(x,y)=c$ ir izopolas.

Pierādījumam var izlietot vienādības (6.1.7), no kurām iziet, ka ~~līknes~~ punktos, kas ņemti uz līknes $\varphi(x,y)=c$, stara līknei koordinātas ir konstantas. Līknē ir sakoncentrēts punktā (polā), kura koordinātas saskaņā ar (6.1.8)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= h(u) = h(\varphi(x,y)) = h(c), \\ \eta &= g(u) = g(\varphi(x,y)) = g(c). \end{aligned}\right\} \quad (6.2.5')$$

Polu līknes.

Katrai izopolai atbilst viens kopīgs punkts (pols), no kura iziet taisnes, kas krustpunktā ~~ar~~ izopolu rāda lauka virzienu. Izopolu saimei atbilst tikdaudz polu, cik līniju ~~piet~~ pieder saimei. Ja iedomājas, ka parametrs, kas nosaka izopolas, mainās nepārtraukti, tad mainās arī pola vieta, un pols apraksta līkni, kuru sauksim par polu līkni. Polu līkne īpašā gadījumā var būt arī taisne.

Lai polu līkni varētu izlietāt virzienu lauka konstrukcijai, līknei jābūt zinamam, kurš punkts kurai izopolai ir pols. To var iekārtot graduējot polu līkni, t.i. atzīmējot polus ar šķērssvītrām un pieņemot saskanīgu numerāciju šķērssvītrām un attiecīgajām izopolām.

Teorēma.

Ikvienam diferenciālvienādojumam $y' = f(x,y)$ virzienu laukā var patvaļīgi izvēlētu līniju pieņemt par polu līkni un noteikt attiecīgās izopolas.

Saskaņā ar apsvērumiem nodalījuma iesākumā ikvienam punktam, ko pieņem par polu, var konstruēt attiecīgo izopolu, un ~~arī~~ uzrakstīt izopolas nolīdzinājumu (6.2.1). Tas paliek spēkā arī tad, ja pols nav viens, bet to ir lielāks skaits. Tādā gadījumā der polu līkni izteikt ar nolīdzinājumiem parametriskā veidā

$$\xi = h(u), \qquad \eta = g(u). \qquad (6.2.6)$$

Palīglielums u nosaka līknes punktu, tātad polu. h un g apzīmē patvaļīgi izvēlētas funkcijas. Ar x un y apzīmēsim koordinātas virzienu lauka punktam.

Ja taisne, kas savieno punktu (ξ, η) ar punktu (x, y) rāda lauka virzienu punktā (x, y), tad seko, ka

$$\frac{y-\eta}{x-\xi} = f(x, y),$$

tātad, atrisinot attiecībā pret η:

$$\eta = y - (x-\xi)\, f(x, y)$$

jeb

$$g(u) = y - [x - h(u)]\, f(x, y). \qquad (6.2.6')$$

Ja u ir dots skaitlis, tad (6.2.6') neatšķiras ~~no 6.2~~ īpašībā no (6.2.1) un izteic izopoli, kas atbilst polam (6.2.6). Ja u ir parametrs, tad (6.2.6') izteic izopolu saimi, kas atbilst poliem (6.2.6). Parametrs u nodibina atbilstību starp polu un izopolu.

Tam faktam, ka ikviena dif. vienādojuma virzienu laukā ir ikvienu patvaļīgi izvēlētu līkni var pieņemt par polulīkni, ir praktiska nozīme tanī gadījumā, kad attiecīgās izopolas nav grūti konstruēt.

Polu līknes un izopolas polārās koordinātās.

Pieņemsim, ka dotais diferenciālvienādojums ir dots izskatā

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = F(\rho,\varphi), \qquad (6.2.7)$$

kur ρ un φ ir polārkoordinātas. ~~Pieņemsim~~ Izvēlēsimies patvaļīgi polu līkni ar nolīdzinājumiem

$$\rho = f(t), \qquad \varphi = g(t).$$

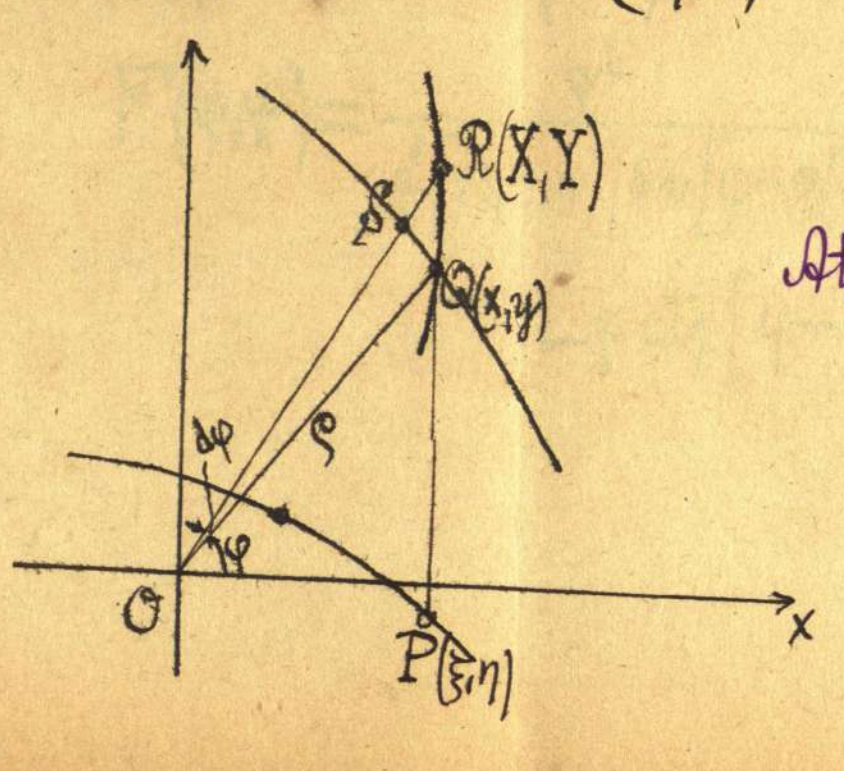
Uzdotam polam, ko noteic parametrs, dotā dif. vienādojuma virzienu laukā atbilst izopola

$$h(\rho,\varphi) = t,$$

kuras nolīdzinājums (funkcija h) ir vajadzīgs noteikt.

Punktu koordinātu apzīmējumi Dekarta sistēmā:

polu līknei - - - - (ξ, η)
izopolai - - - - (x, y)
integrāllīknei - - (X, Y)



Att. 6.2.1

Pola P savienojums ar izopolas punkta Q noteic lauka virzienu punktā Q, citiem vārdiem — noteic punktā Q integrāllīknes elementu QR. Punkti PQR ir uz vienas taisnes:

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ x & y & 1 \\ \xi & \eta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

tātad

$$\frac{\xi - x}{\eta - y} = \frac{X - x}{Y - y}.$$

Vai arī

$$\frac{f(t)\cos g(t) - \rho\cos\varphi}{f(t)\sin g(t) - \rho\sin\varphi} = \frac{(\rho+d\rho)\cos(\varphi+d\varphi) - \rho\cos\varphi}{(\rho+d\rho)\sin(\varphi+d\varphi) - \rho\sin\varphi}.$$

Ja šo izteiksmi izvirza, atmet augstākas kārtas bezgalīgi mazus locekļus un t aizvieto ar $h(\rho,\varphi)$, tad dabū galīgi

$$F(\rho,\varphi) = \frac{\rho^2}{f[h(\rho,\varphi)]\sin[\varphi - g(h(\rho,\varphi))]} - \rho\,\mathrm{ctg}[\varphi - g(h(\rho,\varphi))]$$

(6.2.8)

Īpaši gadījumi:

a) ~~Izopolar ir, starn kūlis ap tesa~~ caur ~~sesākuma~~ punkto. Šinī gadījumā $\varphi = t \equiv h(\rho,\varphi)$. Tālad, ~~xx~~ (6,2.8) dabū izskato

$$F'(\rho,\varphi) = \frac{\rho^2}{f(\varphi)\sin[\varphi - g(\varphi)]} - \rho \operatorname{ctg}[\varphi - g(\varphi)]$$

un difer. vienādojuma veids ir

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho^2 P(\varphi) - \rho\, Q(\varphi) \quad \ldots\ldots (6,2.8')$$

Pola līknei tad ir nolīdz.:

$$\varphi = t - \operatorname{arcctg} Q(t)\,; \quad \rho = \frac{1}{P(t)\sin[\operatorname{arcctg} Q(t)]}.$$

Ja vēl papildus prasa, ka pola līknes loma izpilda x-ass, tad $\varphi = g(t) = 0$. Dif. vienād. veids ir

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho^2 P(\varphi) - \rho \operatorname{ctg}\varphi \qquad (6.2.8'')$$

~~Un~~ x-ass kā pola līknei, ir funkcijas skala

$$\rho = \frac{1}{P(t)\sin t}$$

~~Dergita~~ ~~polārās~~ Diferenciālvienādojumiem (6,2.8') un (6,2.8'') koordinātās ir izskats:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + P\left(\frac{y}{x}\right)}{x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + Q\left(\frac{y}{x}\right)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + P\left(\frac{y}{x}\right)}{x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) P\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

b) Izopolas ir koncentriski riņķi ap sākuma punktu kā centru. Šinī gadījumā izopolām ir vienādojums $\rho = t \equiv h(\rho, \varphi)$. Tālab saskaņā ar (6.2.8) funkciju F vajaga varēt pārveidot izskatā

$$F(\rho,\varphi) = \frac{\rho^2}{f(\rho)\sin[\varphi - g(\rho)]} - \rho\,\mathrm{ctg}[\varphi - g(\rho)]. \quad (6.2.9)$$

Nepieciešamais un pietiekamais noteikums tam, ka dotu funkciju $F(\rho,\varphi)$ var pārveidot tādā izskatā ir tas, ka

$$F\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial F}{\partial\varphi}\left(3\rho - 2\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) = F^2 + \rho^2. \quad (6.2.10)$$

Ja šis noteikums ir izpildīts, tad aprēķina

$$\left.\begin{aligned} g(\rho) &= \mathrm{arctg}\,\frac{(\rho - F_\varphi)\,\mathrm{tg}\,\varphi - F}{F\,\mathrm{tg}\,\varphi + \rho - F_\varphi}, \\ f(\rho) &= \frac{\rho^2}{\rho\sin(\varphi - g) + \rho\cos(\varphi - g)}, \end{aligned}\right\} \quad (6.2.11)$$

~~un tad~~

tad pola līknes vienādojums ir

$$\rho = f(t); \qquad \varphi = g(t).$$

Īpaši gadījumi seko, ja polā līknei jāizpilda kādas noteiktas prasības. Ja polā līknes ~~vieta ir~~ ir x-ass, tātad $\varphi = g(t) = 0$, tad dif. vienādojumam jābūt šādā veidā:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\rho^2}{f(\rho)\sin\varphi} - \rho\,\mathrm{ctg}\,\varphi. \qquad (6.2.12)$$

Lai šādu veidu varētu dabūt funkcijai F jāizpilda noteikums

$$F_\varphi + F'\,\mathrm{ctg}\,\varphi - \rho = 0$$

Tad tātad

$$f(\rho) = \frac{\rho^2}{F'\sin\varphi + \rho\cos\varphi}$$

un $\rho = f(t)$ iz funkcijas skala uz x-ass kā polu līknes.

~~Ātot~~ Vienādojuma (6.2.12) vietā var arī rakstīt

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = P(\rho)\,\mathrm{cosec}\,\varphi - \rho\,\mathrm{ctg}\,\varphi \qquad (6.2.12')$$

Ja šādu veidu iespējams tieši dabūt, tad polu līkne ir noteikta ar

$$\varphi = 0; \quad \rho = \frac{t^2}{P(t)}.$$

Dekarta koordinātās nolīdz. (6.2.12') skan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,P(x^2+y^2)}{x\,P(x^2+y^2) - (x^2+y^2)}.$$

Polu līknes noteikšana vispārīgā gadījumā.

Lai doto diferenciālvienād. $d\varrho/d\varphi = F(\varrho,\varphi)$ varētu atrisināt ar patvaļīgi pieņemtas izopolu saimes $h(\varrho,\varphi)=t$ jeb $\varrho = H(\varphi,t)$ palīdzību, jābūt izpildītām otrās kārtas parciālam diferenc. vienādojumam

$$A^2+B^2 = A\frac{\partial B}{\partial\varphi} - B\frac{\partial A}{\partial\varphi},$$

kur pieņemti apzīmējumi:

$$A \equiv H\frac{\partial H}{\partial\varphi} - FH; \quad B \equiv H\frac{\partial F}{\partial\varphi} - 2F\frac{\partial H}{\partial\varphi} - H^2,$$

un kur funkcijā $F(\varrho,\varphi)$ vajaga ϱ aizvietot ar $H(\varphi,t)$. Polu līknes nolīdzinājums tad ir

$$\varphi = g(t) = \operatorname{arctg}\frac{B\operatorname{tg}\varphi - A}{A\operatorname{tg}\varphi + B};$$

$$\varrho = f(t) = \frac{H^2}{F\sin(\varphi-g) + H\cos(\varphi-g)}.$$

Īpaši gadījumi rodas, kad polu līknei ir priekšrakstīti noteikumi. Ja $g(t)$ ir dots, tad no sakarības

$$\operatorname{tg} g = \frac{B\operatorname{tg}\varphi - A}{A\operatorname{tg}\varphi + B}$$

var noteikt F līdz nenoteiktai funkcijai, kas atkarīga no t. Ja arī $f(t)$ ir ~~ne~~ dota, tad ir viens noteikts dif. vienād., ko ar dažiem pieņēmumiem palīglīdzekļiem var atrisināt.

Sīkāk: Nenendorf, ZAMM (19 Bd. 2).

6.3. Pirmās kārtas ~~dif.~~ vienādojumu integrēšana grafiski ar virzienu lauka konstrukcijām.

Ja katram punktam ~~x, y pl.~~ plaknē, apskatamā vērtību apgabalā, ir piekārtots virziens, tad saka ir dots virzienu lauks. Praktiski ~~var virzienu piekārtot tikai~~ to realizē tā, ka plaknes punktos velk īsas svītriņas, kas rāda lauka virzienu ~~šo~~ attiecīgā punktā. Pievilkt svītriņas visos punktos nav iespējams, jo punktu ir bezgala daudz, bet ja punktu ir pietiekami daudz un lauka virziens apskatamā vērtību apgabalā nemainas pārāk strauji, tad neatzīmētos punktos virzienu var tuvinī noteikt pēc acumēra un tādā kārtā var uzskatīt ka virziens ir zināms visos punktos.

Ja virzienu lauks ir attēlots grafiski ar virzienu svītriņām, tad integrēšana ~~būtība~~ ir ~~tādas~~ līknes vilkšana, kad līknei katrā vietā elementa virziens ir ~~tāds kā laukam~~ reizē lauka virziens.

Katrs paņēmiens, kas veicina lauka konstrukciju ~~tādā kārtā~~ ir derīgs pirmās kārtas dif. vienādojuma integrēšanai. Izšķirme šādi gadījumi:

I) Diferenciālvienādojums ir dots skaitliskas tabulas veidā.

Vienādojuma analītiskā izteiksme var būt pilnīgi nezināma, ja dati ir iegūti ~~no~~ ar novērojumiem vai mērījumiem. Tādā gadījumā konstruē virzienu katram dotam punktam un velk integrāllīknes ~~vadoties no dotās zināšanas~~ vadoties interpolācijā no konstruētā virzienu lauka.

II) Dif. vienādojums ir dots analītiski: $y' = f(x,y)$ un funkcijai $f(x,y)$ skaitliskās vērtības var nolasīt tabulās vai viegli aprēķināt.

Integrēšana sastāv: 1) no funkcijas $f(x,y)$ skaitlisko vērtību sameklēšanas tabulā vai aprēķināšanas. Ar to vajadzīgo datu iegūšanu uzdevums ir novests pie I) gadījuma un atliek: 2) konstruēt virzienu lauku, un 3) vilkt integrāllīknes vadoties no virzienu svītrām.

III) Dif. vienādojums $y' = f(x,y)$ labā puse ir veidots no mainīgo pakāpēm vai eksponenciālām funkcijām.

Ja pakāpes ~~rādītāji~~ vai eksponenciālo funkciju ~~bāzes ir vienkārši veseli skaitļi~~ ir skaitļi, kas ērti aprēķināšanai vai arī ja vienādojuma labā puse ietvertās funkcijas ir tabulētas, tad gadījums atbilst iepriekš apskatītajam. Ja tas tā nav, ja funkciju vērtības jāaprēķina pašam, turklāt aprēķināšana ir neērta, tad svarīga nozīme ir paņēmieniem, kas ~~aprēķināšo~~ darbu paātrina un atvieglo.

Piemērs:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{y} + 3\sqrt[3]{x}}{4\sqrt[4]{y} + 5\sqrt[5]{x}}.$$

Lai varētu konstruēt virzienu lauku jāaprēķina lielaks skaits skaitlisko vērtību funkcijām:

$$z_1 = 2y^{\frac{1}{2}}, \quad z_2 = 3x^{\frac{1}{3}}, \quad z_3 = 4y^{\frac{1}{4}}, \quad z_4 = 5x^{\frac{1}{5}}.$$

To ērti var izdarīt attēlojot šīs funkcijas grafiski un nolasot skaitliskās vērtības no attēla. Neder attēlot parastās vienmērīgi iedalītās koordinātu asīs, jo tādai attēlošanai vajadzīgs lielaks skaits funkcijas skaitlisko vērtību, no kuru aprēķināšanas mēs tieši gribam izvairīties.

~~Derīgo attēlo~~
Ieteicamas ir logaritmiski iedalītas koordinātu asis (logaritmiskie papīri), jo ja uz abām asīm ir iekārtota logaritmiska skala, un tādas asīs attēlo ~~iepriekšēja~~ pakāpes funkciju, tās attēls ir taisne, kuras konstrukcijai nepieciešami tikai 2 punkti.

Piemēram pirmai funkcijai $z_1 = 2y^{\frac{1}{2}}$, jāaprēķina divas pāras kopā saderīgo vērtību, turklāt argumenta izvēle ir mūsu rīcībā. Ja $y=1$, tad $z_1=2$, un ja $y=9$, tad $z_1=6$. (Attēlošanai derīgas tikai pozitīvas funkcijas vērtības). Divkārt logaritmiski iedalītas asīs sameklē punktus, kuriem atbilst augšējie skaitļi. Šo punkto savienojums ir funkcijas grafiskais attēls. ~~Attēls~~ Izlieto funkcijas vērtību nolasīšanai citām argumenta vērtībām.

Tāpat dabū skaitliskas vērtības funkcijām z_2, z_3, z_4. Kad tas ir izdarīts sastāda funkcijas $f(x,y)$ skaitlisko vērtību tabulu, tā ka uzdevums ir novests pie virziena lauka ~~konstrukcijai~~ un integrāllīkņu konstrukcijas. Virzienu lauku ātri konstruē parastās (vienmērīgi iedalītās) Dekarta koordinātu asīs.

Ja diferenciālvienādojuma labā pusē sastopamas eksponenciālfunkcijas (veida ab^{kx}). Tādu funkciju attēls izvēršas taisnē, ja ~~attēlojums~~ lietotām koordinātu asīm viena ass ir graduēta vienlīdzīgās daļās, bet ~~otra~~ logaritmiski. Šīs funkcijas attēlam ~~divi … divu punktu vietā jāaprēķina~~ divās vietās jāaprēķina kopā saderīgās argumenta un funkcijas vērtības. Ar to ir noteikti divi attēla punkti un risē ar to viņa attēla taisne. Turpmākums tas pat kā iepriekšējā piemērā.

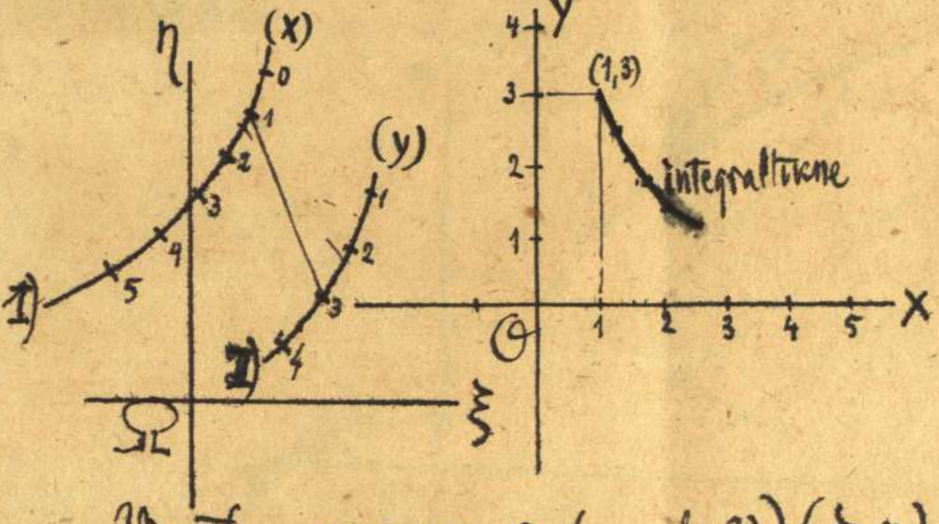
IV) Dif. vienādojumam ir veids:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g_1(x) - g_2(y)}{f_1(x) - f_2(y)}. \qquad (6.3.1)$$

Virzienu lauka ~~konstrukcijr~~ atrašanu var atvieglināt konstruējot papriekš divas skālas, kas graduētas ar x un y vērtībām:

$$1)\ \xi = g_1(x), \quad \eta = f_1(x);$$
$$2)\ \xi = g_2(y), \quad \eta = f_2(y).$$

Tad punktā, kam Dekarta koordinātas ir (x, y), lauka virziens ir tāds, kā taisnei, kas savieno ar atzīmētām x un y apvilktās skālās punktus. Sk. (6.1.1').



Att. 6.3.1.

Vienības nogrieznis (modulis) (ξ, η) sistēmā var būt cits, kā (x, y) sistēmā, jo nozīme ir tikai skālas punktu saorientējumam; nav šķēršļu arī tam, ka (ξ, η) sistēmu paralēli pārvieto ērtā vietā.

~~Lai (x, y) sistēmā punktā (x_0, y_0) atrasto virz atrasto~~

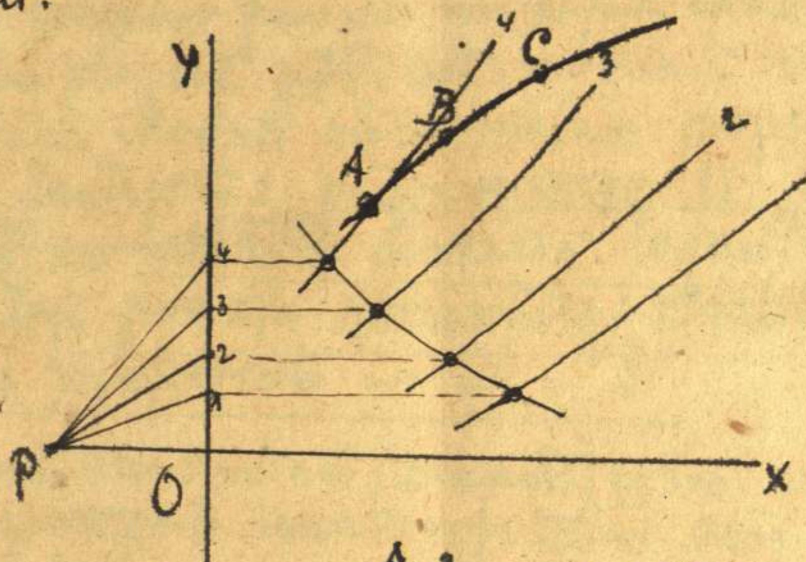
Lai (x, y) sistēmā konstruētu integrallīkni, kas iet caur punktu (x_0, y_0) velk šinī punktā svītriņu, kas paralēla ~~savienojumam x_0, y_0~~ punktu ~~$x_0 y_0$~~ x_0 un y_0 savienojumam otrā sistēmā. Svītriņas punktā (x_1, y_1) maina virzienu saskaņā ar jaunām koordinātām un t.t.

V) Dif. vienādojumam $F(x,y,y')=0$ jeb $y'=f(x,y)$ ir viegli konstruējamas izoklinas.

Pieņēmums ir, ka līknes $F(x,y,c)=0$ jeb $f(x,y)=c$ (c–parametrs) ir viegli konstruēt. Katru šaimes līkni (izoklinu) apzīmē ar numuru, un tādu pašu numuru piekārto stariem, kas rada lauka virzienu attiecīgās izoklinas punktos. Ir arī citi paņēmieni virziena staru piekārtošanai savai attiecīgajai izoklinai, piem. atbilstību starp abiem var nodibināt turpinot starus līdz krustpunktam ar attiecīgo izoklinu.

sk. (6.1.3)

Ja izoklinu šaimi vēl papildina ar direktrisu, izvelot virziena stariem kopīgu sākumu uz x ass, tad mums rīcībā ir viss, kas vajadzīgs integrāllīkņu zīmēšanai.



Att. 6.3.2

Ǝ ~~No~~ sākuma punkta A velk nebeidz. šaimu nogriezni virzienā, kas šim punktam atbilst, līdz punktam B. Punktā B ~~maina~~ vi velk nogriezni BC virzienā, kas atbilst punktam B un t.t. ~~Dabū~~ integrālpolygonu, kuru var uzskatīt kā ~~tuv~~ integrāllīknes tuvinājumu.

Izoklinas un integrallīknes divkāršā logaritmiskā tīklā. Saskaņā ar III) gadījumu aproksimējām virzienu lauka aprēķinus nemot palīgā logaritmisko anamorfozi. Ar tādu paņēmienu dabūjām dif. vienādojuma noteiktos virzienus $[y'=f(x,y)]$ atkarībā no ~~[illegible]~~ mainīgajiem x un y. Ar šiem datiem (x,y) plaknes punktā, kam Dekarta koordinatas ir x un y, velk taisnu nogriezni, ~~kam~~ ar x-asi ir tādu virzienu α, ka $\operatorname{tg}\alpha = f(x,y)$. Tādi nogriežņi kopā ir virziena lauka attēls vienmērīgi iedalītās koordinatu asīs.

Integrallīknes var tieši tāpat labi attēlot arī koordinatu asīs, ~~kam abas iedalītas~~ kuru tām ir logaritmisko iedalījumu, tā kā skalu atzīmes x un y atbilst noteiktu plaknes punktu un ~~tāpat~~ otrādi, ikvienam punktam plaknē atbilst noteikti nolasījumi uz skalām. Moduli abām skalām pieņemsim vienu to pašu. Jautājums: ~~kāds virziens ir integrallīknes punktā x, y, kas attēlots~~ divkāršā logaritmiskā tīklā, ja attiecīgā punktā vienmērīgi iedalītās asīs integrallīknes virziena koeficients ir $f(x,y)$?

Pret vienkāršām (Dekarta) asīm attiecinātu taisni $y=kx+b$ anamorfozētās asīs attēlo transcendenta līkne, kuras Dekarta koord. apzīmējam ar ξ, η. Saskaņā ar anamorfozes definīciju

$$\xi = m \log x, \quad \eta = m \log y,$$

kur m — skalu modulis. Starp koordinatām ξ un η ~~anamorfozētās asīs~~ ir spēkā sakarība

$$10^{\frac{\eta}{m}} = k \cdot 10^{\frac{\xi}{m}} + b,$$

no kurienes seko, ja izdara diferencēšanu

$$\frac{d\eta}{d\xi} = k\, 10^{\frac{\xi-\eta}{m}} = \frac{kx}{y}.$$

$k = f(x,y)$ ir virziena koeficients integrāllīknes pieskarei vienmērīgi dedalītās asīs, bet $d\eta/d\xi$ ir virziena koeficients anamorfozētās līknes pieskarei. Dabūtais iznākums rāda, ka

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{x}{y} f(x,y), \qquad (6.3.2)$$

t.i. lai dabūtu virziena koeficientu anamorfozētās asīs $f(x,y)$ jāpareizina ar x/y.

Sakarība (6.3.2) atļauj konstruēt virzienu lauka attēlu logaritmiskās asīs. Punkti, kur virziena elementi ir paralēli, veido zināmu ģeometrisku vietu, kuru var apzīmēt par anamorfozētā lauka izoklīnu. Šādas izoklīnas punktos skalu atsāuces x un y ir saistītas ar sakarību

$$\frac{x}{y} f(x,y) = C \quad \text{jeb} \quad f(x,y) = C\frac{y}{x}. \qquad (6.3.3)$$

Sakarību (6.3.2) var arī pārrakstīt izskatā

$$\frac{d\eta}{d\xi} : f(x,y) = \frac{x}{y},$$

~~Vin~~ un formulēt vārdos šādi: virziena elementu slīpumi pirms anamorfozes un pēc tās attiecas kā punkta koordinātas pirms anamorfozes.

Uz līnijas, kur $x - y = 0$ anamorfoze nemaina virziena koeficientu; uz ~~taisnes x+y~~ līnijas, kur $x+y=0$, anamorfoze pārmaina virziena koeficienta zīmi. Punktos, kur $x=0$, bet $y \neq 0$, $f(x,y) \neq 0$, seko $d\eta/d\xi = 0$.

VI. Dotais dif. vienādojums ir pirmās kārtas lineārs: $y'+P(x)y=Q(x)$.

Tādam dif. vienādojumam ir taisnas izopolas, kas paralēlas ordinātu asij, t.i. visi virzienu lauka elementi izstaro no polu līknes punktiem, un proti tā, ka no viena punkta izstarojošie elementi ir uz taisnes, kas paralēla ordinātu asij. (Czuber, 1899.)

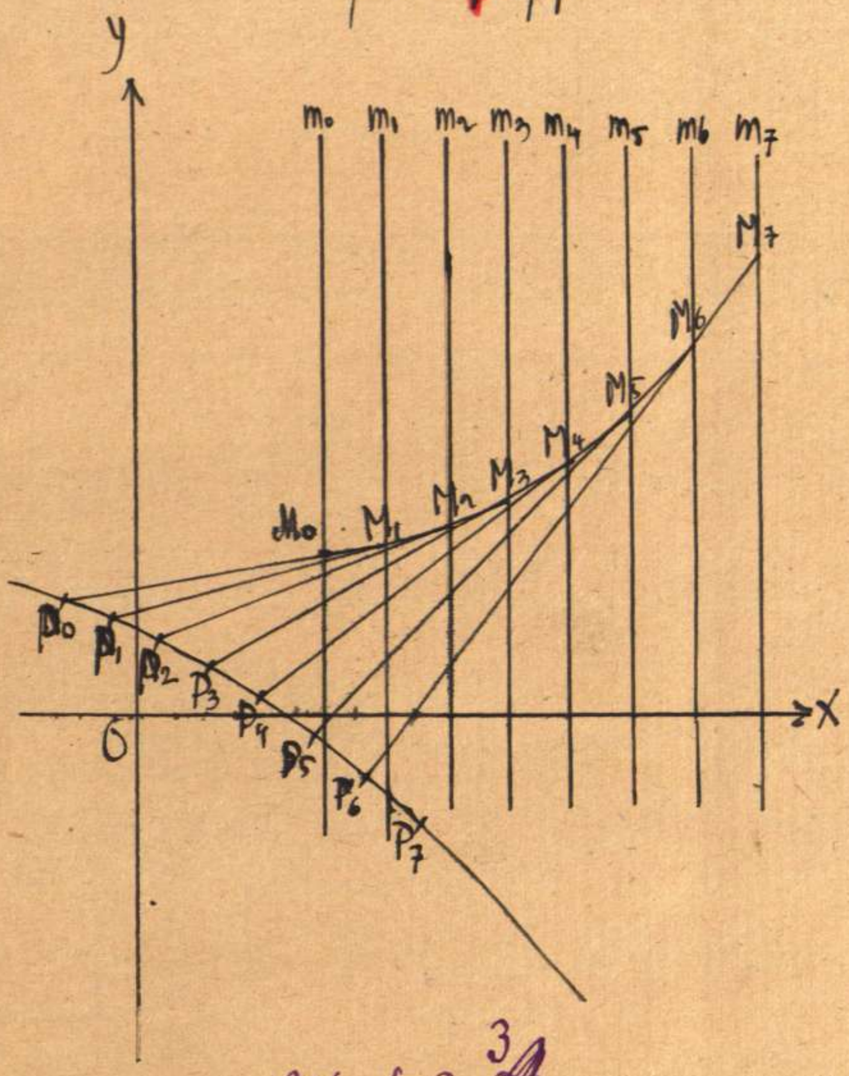
Šo īpašību var izlietot virzienu lauka un integrallīkņu konstrukcijai.

Nolīdzinājumam
$$y'+P(x)y=Q(x), \tag{6.3.4}$$
saskaņā ar (6.2.4') atbilst polu līkne
$$\xi = x+\frac{1}{P(x)}, \quad \eta=\frac{Q(x)}{P(x)}, \tag{6.3.4'}$$
kur x jāuzskata kā parametrs. Ja parametra vērtība ir dota $x=c$, tad (6.3.4') izteic polu. Attiecīgās izopolas nolīdzinājums ir $x=c$.

Nolīdzinājums
$$y'=\frac{y-g(x)}{x-h(x)} \tag{6.3.5}$$
tikai ar veidu atšķiras no (6.3.4). Taisnes $x=\text{const.}$ ir izopoles un polu līkne ir izteikta parametriskā veidā ar nolīdzinājumiem
$$\xi=h(x), \qquad \eta=g(x). \tag{6.3.5'}$$

Integrējot grafiski dif. vienādojumu (6.3.4) vai (6.3.5) jāatrod vispirms polu līkne ar skalu, kas rāda parametra x vērtību. Jāvelk pietiekami liela skaitā paralēles ordinātu asij (izopolas) un jānoskaidro, kur ir katrai paralēlei attiecīgais pols.

pre 3[illegible] lpp.



Att. 6.3.3

Attelā paraleles apzīmetas ar burtiem $m_0, m_1, m_2, \dots$, integrāllīknes punkti uz tām ar $M_0, M_1, M_2, \dots$, attiecīgie poli ar $P_0, P_1, P_2, \dots$ Pieņemsim, ka integrāllīknei jāiet caur punktu M_0. Konstrukcija ir šāda: savieno ar taisni punktus P_0 un M_0 un turpina savienojumu līdz krustpunktam M_1 ar paralēli m_1. Ar to ir atrasta integrālpoligona mala M_0M_1. Savienojot P_1 ar M_1 atrod M_1M_2, un tāpat tālāk $M_2M_3, M_3M_4, \dots$ (Att. 6.3.3.)

<u>VII</u>) <u>Dif. vienādojumam</u>

$$y' = \frac{y - g[\varphi(x,y)]}{x - h[\varphi(x,y)]} \tag{6.3.6}$$

<u>ir izopolas $\varphi(x,y) = c$</u>, kur c-parametrs. <u>Polu līknes nolīdzinājums ir</u>

$$\xi = h(c), \qquad \eta = g(c). \tag{6.3.6'}$$

Īpašā gadījumā, ja $\varphi(x,y) \equiv y - mx$, izopolas ir taisnes $y = mx + c$. Izopolas veido paralēlu taisņu saimi, jo $m = \mathrm{const}$.

31b

6.4. Grafiskas metodes otrās kārtas vienādojumu integrēšanai. Vēsturisks pārskats.

Augstākas kārtas diferenciālvienādojumu grafiska integrēšana attīstas galvenām kārtām technikas vajadzību ierosinājumā. Fundamentāls darbs šinī jautājumā pieder belgu inženieram Massau („Mémoire sur l'intégration graphique", 6 daļas, 1878-1892.) Massau apskata visvienkāršāko otras kārtas vienādojumu: $y''=f(x)$, jo pie tāda noved technikā dažādie siju liecis uzdevumi.

Izmantojot Masso darbu, krievu prof. Gersevanovs grāmatā „Основания номографического исчисления с приложением их к инженерному делу" (otrā daļa, 1890) izveido metodi vispārīgaku otras kārtas diferenciālvienādojumu atrisināšanai, bet viņa metode nav visai ērta, jo katra integrāllīknes punkta atrašanai vajadzīgs atrisināt 3 nelineārus ~~noti~~ vienādojumus ar 3 nezināmiem.

Pāra gadus vēlāk lords Kelvins publicē savu grafisko metodi dinamikas problēmu atrisināšanai („On graphic Solution of Dynamical Problems", 1892.)

27.XI.48 — 0^h40^m

Mūsu gadusimta iesākumā (līdz Oktobra revolucijai) plaši izplatītas bija divas grāmatas: 1) C. Runge, Graphische Methoden, 1915, un 2) R. Mehmke, Leitfaden zum graph. Rechnen, 1917. Tanīs labi atspoguļojas sasniegtais attīstības līmenis grafiskā rēķināšanā. Sīki un plaši ir apskatīti pirmās kārtas vienādojumi, bet augstāku kārtu vienādojumi ir reprezentēti tikai ar kādām 3 atrisināšanas metodēm. Kopš tā laika šis skaits ir ievērojami palielinājies, spriežot pēc Kamkes sastādītā sakopojuma (Differentialgleichungen, I. Bd., 1943) tas ir vismaz divkāršojies.

Padomju zinātniekiem šinī attiecībā ir ievērojama līdzdalība. Jāatzīmē Б. Г. Победиискии „Графическое интегрирование дифер. уравнений второго порядка" (1928) un М. Франк „Новый метод графического интегрирования дифференциальных уравнений" (1933). Viņu darbu īpatnības mēs redzēsim šī pārskata beigās.

6.5. Lorda Kelvina metode integrēšanai ar liekuma riņķiem.

Metodes kodols ir tas, ka vajadzīgo integrāllīkni sastāda pakāpeniski no riņķu lokiem. Iesākuma dati ir x_0, y_0, y_0'. Tie noteic punktu plaknē un pieskares virzienu šinī punktā. Reizē ar to ir dots pieskares virziena leņķis α_0, jo $\operatorname{tg}\alpha_0 = y_0'$.

Zinot to aprēķina otrās atvasinātās vērtību no dotā diferenciālvienādojuma

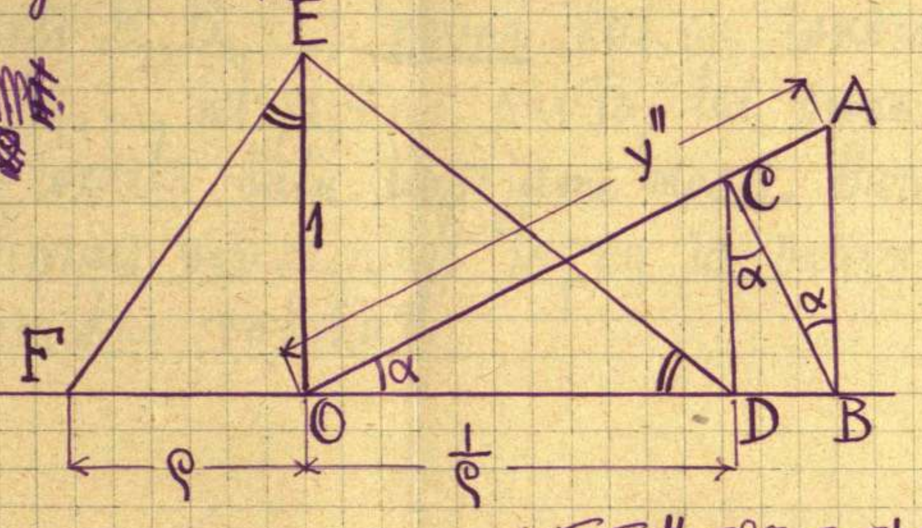
$$y'' = f(x, y, y') \qquad (6.5.1)$$

aizvietojot labā pusē x, y, y' ar x_0, y_0, y_0'. Tādā kārtā dabū vēl $y_0'' = f(x_0, y_0, y_0')$.

Tagad var atrast arī liekuma riņķa radiju iesākuma punktā ϱ_0, jo ir spēkā liekuma formula:

$$\frac{1}{\varrho_0} = y_0'' \cos^3\alpha_0 \qquad (6.5.2)$$

Grafiskā konstrukcija parādīta att. 6.5.1, kur $OA = y''$ un leņķis DEF ir taisns.

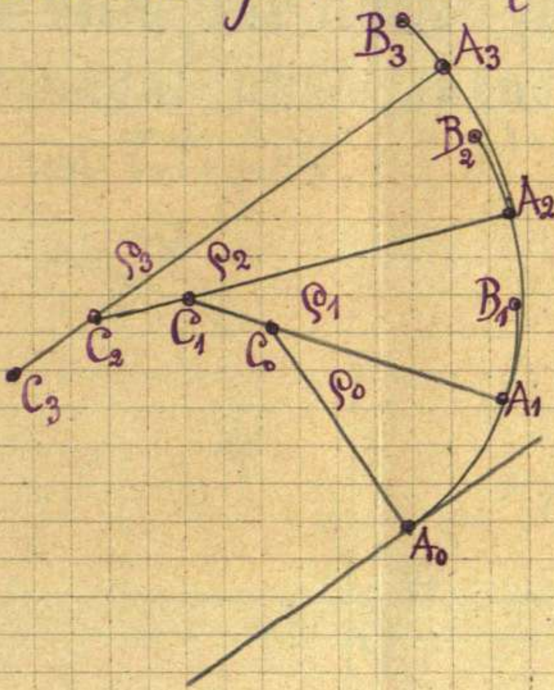


Att. 6.5.1.

~~$OA = y'' = f(x, y, y')$,~~

~~$\sphericalangle DEF = \frac{\pi}{2}$~~

Dotā iesākuma punktā A_0 konstruē liekuma riņķa centru C_0 un ar radiju ρ_0 apraksta loku A_0A_1, kas noteic sektoru $A_0C_0A_1$. Loku A_0A_1 turpina līdz punktam B_1, izvēlot pēdējo tur, kur paredz otrā sektora vidu. Punktam B_1 noteic atbilstošo liekuma riņķa radiju ρ_1. Atliek $A_1C_0C_1 = \rho_1$ un velk loku A_1A_2, ko turpina līdz punktam B_2 (trešā sektora vidū) un t.t (Att. 6.5.2)

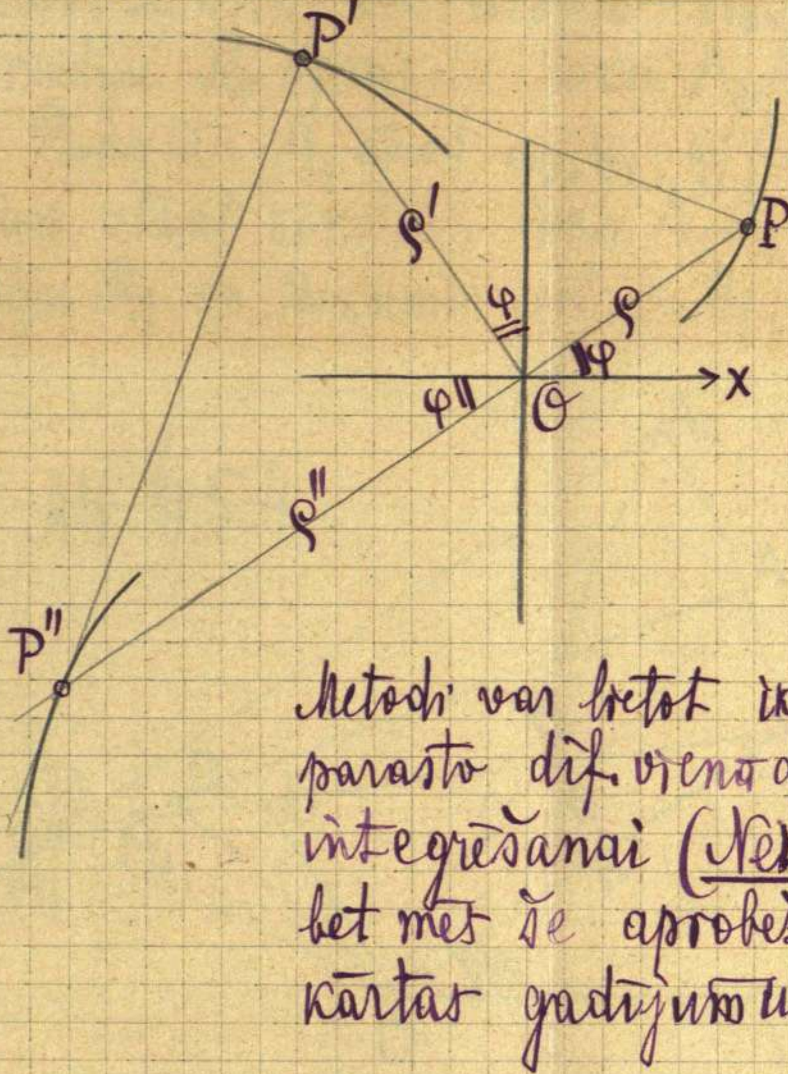


Att. ~~2~~ 6.5.2

Punkti $B_1, B_2, B_3, \ldots$ <u>nevar</u> būt uz lokiem A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., bet jāgādā par to, lai punktu novirze no lokiem būtu iespējami maza. Samazinot sektoru leņķus var sasniegt to, ka tā paliek rasējuma pareizības robežās.

Liekuma riņķu metode polārās koordinātās.

Liekuma riņķu metodi sevišķi vienkārši var realizēt polārā koordinātu sistēmā. Ja polārā koordinātu sistēmā ir attēlota kāda funkcija $\rho = F(\varphi)$, tad tās atvasinātā $\rho' = d\rho/d\varphi$ ir vienlīdzīga polārās subnormales garumam. Konstruējot visiem dotās līknes punktiem subnormales dabū geometrisko vietu, kas attēlo funkcijas atvasināto ρ'. Atvasinātās attēla subnormales savukārt attēlo ρ'' un t.t. (Att. 6.5.3.)



Att. 6.5.3.

Metodi var lietot ikvienas kārtas parasto dif. vienādojumu grafiskai integrēšanai (Nettendorff, 1923), bet mēs še aprobežosimies ar otrās kārtas gadījumu.

Uzdots vienādojums (6.5.3)

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}=f\left(\varphi,\rho,\frac{d\rho}{d\varphi}\right) \text{ jeb } \rho''=f(\varphi,\rho,\rho').$$ ~~(3)~~

Iesākuma vērtības $\varphi_0, \rho_0, \rho_0'$. Ievietojot tās formulā (3) dabū ρ_0''.

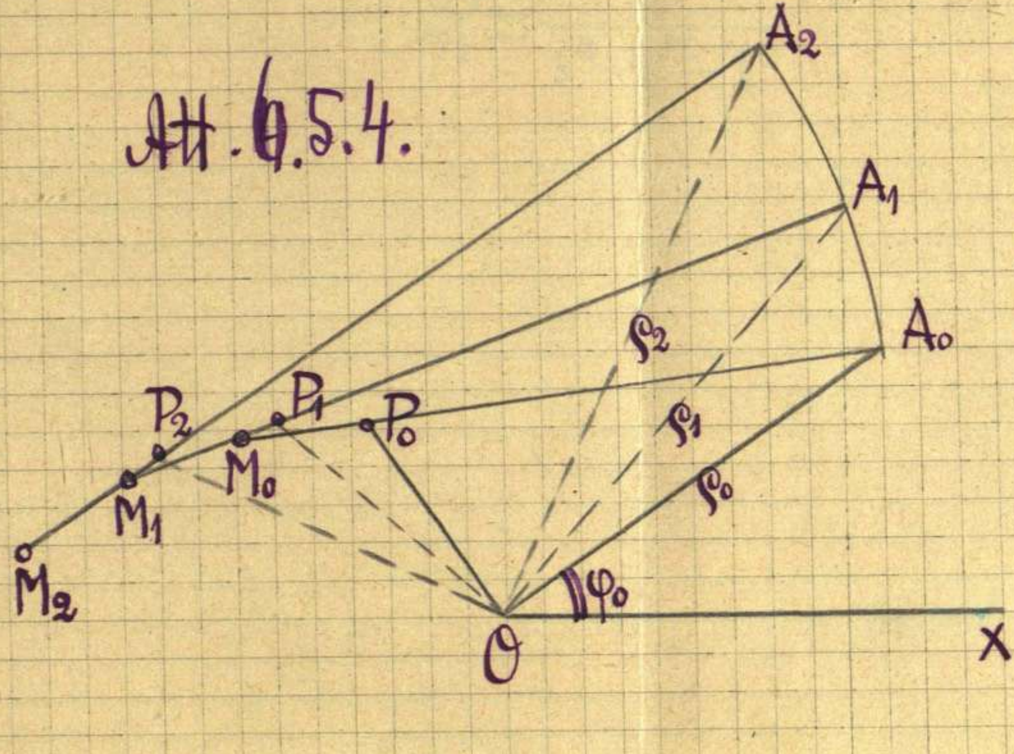
Liekuma riņķa radijs iesākuma punktā:

$$R_0=\frac{(\rho_0^2+\rho_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho_0^2+2\rho_0'^2-\rho_0\rho_0''}. \qquad (6.5.4)$$

Ar šiem datiem konstruē $OA_0=\rho_0$, $OP_0=\rho_0'$, kur $OP_0 \perp OA_0$, un $A_0P_0M_0=R_0$. Ap punktu M_0 ar radiju R_0 apraksta loku A_0A_1.

Punktam A_1 atrod $\varphi_1, \rho_1, \rho_1' (=OP_1)$, aprēķina R_1 un atkal konstruē loku A_1A_2, ko apraksta ar radiju R_1 ap liekuma centru M_1, un t.t. (Att. 6.5.4.)

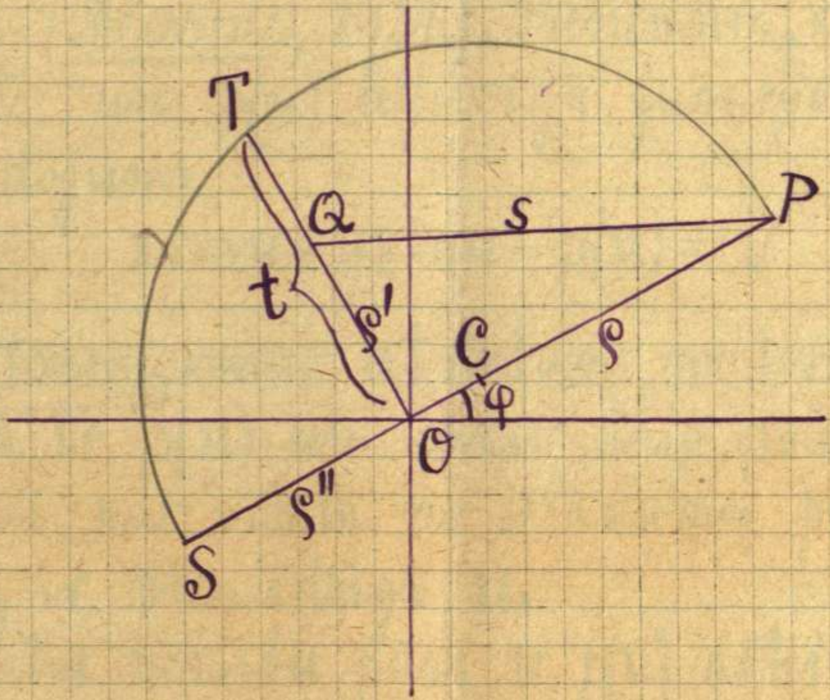
Att. 6.5.4.



~~$A_0M_0=R_0$~~
~~$A_1M_1=R_1$~~
~~$A_2M_2=R_2$~~
~~un t.t.~~

Liekuma riņķa radija aprēķināšanu var paātrināt ar konstrukciju, kas parādīta att. 6.5.5.

Att. 6.5.5



Velkot riņķi ap C atrod $PQ = s$, $OT = t$, un $s^2 = \varrho'^2 + \varrho^2$, $t^2 = \varrho\varrho''$. Tad seko

$$R = \frac{s^3}{s^2 + \varrho'^2 - t^2}. \qquad (6.5.5)$$

6.6.

Funkcijas attelošana ar taisnēm.

Jaunu grafiskās integrēšanas metodi dabū, ja ikvienu funkcijas vērtību attelo ar orientētu taisni. (Meissner, 1931.) Pieņemsim, ka u ir arguments un $p(u)$ attiecīgā funkcijas vērtība. Vienādojums

$$x\cos u + y\sin u - p(u) = 0 \qquad (6.6.1)\cancel{(4)}$$

izteic taisni, kuras atstatums no iesākuma punkta ir $p(u)$ un lenķis starp polaro asi un normali, kas vilkta no iesākuma punkta pret taisni, ir vienlīdzīgs u.

Katrs vērtību pāra u, $p(u)$ noteic vienu taisni (6.6.1) ~~(4)~~ un visu vērtību pāru kopums — taišņu saimi, kuru (vai tās aptverošo) var uzskatīt par funkcijas attelu.

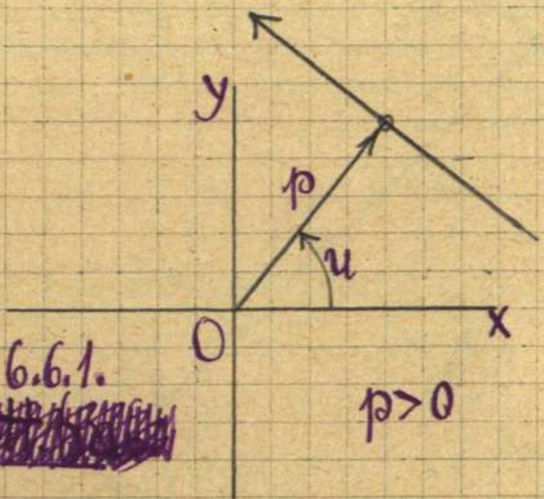
Zīmju kārtula:

1) Lenķi u skaita no polāras ass positivu pretēji pulksteņa rādītaja gaitai;

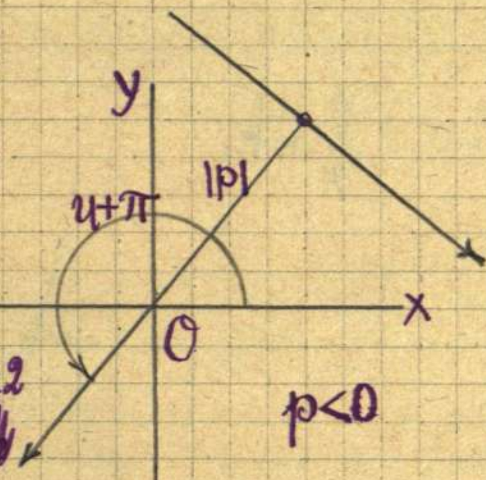
2) Lenķa būvājai malai positivais virziens ir projām no iesākuma punkta, šinī virzienā atliek $p(u)$, ja $p(u)>0$; ja $p(u)$ ir negativs, tad pusstaru turpina uz otru pusi un šinī pusē atliek $|p(u)|$;

3) Ja lenķa būvo malu pagriež positivā virzienā par $\pi/2$, tad dabu positivo virzienu

attēla taisnei. (Att. 6.6.1 līdz 6.6.4).

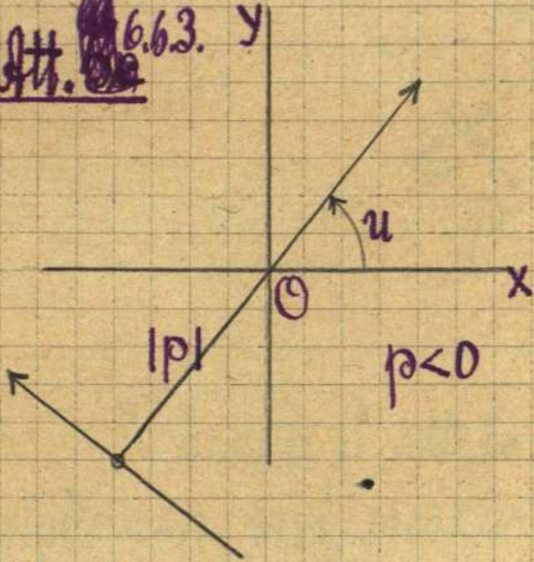


Att. 6.6.1.

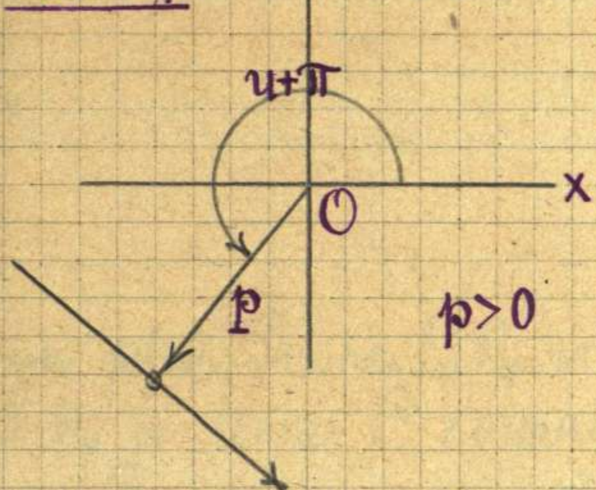


Att. 6.6.2

Att. 6.6.3.



Att. 6.6.4



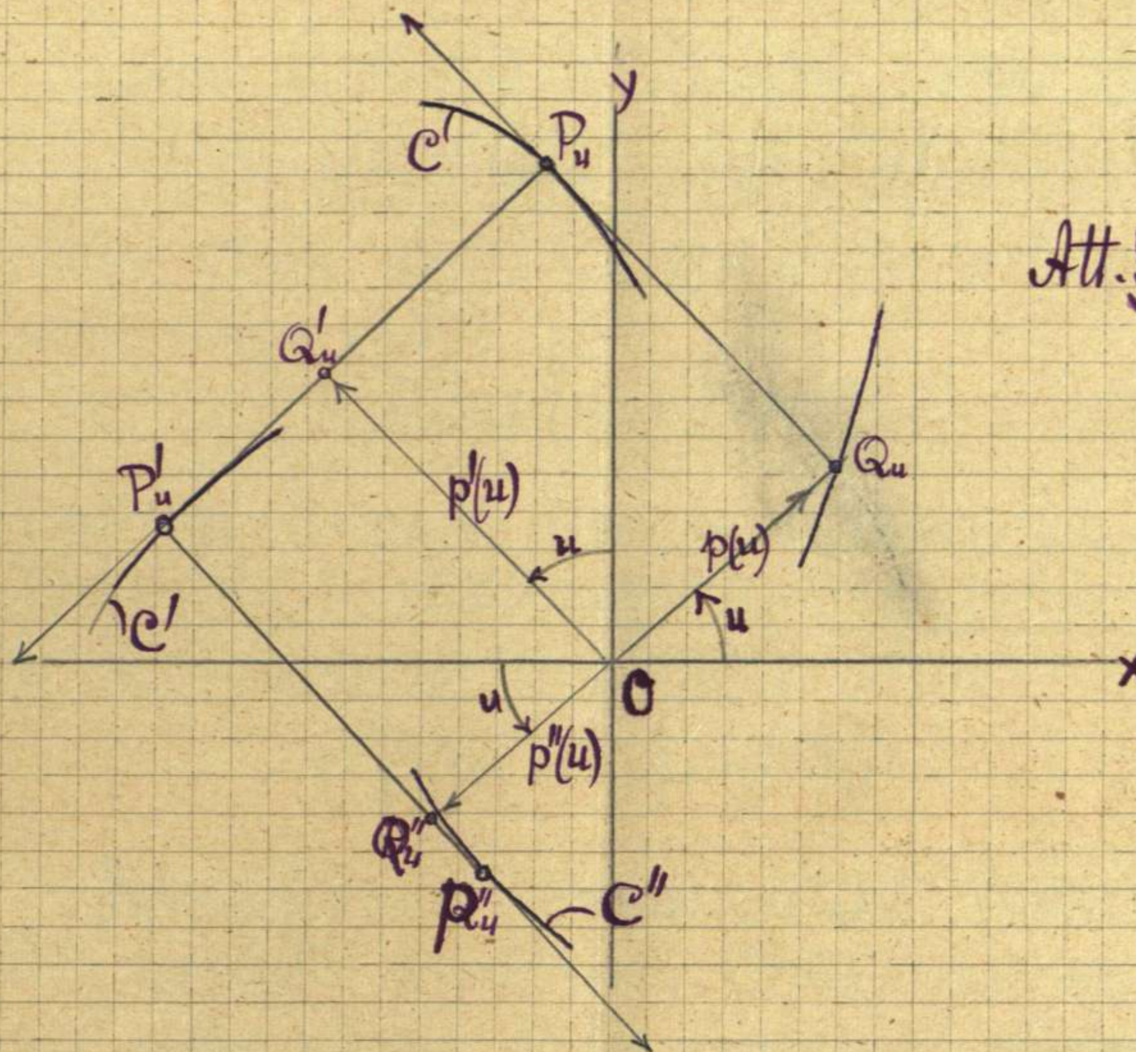
Visas taisnes ~~(4)~~ (6.6.1) pieskaras līknei, savai aptverošai C, kuras veids raksturo funkciju $p(u)$. Kādas noteiktas taisnes pieskaršanās punktu līknei C atrod atrisinot kopā ~~(4)~~ (6.6.1) ar

$$-x\sin u + y\cos u - p'(u) = 0 \qquad \cancel{(5)}\,(6.6.2)$$

jeb

$$x\cos\left(u+\frac{\pi}{2}\right) + y\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right) - p'(u) = 0. \qquad \cancel{(5')}\,(6.6.2')$$

Šis vienādojums izteic taisni, kas stateniska pret ~~(4)~~ (6.6.1).



Att. 6.6.5

Līkne C attēlo funkciju $p(u)$. Taisne $P_u P'_u$ ir statniska pret pieskari, tātad P_u ir līknes C normale. C' ir līknes C evoluta! Līknes C liekuma riņķu centri ir uz līknes C'. $P_u P'_u = \rho$ ir liekuma riņķa radiījs

Tā kā pieskares atstatums līknei C' ir vienlīdzīgs funkcijas atvasinātai $p'(u)$, tad C' ir attēls atvasinātai $p'(u)$, pie kam leņķis jāskaita no y ass. Secinājums: funkcijas atvasināto attēlo funkcijas attēla evoluta. (Att. 6.6.5).

Vispārīgi, funkcijas n-to atvasināto attēlo funkcijas attēla n-tā evoluta, turklāt polārā ass ir pagriezta pozitīvā virzienā par n taisniem leņķiem.

Līknei C punktā P_u liekuma riņķa radijs
$$\varrho(u)=P_uP_u'=p(u)+p''(u).$$
Līdzīgā kārtā līknei C' (iepriekšējās evolūtai) liekuma riņķa radijs
$$P_u'P_u''=p'(u)+p'''(u)=\varrho'(u).$$
Vispārīgi līknes C liekuma riņķa radija n-tā atvasinātā ir vienlīdzīga šīs līknes n-ās evolūtas liekuma riņķa radijam:
$$\varrho^{(n)}(u)=p^{(n)}(u)+p^{(n+2)}(u). \qquad (6.6.3)$$

Diferencēšanas process atbilst funkcijas attēla evolūtas zīmēšanai. Otrās, trešās un t.t. atvasinātās attēlus dabū konstruējot ~~attēla līk~~ funkcijas attēla līknei otro, trešo un t.t. evolūtu. Pietiek šo procesu realizēt apgrieztā virzienā, lai no funkcijas nonāktu pie integraļa. Tātad integrēšanu realizē ar evolventas konstrukciju. Sasniedzamā pareizība iztur salīdzinājumu ar pazīstamiem integraf~~iem~~u sasniegumiem.

Otrās kārtas diferenciālvienādojums

$$p'' = f(u, p, p').$$

Iesākuma noteikumi: $p(0) = p_0$, $p'(0) = p_0'$. Jāatrod funkcija $p = p(u)$, kas grafiskā realizējumā ir līdzvērtīgs tās attēla C konstruēšanai.

Liknei C katrā tās punktā attiecīgais liekuma riņķa radijs

$$\rho(u) = p + p'' = p + f(u, p, p'), \qquad (6.6.4)$$

tātad iesākuma punktā

$$\rho(0) = p_0 + f(0, p_0, p_0') = \rho_0.$$

Liknes C iesākuma punktu P_0 noteic p_0 un p_0', reizē ar to dabū pieskares un normales virzienu šinī punktā. No punkta P_0 normales pozitīvā (bultas) virzienā, ja $\rho_0 > 0$, atliek ρ_0 un dabū liekuma centru P_0'; ja būtu $\rho_0 < 0$, tad $|\rho_0|$ jāatliek no P_0 uz otru pusi. Ap P_0' kā centru apraksta loku P_0P_1, kam atbilst loka mērs α_1. Konstruē punktus Q_1 un Q_1', tādā kārtā noteic

$$p_1 = p(\alpha_1) = OQ_1 = P_1Q_1',$$

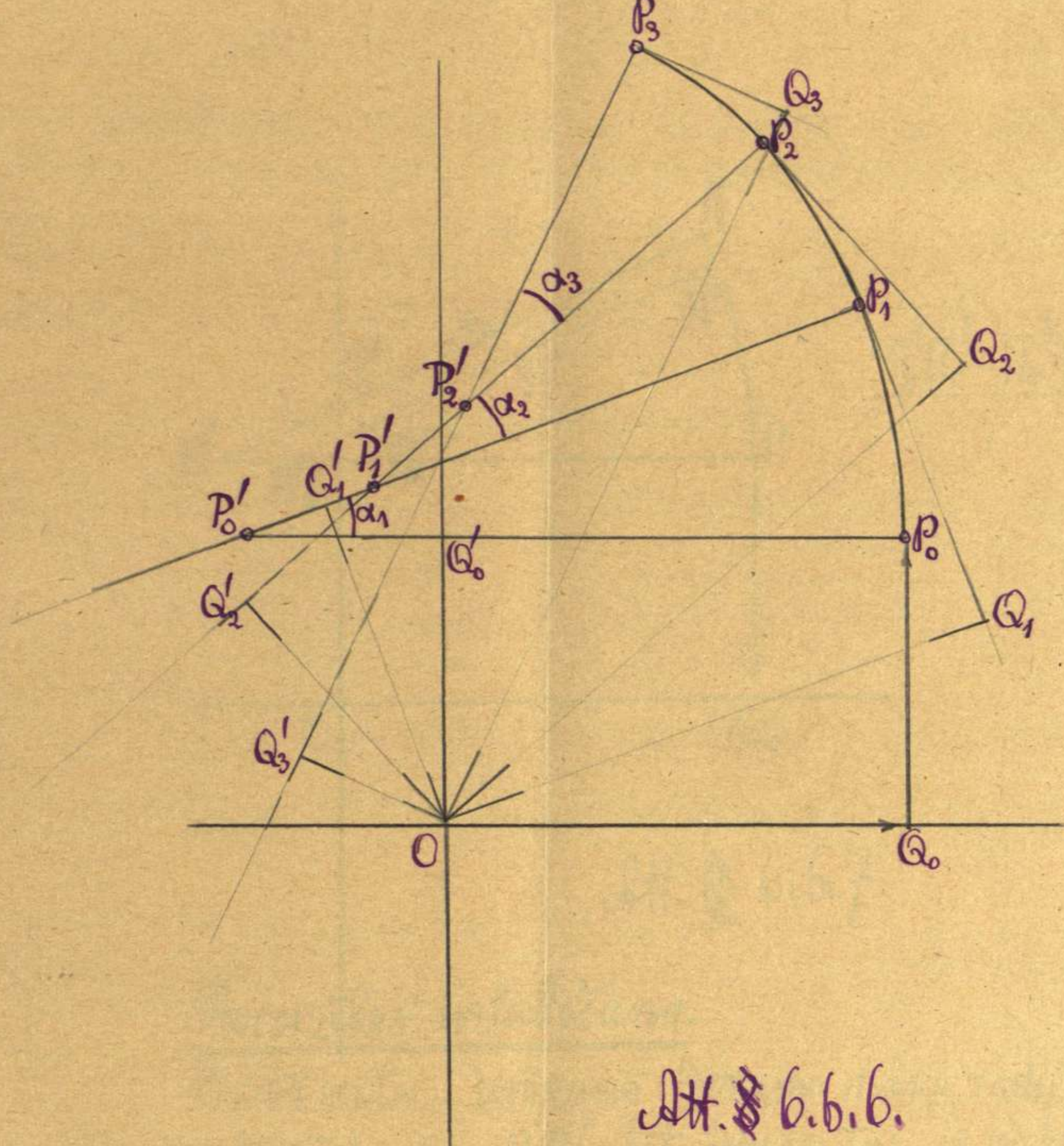
$$p_1' = OQ_1' = Q_1P_1 = p_1'(\alpha_1),$$

un tālāk

$$\rho_1 = \rho(\alpha_1) = p_1 + f(\alpha_1, p_1, p_1').$$

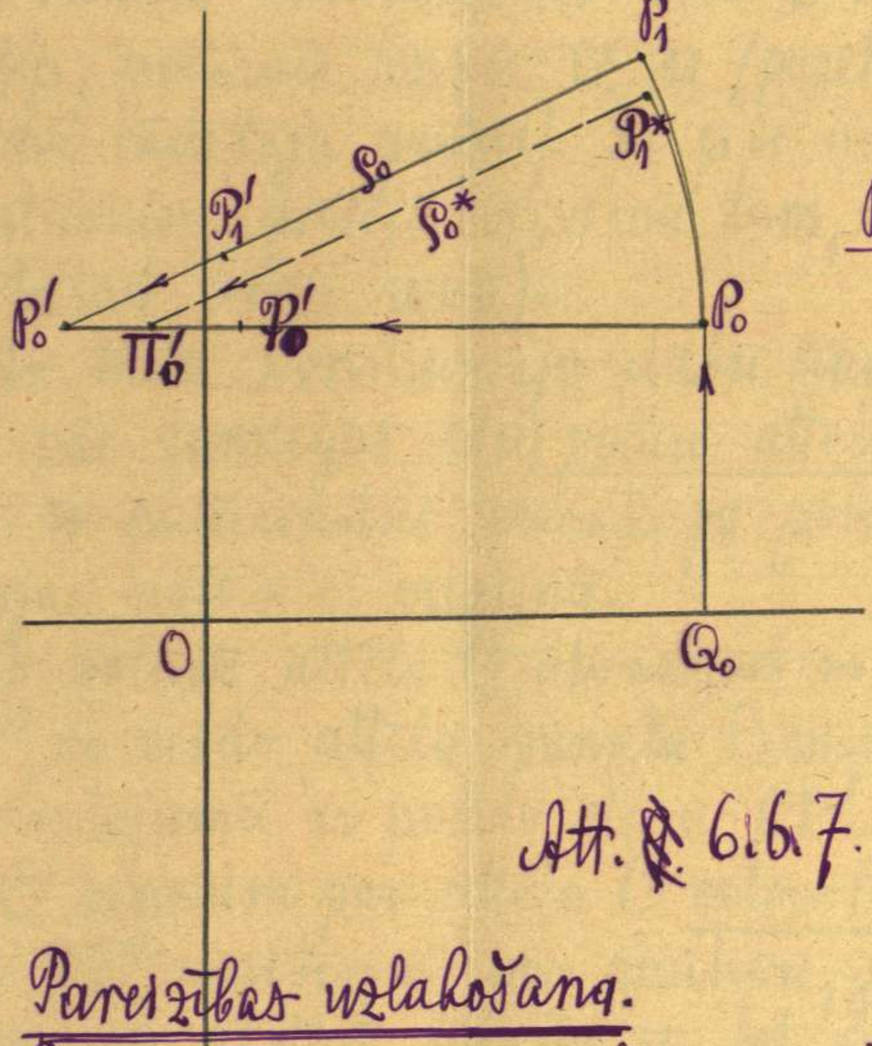
No punkta P_1 atliek $P_1P_1' = \rho_1$ un no punkta P_1' apraksta loku P_1P_2 un t. t. (Att. 6.6.6.)

pic 42



Att. § 6.6.6.

~~Pareizības uzlabošana.~~



$P_0'\Pi_0' = \Pi_0'\mathcal{P}_0'$

Att. ~~?~~ 6.6.7.

Pareizības uzlabošana.

Pirmā sektora iesākumā liekuma riņķa radijs ir vienlīdzīgs $\varrho_0 = P_0P_0'$, bet beigās tas ir vienlīdzīgs $\varrho_1 = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_1' = \mathcal{P}_0\mathcal{P}_0'$. Tādeļ ir labi, ja pirmā sektora radiju pieņem $= \frac{1}{2}(\varrho_0 + \varrho_1)$ un loku $P_0P_1^*$ apraksta no centra Π_0'. (Att. 6.6.7.)

1.XII.1948 — 23h

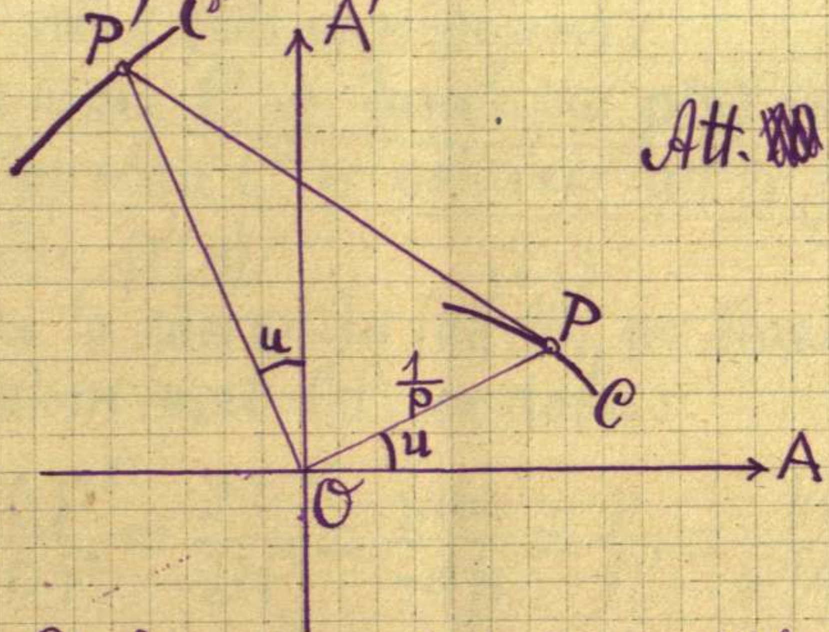
6.7.

Ortopolāru metode.

Funkciju $p(u)$ attēlosim tā, ka katram kopā saderīgo vērtību pārai u, $p(u)$ piekārtosim plaknes punktu, kam polārās koordinātas ir $1/p$, u. Tātad uz polārā stara konstruēsim funkcijas apgriezto vērtību. Punkta atstatums no pola O ir vienlīdzīgs $1/p$, polārais leņķis ir u (pozitīvs pretēji pulksteņa rādītāja gaitai). Ja p ir negatīvs, tad $1:|p|$ atliksim pretējā virzienā tam, kas atbilst $p>0$ (tātad leņķī $u+\pi$).

Ar tādu konstrukciju dabū līkni C, kuru apzīmē par funkcijas $p(u)$ polāro attēlu. Argumentam u palielinoties punkts pa polāro attēlu pārvietojas noteiktā virzienā.

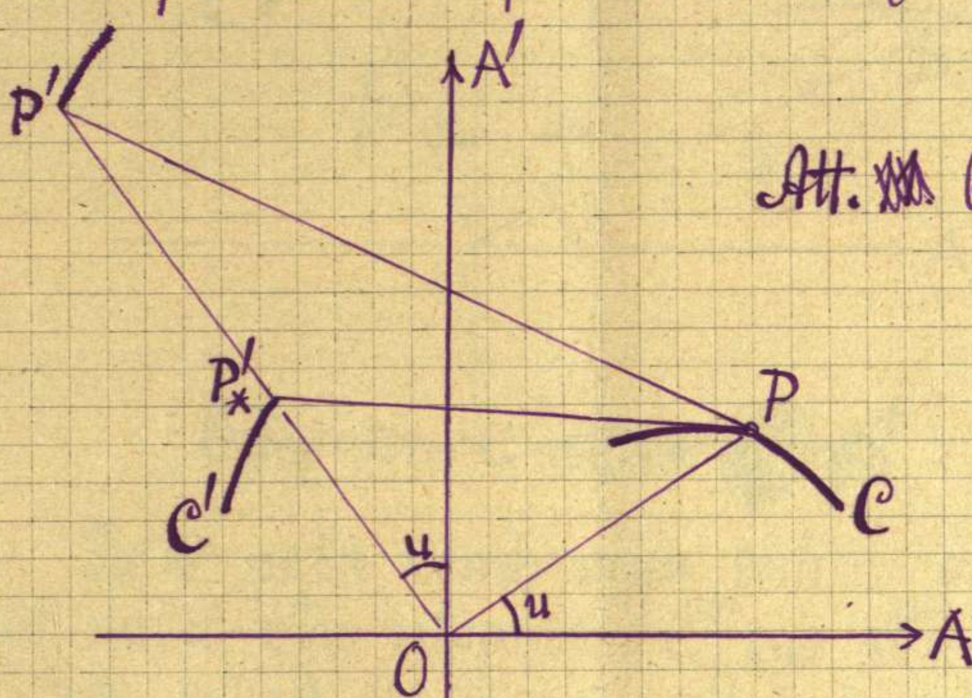
No polārā attēla C atvasināsim jaunu līkni C', ko veido attēla punktā P pievilktā pieskare krustojumā ar polāro staru $OP' \perp OP$. Līkni C' sauksim par attēla C ortopolāri. Nogriezni OP' skaitīsim par pozitīvu, ja P' ir uz stara, kas atbilst leņķim u, bet par negatīvu, ja tas ir uz stara turpinājuma pretējā virzienā. Līknei C' polārais leņķis jāskaita no polārās ass OA', kas par $\pi/2$ pagriezta pozitīvā virzienā attiecībā pret OA. Tad attēlam C un tā ortopolārei C' polārais leņķis attiecīgos punktos ir vienāds. (~~Att. XXXV~~ 6.7.1.)



Att. 6.7.1

~~C – funkcijas p(u) polārais attēls,~~
~~C' – attēla ortopolāre.~~

Ja līknei C punktā P ir saliekums (Knick), tad ortopolāre dabū pārtraukumu (att. 6.7.2.)



Att. 6.7.2

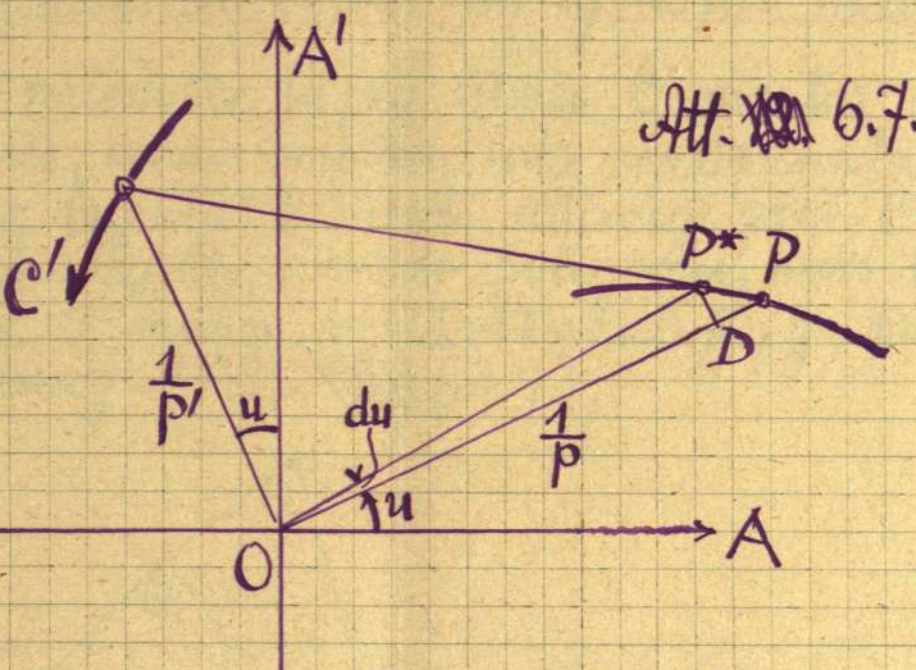
Ir spēkā šāds apgalvojums:

Ja līkne C ir funkcijas $p(u)$ polarais attels, tad ortopolāre C' ir polarais attēls funkcijas atvasinātai $p'(u)$.

Lai to pierādītu (att. ~~[illegible]~~ 6.7.3), no blakuspunkta P^* velk stateni pret OP_1 un dabū:

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{DP^*}{DP} = \frac{\frac{1}{p}du}{-d\frac{1}{p}} = \frac{p}{p'} = \frac{1/p'}{1/p} \cdots\cdots (6.7.1)$$

Tā kā $OP = 1/p$, tad $OP' = 1/p'$.



Att. ~~[illegible]~~ 6.7.3

~~Ortopolāre C' attēlo $\frac{1}{p}$ p'~~

Ja to pašu konstrukciju pielieto ortopolārei, tad dabū otro ortopolāri C'', kas attēlo otro atvasināto $p''(u)$. Vispārīgi, kādas funkcijas $p(u)$ polārā attēla n-ā ortopolāre $C^{(n)}$ ir funkcijas n-ās atvasinātas $p^{(n)}(u)$ polarais attēls.

Polarā ass $OA^{(n)}$ ir par n taisniem leņķiem pagriezta pozitīvā virzienā attiecībā pret OA.

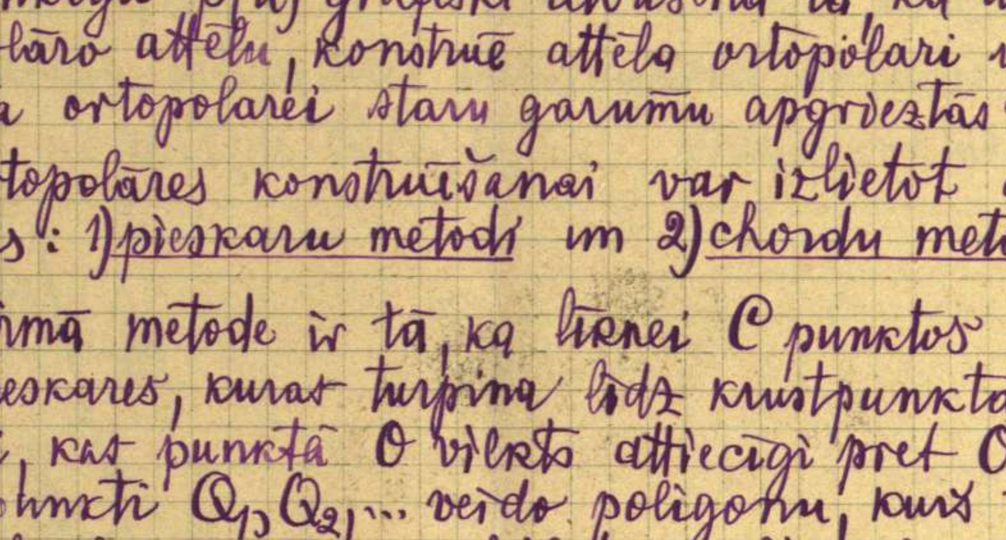
Ja kādās vietās funkcija $p(u)=0$, tad tām atbilst polārā attēlā asimptotas. Atvasinātās $p'(u)$ nulles vietām atbilst ortopolares asimptotas.

Diferencēšana un integrēšana.

Funkciju $p(u)$ grafiski atvasina tā, ka uzzīmē tās polāro attēlu, konstruē attēla ortopolari un aprēķina ortopolarei staru garumu apgrieztās vērtības.

Ortopolares konstruēšanai var izlietot divas metodes: 1) pieskaru metodi un 2) chordu metodi.

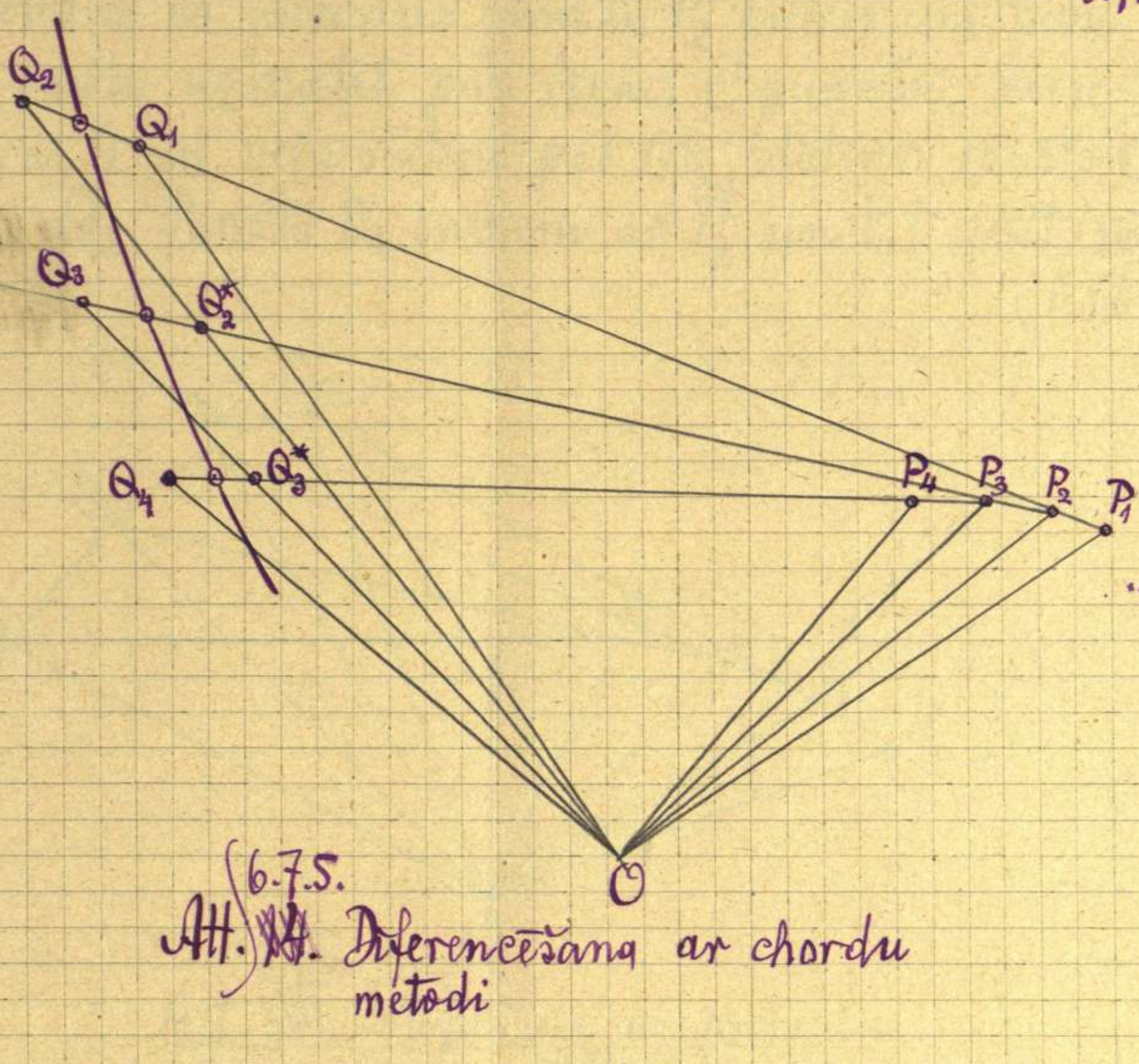
Pirmā metode ir tā, ka līknei C punktos $P_1, P_2, \dots$ velk pieskares, kuras turpina līdz krustpunktam ar stateni, kas punktā O vilkts attiecīgi pret $OP_1, OP_2, \dots$ Krustpunkti $Q_1, Q_2, \dots$ veido poligonu, kurš tuvojas ortopolarei kā savam robežstāvoklim, ja punktu skaits pieaug. (Att. ~~13~~ 6.7.4.)



6.7.4
Att. ~~13~~. Diferencēšana ar pieskaru metodi

2.XII.48

Chordu metodē izejas līkni C aizvieto ar tanī ierakstītu poligonu, tā izvairoties no pieskaru vilkšanas, kas nav katreiz precīzi izdarama. Uzdevums ar to ir novests pie ortopolāres konstruēšanas poligonam $P_1 P_2 P_3 \ldots$ Taisnam nogriežnim $P_i P_{i+1}$ atbilst uz sevis paša turpinājuma taisns nogrieznis $Q_i Q_{i+1}$. Tādā kārtā poligonam $P_1 P_2 P_3 \ldots$ atbilst lauzta līnija $Q_1 Q_2 Q_2^* Q_3 \ldots$ Lai dabūtu ortopolāres tuvinājumu savieno savā starpā nogriežņu $Q_1 Q_2$, $Q_2^* Q_3$, … viduspunktus. (Att. ~~XXI~~ 6.7.5.)

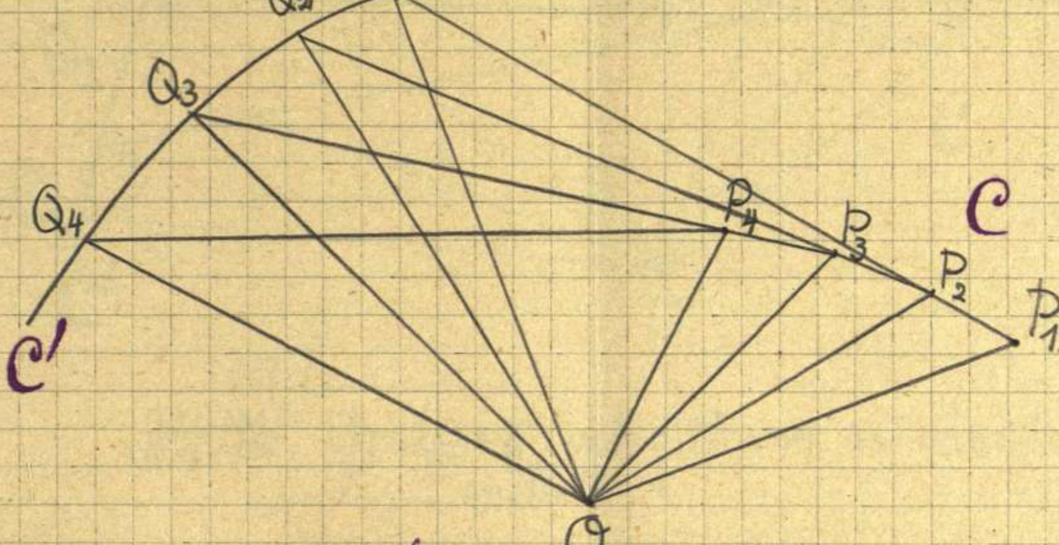


Att. ~~XX~~ 6.7.5. Diferencēšana ar chordu metodi

2. XII. 48

Viegli saprotams, ka šīs konstrukcijas ir apgriežamas. Ja ortopolāre (līkne C') ir dota, var dabūt funkcijas attēlu C. Tā kā šī darbība ir līdzvērtīga integrēšanai, tad atrisinājumu (līkņu C) ir bezgala daudz. Lai uzdevums būtu noteikts, vienam attēla punktam ir jābūt dotam ar iesākuma noteikumiem

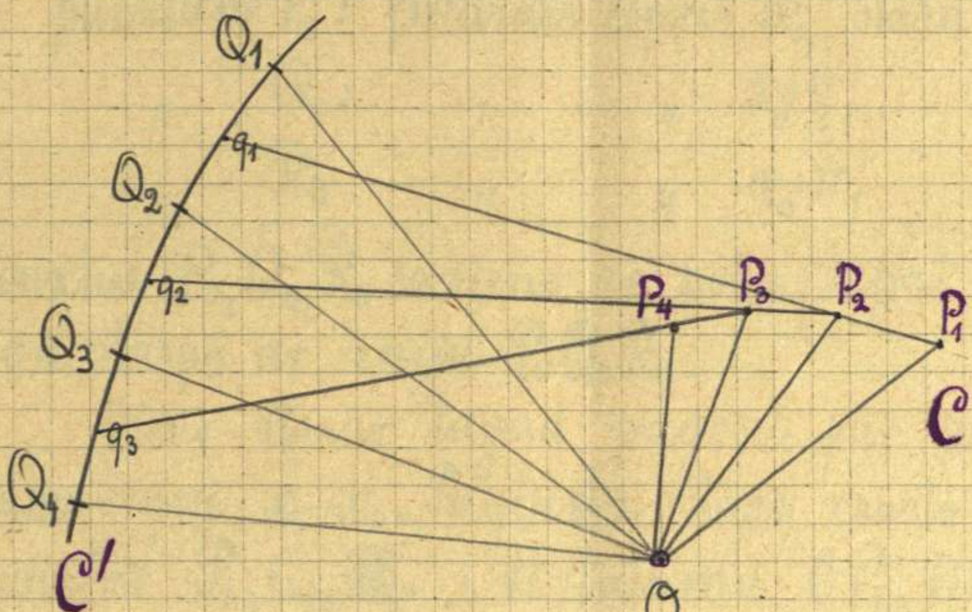
Pieņemsim, ka līkne C' ir dotā ortopolare, un tās punktam Q_1 atbilst attēla līknē C punkts P_1. Tātad $\measuredangle P_1OQ = \frac{\pi}{2}$ un taisne P_1Q_1 ir pieskare attēla punktā P_1. Ņemsim uz pieskares punktu P_2 pietiekami tuvu lai to varētu uzskatīt par līknes C punktu. Savieno P_2 ar O un velk stateni pret OP_2, statenis krusto C' punktā Q_2. Punktu Q_2 savieno ar P_2 un t.t. (Att. ~~15~~) (6.7.6



Att. ~~15~~ 6.7.6. Integrēšana ar pieskaru metodi.

Otra metode: līkni C' sadala atsevišķos gabalos Q_1Q_2, Q_2Q_3, ..., atrod gabalu viduspunktus q_1, q_2, ..., kurus savieno ar polu O un konstruē statņus pret savienojumiem OP_i. Punkts P_1 ir dots ar iesākuma noteikumiem, to savieno ar q_1 un dabū līknes C elementu P_1P_2. Punktu P_2 savieno ar q_2, dabū P_3, P_3 savieno ar q_3 un t.t. Dabū poligonu $P_1P_2P_3$..., kuram beidzot jāapraksta līkne C. (Att. ~~26~~ 6.7.7.)

Ja gadās, ka punkts q_i nav pieejams, tad konstruē bisektrisu leņķim $Q_iP_iQ_{i+1}$.



6.7.7.

Att. ~~26~~. Grafiskā integrēšana ar chordu metodi

2.XII.48

Diferencialvienadojumu integrešana.

Apskatīsim tagad, kā integrē otras kartas diferencialvienādojumu ar ortopolaru metodi. Pieņemsim, ka jāintegrē

$$y''=f(x,y,y')$$

ar iesākuma datiem: x_0, y_0, y_0'. Aprēķina

$$y_0''=f(x_0,y_0,y_0'),$$

un konstruē 3 punktus P_0, Q_0, R_0, kuru polaras koordinatas ir šadas:

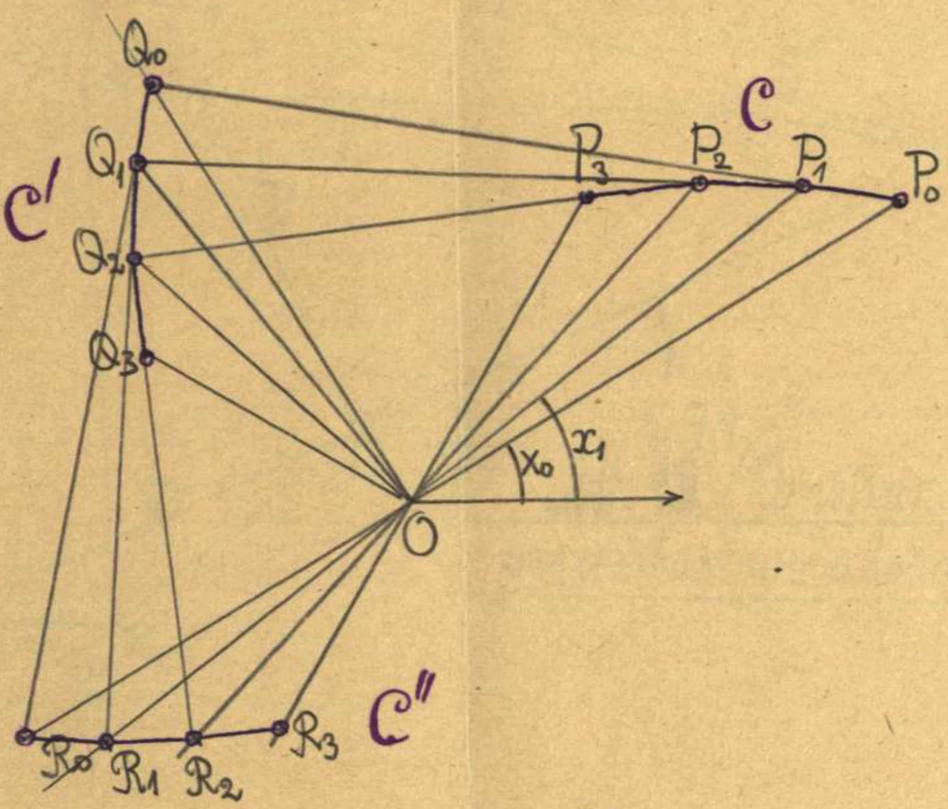
punktam P_0:	polarais	leņķis	x_0,	stara garums	$1/y_0$
" Q_0:	"	"	$x_0+\frac{\pi}{2}$,	"	$1/y_0'$
" R_0	"	"	$x_0+\pi$,	"	$1/y_0''$

Punktus P_0, Q_0, R_0 savieno ar polu, tāpat tos savieno savā starpā ar līniju $P_0Q_0R_0$.

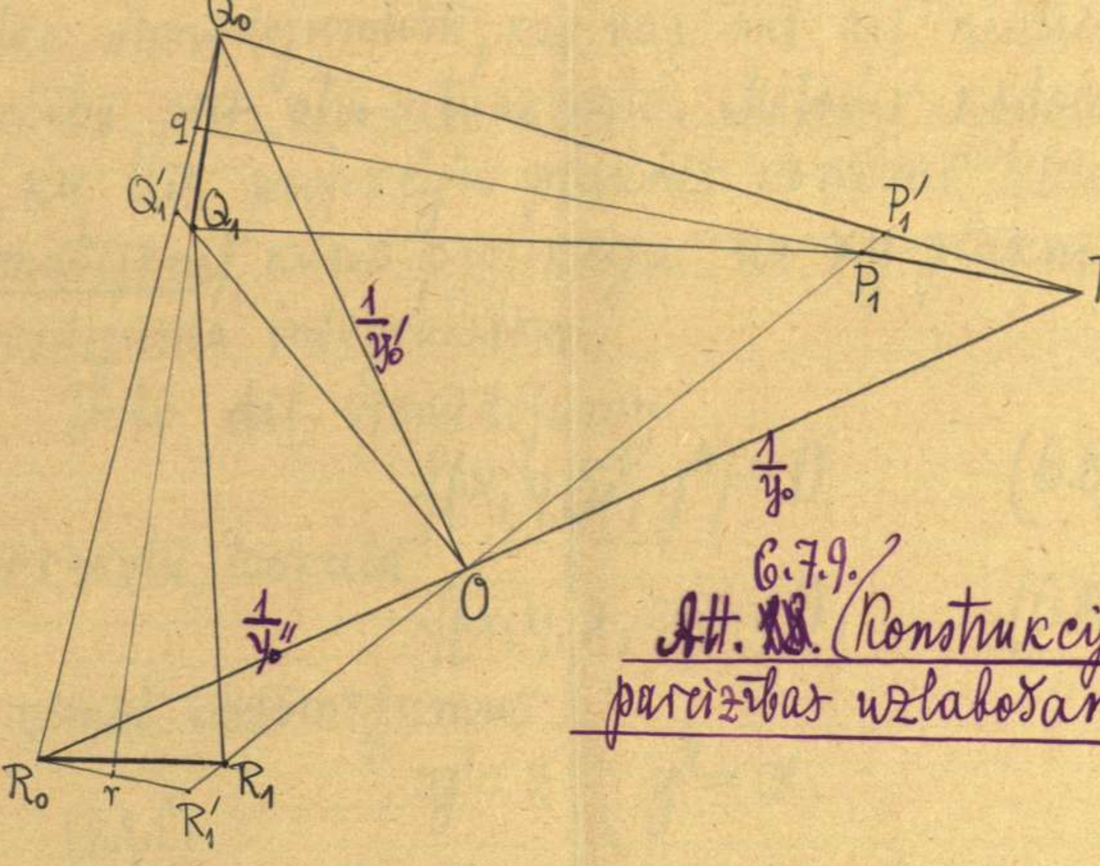
Visus starus tagad pagriež par pietiekami mazu leņķi x_1-x_0. Pagrieztie stari krusto līniju $P_0Q_0R_0$ punktos P_1, Q_1, ~~R_1~~. Atstatumu OP_1, OQ_1, ~~OR_1~~ apgrieztās vertības ir tuvīni vienlīdzigas attiecīgi y_1, y_1'. Ja tās, ~~y_1, y_1', y_1''~~ kopā ar x_1, ievieto diferencialvienadojumā, tad atrod y_1''. Apgriezto vertību $1/y_1''$ atliek uz ~~stara OR_1~~ trešā stara kā OR_1, tā ka tagad ar punktiem P_1, Q_1, R_1 varam atkārtot to pašu, kas augšā izdarīts ar P_0, Q_0, R_0.

2·XII·48

pie 51 lp.p.



Att. (6.7.8.) Otrās kārtas dif. vienādojuma integrēšana



Att. ~~16~~ 6.7.9. Konstrukcija pareizības uzlabošanai

Pareizība ievērojami uzlabojas, ja konstrukciju papildina ar to, kas parādīta att. 16. Ar y_0, y_0' un $y_0'' = f(x_0, y_0, y_0')$ konstruē $P_0Q_0R_0$. Pagriežot starus dabū punktus P_1', Q_1' un (pēc attiecīga palīgaprēķina) R_1'. Nogriežņus Q_0Q_1' un R_0R_1' izdalām uz pusēm un dalījuma punktus q un r savienojam attiecīgi ar P_0 un Q_0. Krustojumā ar pagriezt~~ām~~iem stariem dabū P_1 un Q_1; punkta R_1 stāvoklis jāaprēķina. Ar punktiem $P_1Q_1R_1$ izdara to pašu, ko izdarījām ar $R_0Q_0R_0$ u.t.t. (Att. 6.7.9.)

~~2.XI.1948 — 24h~~

3·XV·48 — pl. 20^{30}

6.8. Pobedinska metode.

Tā ir aprakstīta žurnālā „Математический Сборник" (том 35, 1928). Metode pielietojama otrās kārtas vienādojumiem, kas var būt arī neatrisināti attiecībā pret otro atvasināto. Metodes kodols ir tas, ka trīs projekciju plaknēs konstruē telpas līkni (pamatlīkni), kuras projekcija uz xy-plakni ir vienādojuma integrallīkne.

Doto dif. vienādojumu

$$f(x, y, y', y'') = 0 \qquad (6.8.1)$$

pārraksta izskatā

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad (6.8.1')$$

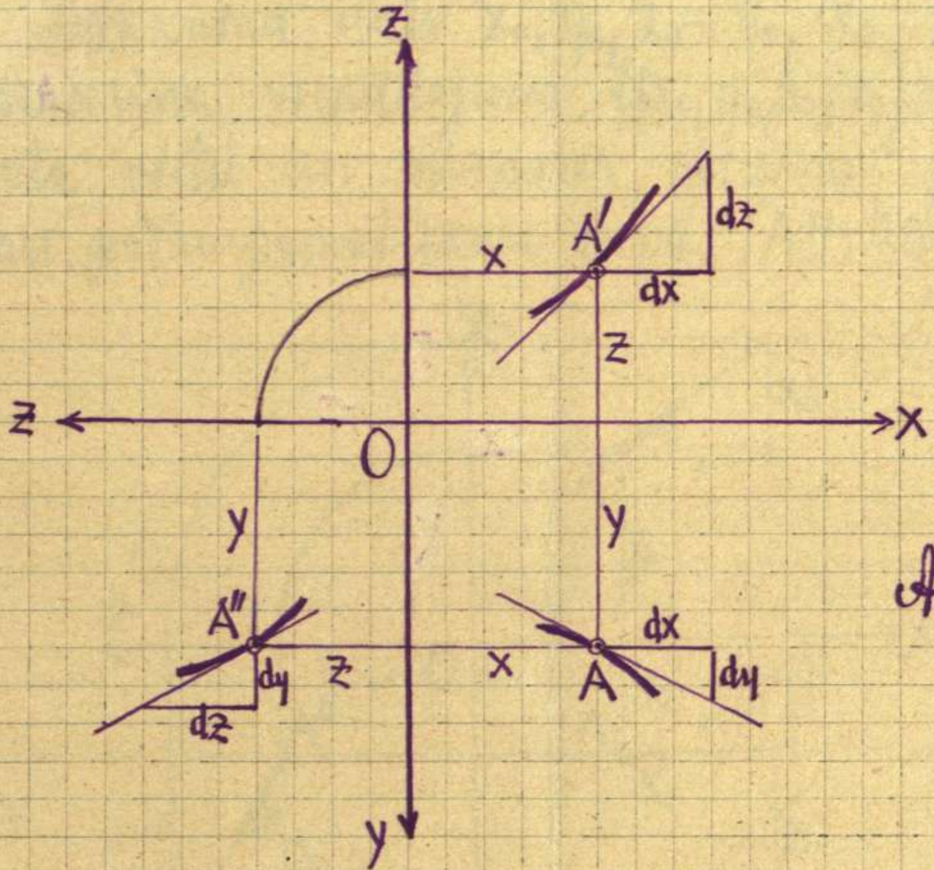
pieņemot apzīmējumus

$$y' = z, \quad y'' = \alpha.$$

(6.8.1') var uztvert kā virsmu saimes nolīdzinājumu, kur α ir saimes parametrs.

Uzdevums ir atrast vienādojuma (6.8.1) partikulāro atrisinājumu $y = y(x)$, kas apmierina dotus iesākuma noteikumus: ja $x = x_0$, tad $y = y(x_0) = y_0$ un $z = y'(x_0) = z_0$. Atrisinājums jādabū grafiski kā līkne xy-plaknē

Ja $y = y(x)$, tad arī $z (= y'(x))$ atkarājas no x, un ja no abām sakarībām izslēdz x, tad dabū sakarību starp y un z. Šīs trīs sakarības attēlosim 3 plaknēs, kuras savietosim vienā rasējumā. (Att. 6.8.1)



Att. 6.8.1.

Līkņu virziena koeficienti:

xOy plaknē ... $\frac{dy}{dx} = y'(x) = z$

xOz " ... $\frac{dz}{dx} = y''(x) = \alpha$

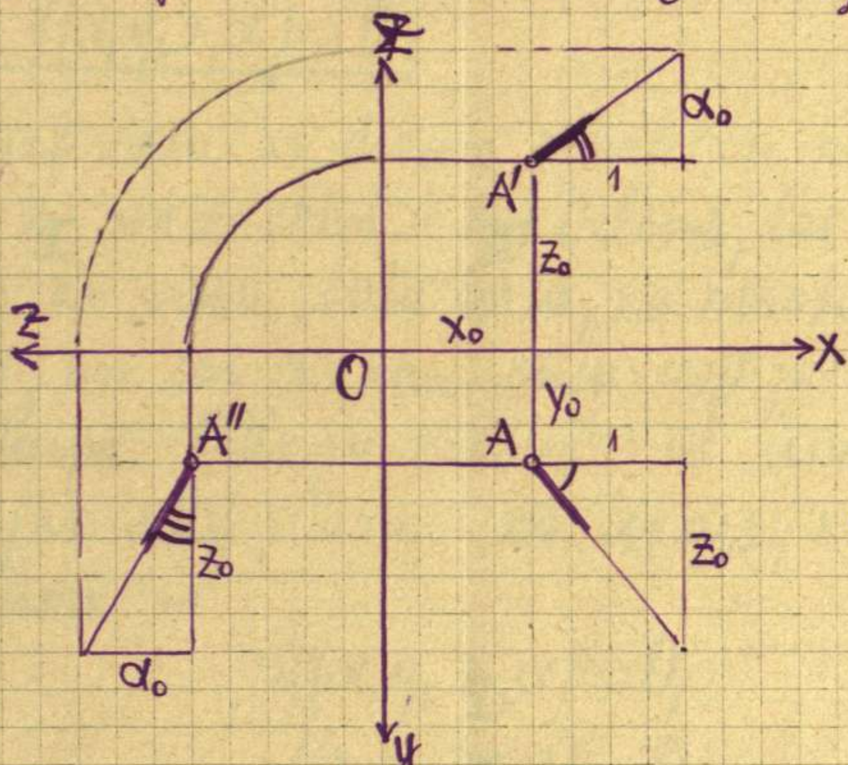
yOz " ... $\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx} : \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{z}$

Lielumiem x, y, z, α jāapmierina dotais ~~diferen ciālvienādojums: f(x,y,y'~~ vienādojums ~~XXX~~:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0.$$

Metodes īpatnība ir tā, ka konstruē šīs 3 līknes variējot parametru α. Šīs līknes attēlo trīs projekcijās kādu telpas līkni (pamatlīkni). Konstrukcijas kodols ir tas, ka meklē šīs telpas līknes krustpunktus ar dotā parametra α virsmām.

Iesākuma dati $x_0, y_0, z_0 = y_0', \alpha_0 = y_0''$, kuriem jāapmierina vienādojums $f(x_0, y_0, z_0, \alpha_0) = 0$, noteic punkta vietu un pieskares virziena projekcijām un arī pašai pamatliknei telpā. (Att. ~~20~~ 6.8.2.)



Att. ~~20~~ 6.8.2.

xOy plaknē punktā $A(x_0, y_0)$ konstruē liknes elementu, ~~at~~ kura virziena koeficients ir z_0.

xOz plaknē punktā $A'(x_0, z_0)$ konstruē liknes elementu, kura virziena koeficients ir α_0.

Tad seko yOz plaknē punktā $A''(y_0, z_0)$ liknes elements, kura virziena koeficients ir α_0/z_0.

Viena no projekcijām ir pārējo divu sekas, bet ja vienlaicīgi konstruē visas trijas, tad ir saglabāta izdevīgākā ceļa izvēle un arī kontrole darbību pareizībai.

6.8.2.

Att. 20 (konstruētais punkts (x_0, y_0, z_0) ir uz ~~līknes~~ ~~uz~~ virsas, kas atbilst parametram α_0. Šinī punktā ir ~~[illegible]~~ vilkta noteikta virziena taisne. <u>Konstruēt punktu, kur šī taisne ~~sastop~~ krusto virsu $f(x,y,z,\alpha)=0$.</u>

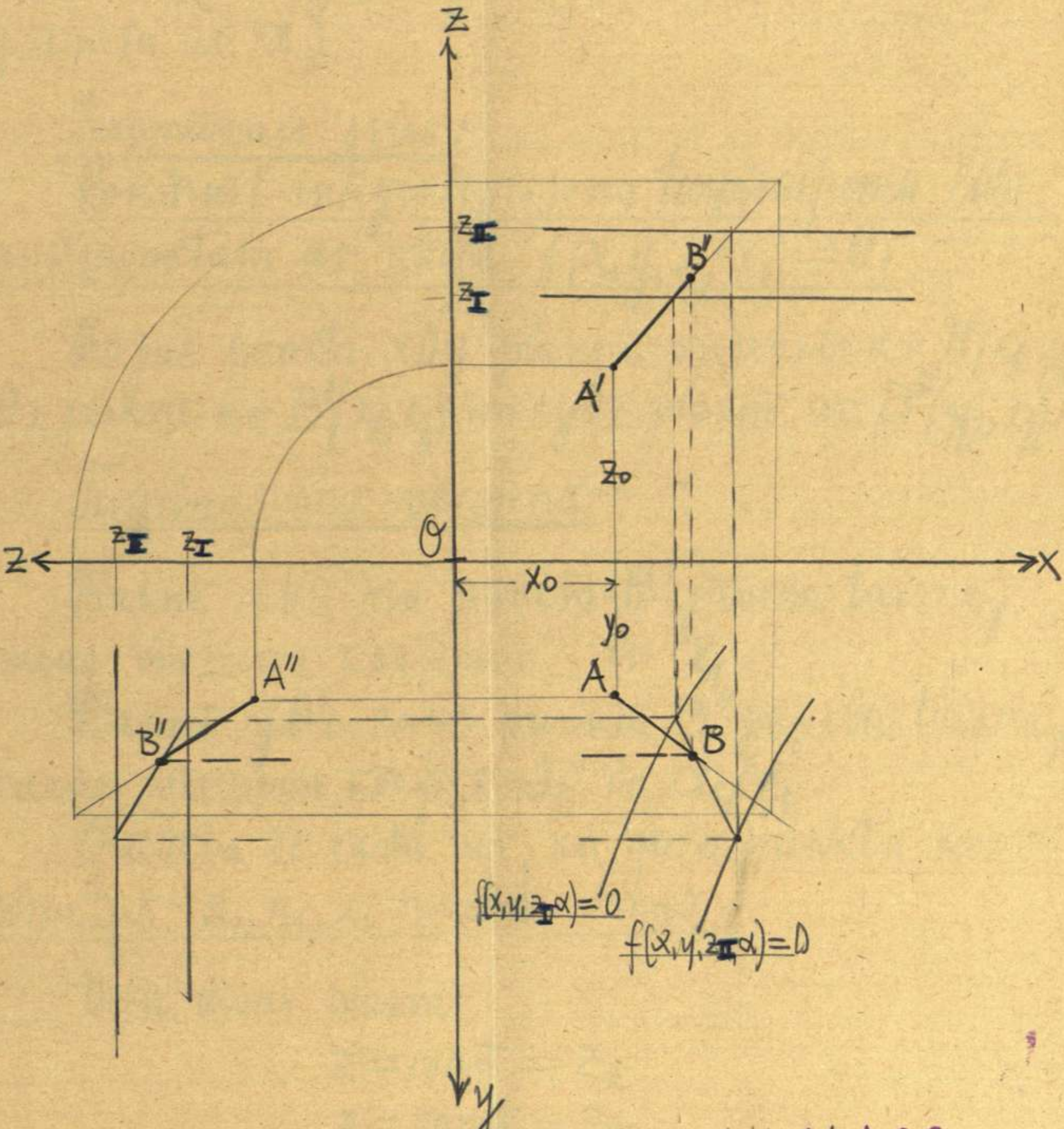
Šķel virsu ar divām paralēlām plaknēm $z=\text{const.}=z_I$ un $z=\text{const.}=z_{II}$. Vēlams, lai taisnes krustpunkts ar virsu būtu joslā, ko norobežo abas plaknes, un lai plaknes būtu iespējami tuvu savā starpā. Plakņu krustošanās līknes ar virsu projecējas xOy plaknē kā līknes, kuru nolīdzinājumi ir

$$f(x,y,z_I,\alpha)=0,$$
$$f(x,y,z_{II},\alpha)=0.$$

Vilksim caur doto taisni projecējošu plakni, kas paralēla Oy asij (stateniska pret xOz plakni). Vēlama šīs plaknes krustošanās līkne ar virsu $f(x,y,z,\alpha)=0$. Var konstruēt divus punktus, kuros virsu krusto taisnes, kas kopīgas divām paralēlām ~~virsām~~ un slīpai projecējošai plaknei. Uz šo punktu savienojuma jābūt meklējamam punktam, kur iesākuma punktā konstruētā integrāllīknes elementa turpinājums ~~sastop~~ krusto virsu $f(x,y,z,\alpha)=0$.

3.XII.48 — 23h40m

pie 5/6.



Att. ~~XX~~ 6.8.3.

Virsmu parametram α dod vērtības $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ Nogrieznis AB (att. 83) atbilst pārejai no $\alpha = \alpha_0$ līdz $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1)$. (Pēdējā vērtība īsuma labā ir apzīmēta ar α.)

Turpmākais solis:
Konstruēt integralpoligona turpinājumu līdz krustpunktam ar virsu $f(x, y, z, \alpha_1) = 0$.

Izejas punkts xOy plaknē projecēts ar $B(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}})$, xOz plaknē ar $B'(x_{\frac{1}{2}}, z_{\frac{1}{2}})$ un yOz plaknē ar $B''(y_{\frac{1}{2}}, z_{\frac{1}{2}})$.

Turpinājuma virziens.

Plaknē xOz no punkta B' jāvelk taisne, kuras virziena koeficients ir α_1.

Plaknē yOz caur punktu B'' jāvelk taisne, kuras virziena koeficients ir α_1/z_1.

Grūtību še rada tas, ka gala punkta koordinatas x_1, y_1, z_1 nav zināmas

Velk divas plaknes

$$z = \text{const.} = z_{II}$$
$$z = \text{const.} = z_{III}$$

un meklē projekcijas xOy plaknē līknēm, ko minētās plaknes veido ar virsu $f(x, y, z, \alpha_1) = 0$. Punktam (x_1, y_1, z_1) vajaga atrasties joslā starp abām plaknēm. Ja tas tā nebūtu jāmaina plaknes ~~attālumi~~

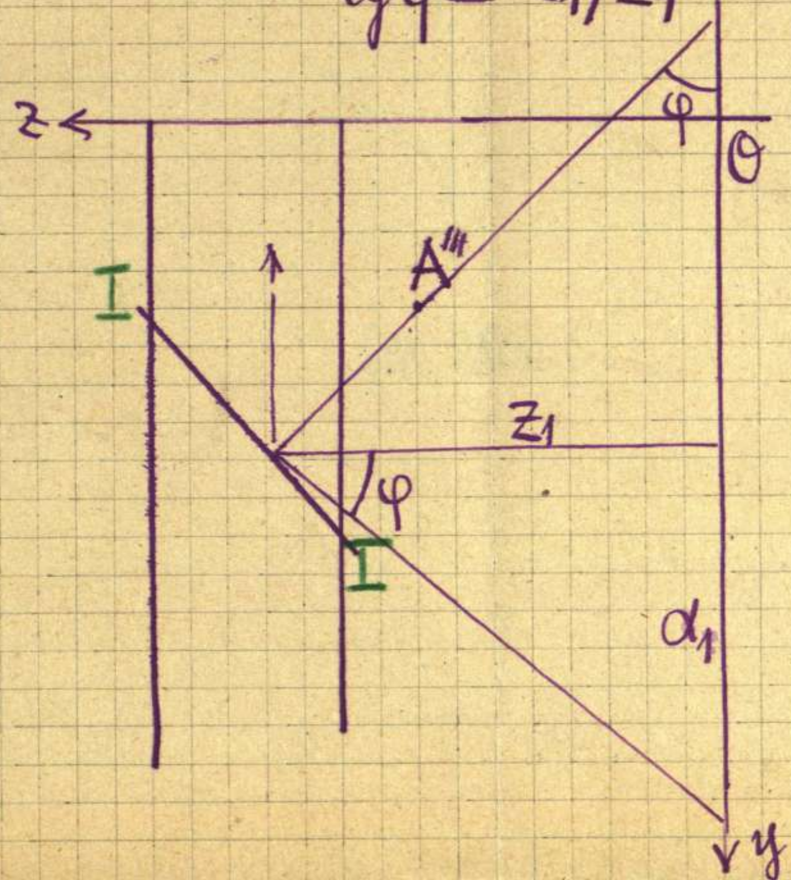
Ar šiem datiem var konstruēt geometrisko vietu, kur gala punktam jāatrodas yOz plaknē. Šī geometriskā vieta īstenībā ir līkne, bet līkni var aizvietot ar taisni, ja plaknes Z_{II} un Z_{III} ir pietiekami tuvu.

Virziena konstrukcija yOz plaknē noved pie šāda <u>geometriska uzdevuma</u>:

<u>Caur dotu punktu A''' jāvirza taisna lenķa mala tā, ka virsotne ir uz dotas taisnes II un otrai malai no virsotnes līdz krustpunktam ar Oy projekcija uz šo asi ~~būtu~~ ir vienlīdzīga α_1</u>

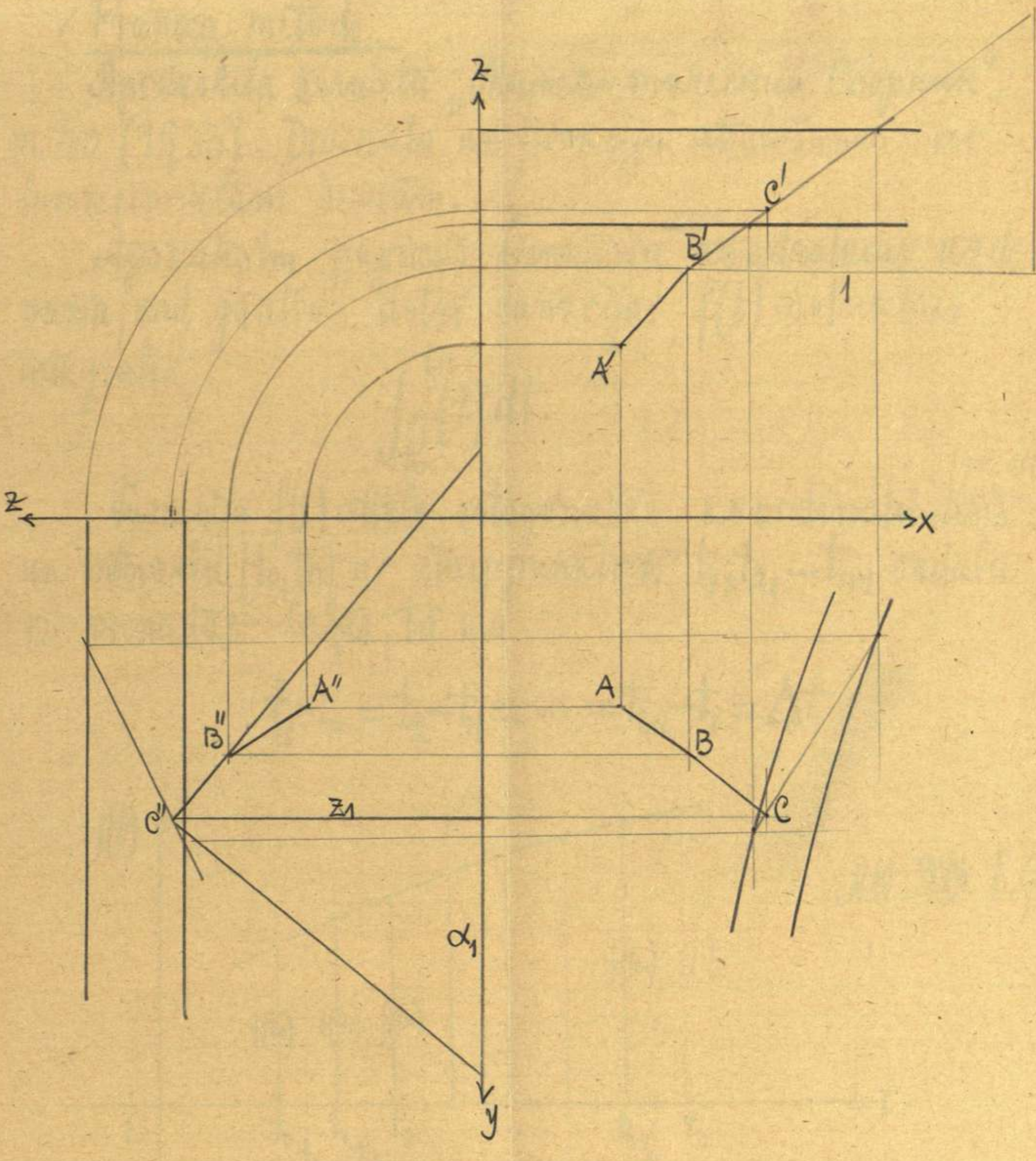
Tad ir skaidrs, ka caur punktu A''' vilktai taisnei (pirmai malai) virziena koeficients

$$tg\varphi = \alpha_1 / z_1$$



6.8.4.
Att. ~~[illegible]~~.

pie 58



Att. 6.8.5.

6.9.

Franka metode.

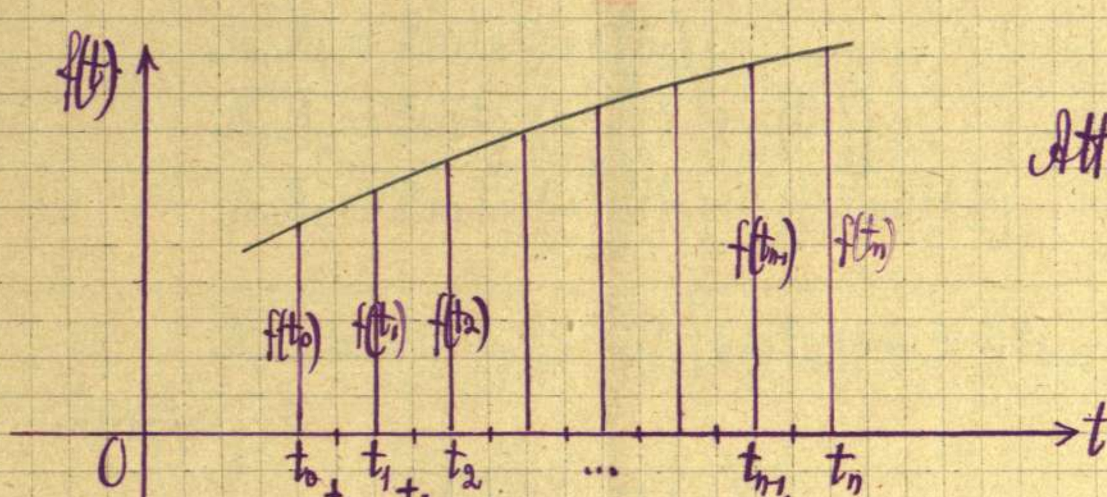
Aprakstīta žurnālā „Математический Сборник", т. 40 (1933). Dibināta uz funkciju attēlošanas ar funkcionālām skalām.

Apskatīsim papriekš vienkāršu kvadratūras uzdevumu, kad jāatrod dotai funkcijai $f(t)$ noteiktais integrālis

$$\int_{t_0}^{t_n} f(t)\,dt.$$

Funkciju $f(t)$ attēlo ortogonālās koordinatu asīs (sk. att. 6.9.1) un intervalu (t_0, t_n) ar starppunktiem $t_1, t_2, \dots t_{n-1}$ sadala n vienādās daļās, tā ka

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_{i+1} - t_i = \Delta t$$



Att. 6.9.1

Tad seko:

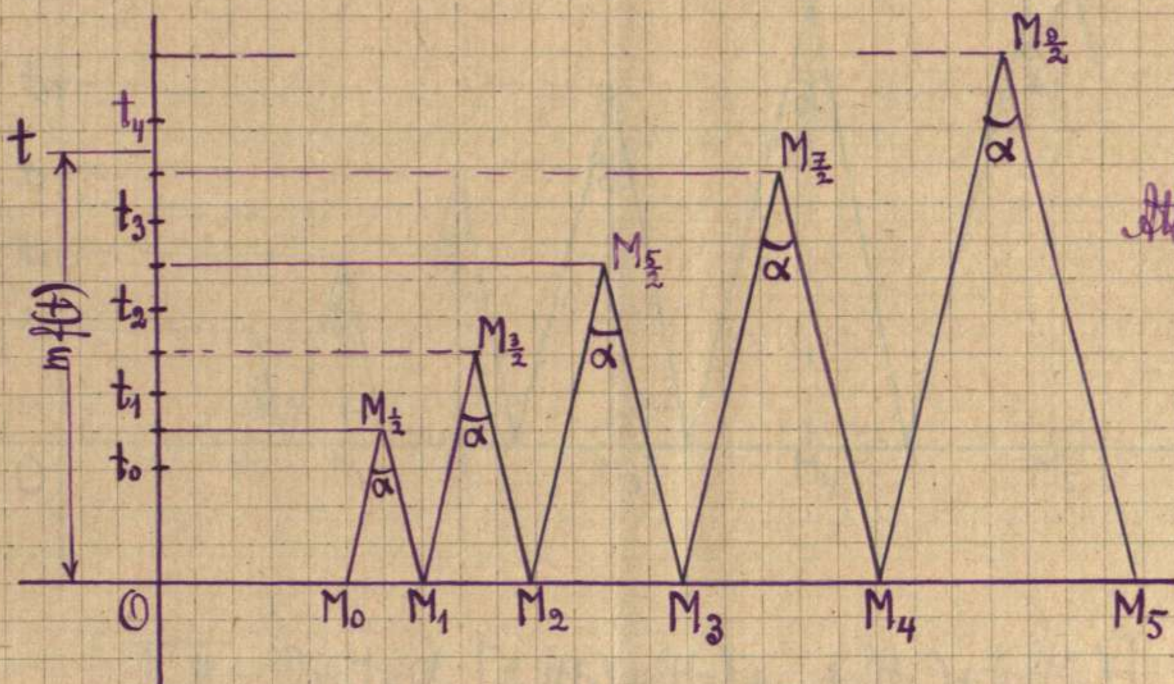
$$\int_{t_0}^{t_n} f(t)\,dt = \left[f(t_{\frac{1}{2}}) + f(t_{\frac{3}{2}}) + \dots + f(t_{n-\frac{1}{2}})\right]\Delta t$$

vidējo taisnstūru formula

$$\int_{t_0}^{t_n} f(t)\,dt = \left[\frac{1}{2}f(t_0) + f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_{n-1}) + \frac{1}{2}f(t_n)\right]\Delta t$$

trapeču formulu

Attēlosim formulās ietvertās funkcijas vērtības ar skalu. Skalas moduli (milimetros izteiktu nogriezni, kas attēlo vienību) apzīmēsim ar m. (Att. 6.9.2.)



Att. 6.9.2

No tā seko:

$$\overline{M_0M_1} = 2m\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot f(t_{\frac{1}{2}}),$$

$$\overline{M_0M_2} = 2m\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot \left[f(t_{\frac{1}{2}}) + f(t_{\frac{3}{2}})\right],$$

$$\overline{M_0M_3} = 2m\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot \left[f(t_{\frac{1}{2}}) + f(t_{\frac{3}{2}}) + f(t_{\frac{5}{2}})\right]$$

$$\overline{M_0M_n} = 2m\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot \left[f(t_{\frac{1}{2}}) + f(t_{\frac{3}{2}}) + \dots + f(t_{n-\frac{1}{2}})\right]$$

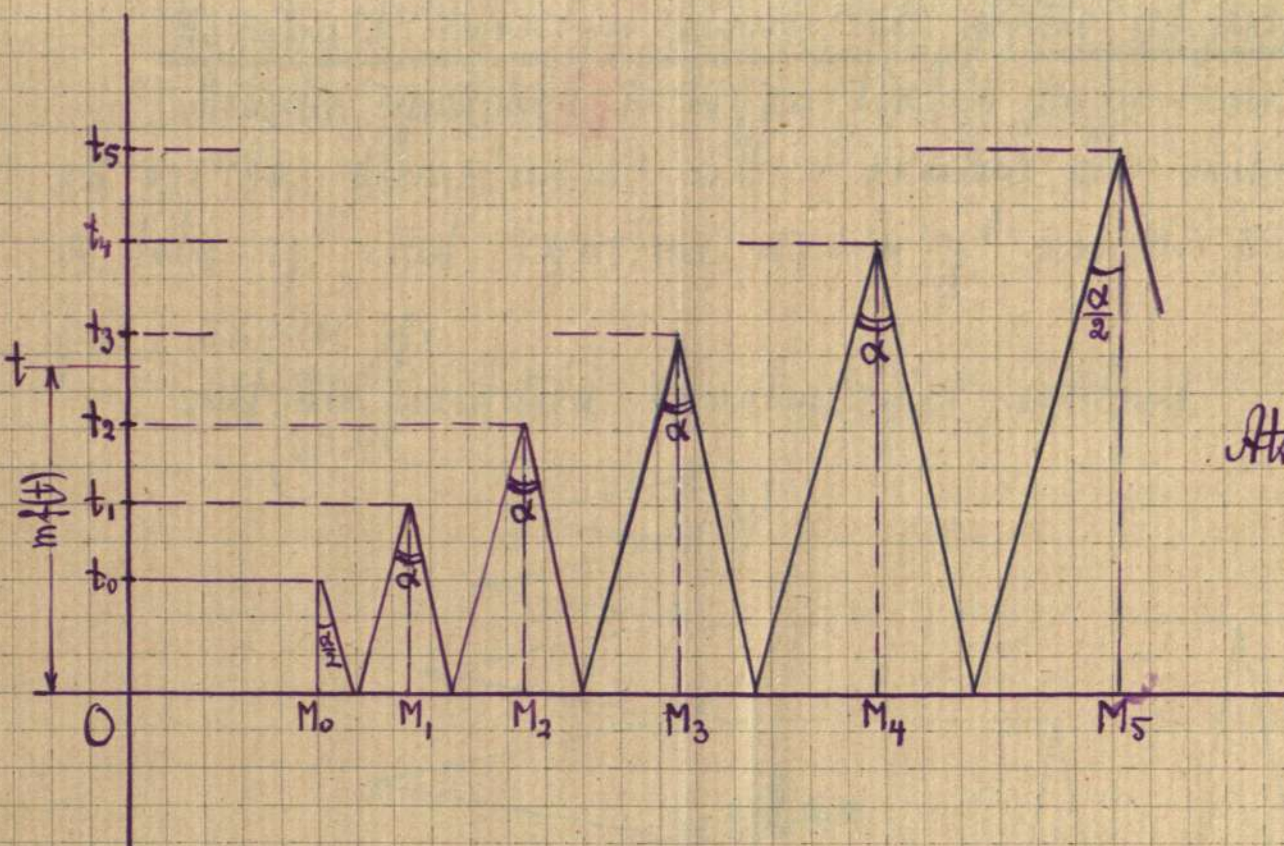
Apzīmējot

$$2m\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = l\Delta t$$

$$\overline{M_0M_n} = l\left[f(t_{\frac{1}{2}}) + f(t_{\frac{3}{2}}) + \dots + f(t_{n-\frac{1}{2}})\right]\Delta t = l\int_{t_0}^{t_n} f(t)\,dt.$$

(vidējo taisnstūru metode)

Zāģa veidīgā konstrukcija tātad realizē integrēšanu un integrāļa ~~vē~~ vērtība ir izteikta ar skālu. To pašu realizē otra konstrukcija, kas parādīta att. 6.9.3.



Att. 6.9.3

$$\overline{M_0M_n} = 2m\,tg\frac{\alpha}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}f(t_0)+f(t_1)+\dots+f(t_{n-1})+\frac{1}{2}f(t_n)\right]$$

$$\underline{2m\,tg\frac{\alpha}{2} = l\Delta t}$$

$$\underline{\overline{M_0M_n} = l\left[\frac{1}{2}f(t_0)+f(t_1)+\dots+f(t_{n-1})+\frac{1}{2}f(t_n)\right]\Delta t =}$$

$$\underline{= l\int_{t_0}^{t_n} f(t)\,dt.}$$ (Trapezu formula).

~~4.XI.—23^h50^m~~

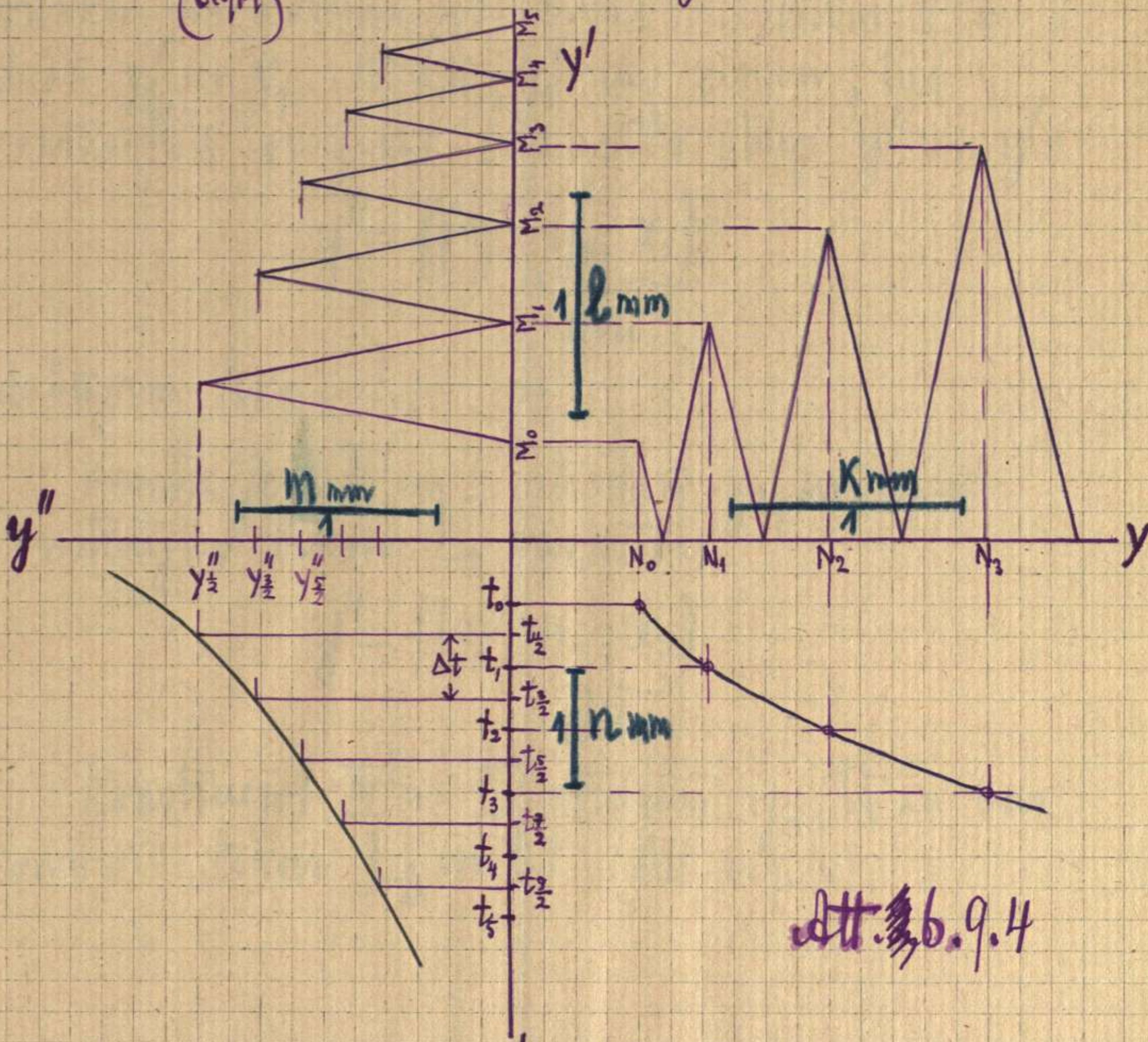
Ja $tg\frac{\alpha}{2}=0,1$ un $\Delta t=0,2$, tad $\underline{l=m}$, t.i. integrafa skalai ir tāds pat modulis, ka funkcijas skalai. Ja $tg\frac{\alpha}{2}=0,1$ un arī $\Delta t=0,1$, tad $\underline{l=2m}$.

5·XII·48–14h40

Konstruēt funkciju zinot tās ~~pirmo~~ otro atvasināto.

Metodes īpatnība ir tā, ka tiklab pašu funkciju, kā arī tās atvasinātās attēlo skalās. Ja mums ir dota y'', tad konstruē skalu y' un no pēdējās – skalu y.

Att. (6.9.4) parādīta konstrukcijas schema.



Att. 6.9.4

Moduļi: $$\left.\begin{aligned} l &= 2m\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} : \Delta t = \lambda m \\ k &= 2l\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} : \Delta t = \lambda^2 m \end{aligned}\right\}\quad \left(\lambda = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\Delta t}\right)$$

Integret otras kārtas diferenciālvienādojumu:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right)$$

ar sākuma noteikumiem: x_0, y_0, y_0'. Ievietojot šīs vērtības dif. vienādojumā dabū y_0''.

Ar to ir noteikti konstrukcijas sākuma punkti un konstruējot divus tiņstūrus I' un I dabū $y_{\frac{1}{2}}'$ un y_1. Tā kā y_1' nav zināms, tad konstruējam grafiski sakarību starp y'' un y':

$$y'' = f(y', \underbrace{y_1, x_1}_{\text{doti}})$$

dabūjam līkni L_1.

Konstruējot II' un II atrodam y_2, un ~~atrast~~ konstruējam līkni L_2 sakarībai

$$y'' = f(y', \underbrace{y_2, x_2}_{\text{doti}})$$

Konstruējot III' un III atrodam y_3, tā ka var konstruēt līkni L_3 un t. t. (Att. 6. 9. 4.)

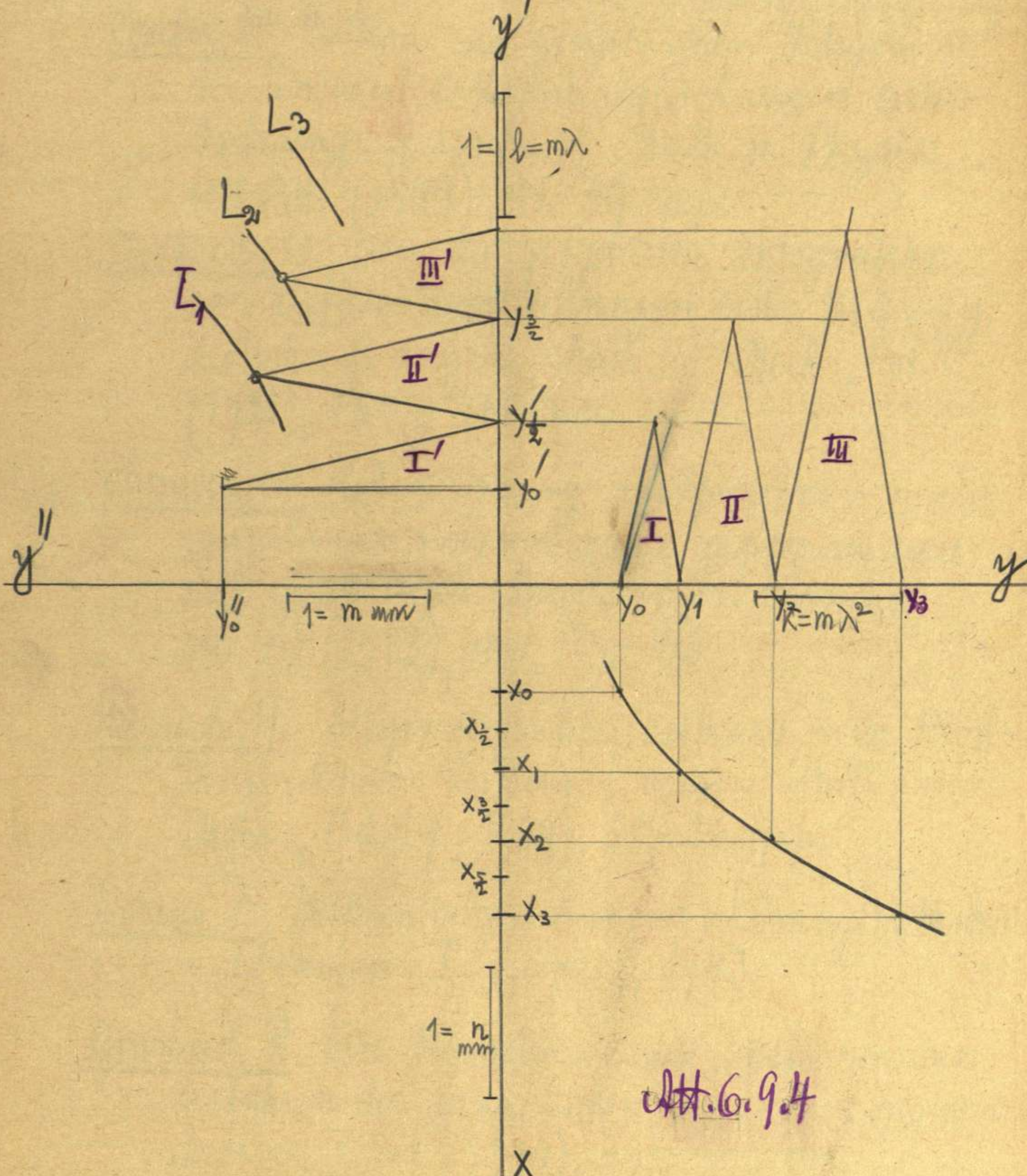

y'
1= l=mλ
L3
L2
L1
III'
II'
I'
y'3/2
y'1/2
y'0
y''
y''0
1= m mm
y
y0
y1
y2
y3
l=mλ²
I
II
III
x0
x1/2
x1
x3/2
x2
x5/2
x3
1= n mm
X

Abb. 6.9.4

Literatura

Czuber, E. Beitrag zur graphischen Integration der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Zeitschr. f. Math. u. Physik, 44. Bd. (1899), 41.–49. lp.p.

Doetsch, G. Über die graphische Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 1 (1921), 464.–466. lp.p.

Франк, М. Новый метод графического интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Математич. Сборник, т. 40 (1933), стр. 129.–143.

Heinrich, H. Allgemeines über Leitkurven in Richtungsfeldern. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 19 (1939), 55.–56. lp.p.

Kamke, E. Differentialgleichungen. Lösungsmethoden u. Lösungen. I. Leipzig, 1943.

Grammel, R. Ein Gegenstück zum Meissnerschen Verfahren der graphischen Analysis. Ingenieur-Archiv, X Bd. (1939), 395.–411. lp.p.

Meissner, E. Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion. Schweizerische Bauzeitung, Bd. 98 (1931.)

Mehmke, R. Leitfaden zum graphischen Rechnen. Leipzig u. Berlin, 1917.

Neuendorf, R. Zeichnerische Lösung von gewöhnlichen Diferentialgleichungen erster Ordnung in Polarkoordinaten. Zeitschr. für angew. Math. u. Mechanik, Bd. 2 (1922), 131.–136. lp.p. Sk. arī: Bd. 3 (1923), 34.–36. lp.p.

Runge, C. Graphische Methoden. Leipzig u. Berlin, 1915.

Schreiber, P. Über die Verwendbarkeit der Logarithmenpapiere bei der Integration der Differentialgleichungen. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 2 (1922), 200.–207. lp.p.

Willers, Fr. A. Methoden der praktischen Analysis. Berlin u. Leipz., 1928.

Willers, Fr. A. Graphische Integration. Berlin u. Leipz., 1920. („Samml. Göschen", № 801).

Побединский, Б. Г. Графическое интегрирование дифференциальн. уравнений второго порядка. Математич. Сборник, т. 35 (1928), стр. 87.–103.