Latvijas Universitāte
Fizikas un matemātikas fakultāte
Vispārīgās matemātikas katedra

J.Gavrikovs

Rezidiju lietojumi uzdevumos ar polinomiem un racionālām funkcijām.

Diplomdarbs.

Darba vadītājs –
prof. T.Cīrulis

Rīga 2006

Anotācija.

Šajā diplomdarbā ir aplūkoti rezidiju teorijas nozīmīgākie lietojumi. Darba sākumā, uzziņas materiāla veidā, ir apkopoti nepieciešamie teorētiskie jautājumi – svarīgāko jēdzienu definīcijas un īpašības, kā arī galvenās teorēmas. Aplūkoti rezidiju lietojumi integrāļu atrašanai racionālām funkcijām un to reizinājumam ar vienkāršākajām trigonometriskajām funkcijām sin un cos. Īsi iepazīstināts arī ar rezidiju lietojumiem rindu summēšanā.

Sevišķa uzmanība veltīta atsevišķu kombinatoro summu atrašanai ar rezidiju palīdzību. Visi rezidiju teorijas pielietojumi tiek ilustrēti ar pilnībā atrisinātiem piemēriem.

Nobeigumā ir pieminēti šajā darbā tuvāk neaplūkotie rezidiju teorijas lietojumi, kā arī virzieni, kuros iespējams turpināt pētījumus.

АННОТАЦИЯ.

В этой дипломной работе рассмотрены важнейшие употребления теории резидий. Сначала в виде материальной справки обобщены необходимые теоретические вопросы – дефиниции и свойства понятий, а также основные теоремы. Рассмотрено использование резидий в поисках интегралов рациональных функций и их произведений с простейшими тригонометрическими функциями sin и cos. Дана краткая характеристика использования резидий в суммировании рядов.

Особое внимание посвящено поискам отдельных комбинаторских сумм с помощью резидий. Все употребления резидской теории иллюстрированы полностью решенными примерами.

В окончании упомянуты детально не рассмотренные в этой работе употребления теории резидий, а также направления, в которых возможно произвести исследования.

Anotation.

The present Diploma Paper deals with the most important ways of usage of residiues theory. The first part contains the summarizing of the essential theoretical questions, definitions and characteristics of some important concepts as well as main theorems. The present research examines the usage of residiues theory for finding integral in rational function and multiplication it by simple trigonometrical functions sin and cos. The work, in a short ways, introduces the usage of residiues theory in rows addition.

The research pays attention to finding of combination sums with the help of residiues. All usage of residiues theory is illustrated with the examples which are competely solved.

In the last part some usage of residiues theory which are not researched the present work and trends to further researches are mentioned.

Saturs.

Ievads.

Šis diplomdarbs iepazīstina ar rezidiju teoriju, tās nozīmīgākajiem lietojumiem integrāļu, rindu parciālsummu vai summu, kā arī atsevišķu kombinatoro summu atrašanā.

Skaitliski integrējot ar datoru, mēs nereti praksē sastopamies ar integrāļiem, kuri ir atkarīgi no viena vai pat vairākiem parametriem. Šādiem integrāļiem skaitliskā integrēšana ir grūti pielietojama. Tāpat arī stipri oscilējošas zemintegrāļa funkcijas gadījumā, integrāļa tuvināta atrašana ar skaitliskām metodēm var būt problemātiska, jo mazas zemintegrāļa funkcijas vērtību izmaiņas var novest pie lielām integrāļa vērtības izmaiņām. Tieši šo iemeslu dēļ, šajā darbā aplūkoti piemēri, kuros integrāļi ir atkarīgi no parametriem, vai arī zemintegrāļa funkcijas ir stipri oscilējošas. Šajos gadījumos būtiska nozīme ir integrāļu atrašanai analītiskā formā. To, kā pārliecināsimies, var pietiekami efektīvi veikt, izmantojot rezidiju teoriju, kas salīdzinot ar reālās matemātiskās analīzes metodēm, ievērojami paplašina iespējas atrast analītiskā formā daudzus integrāļus, īpaši neīstos.

Diplomdarbs sastāv no ievada, četrām nodaļām un nobeiguma. Pirmajā nodaļā, lasītāja ērtības labad, ir apkopotas svarīgāko jēdzienu definīcijas un īpašības, kā arī formulētas galvenās teorēmas. Ar teorēmu pierādījumiem lasītājs var iepazīties grāmatā [2].

Otrā nodaļa veltīta rezidiju lietojumiem integrāļu atrašanai racionālām funkcijām $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $R(x)\cos\alpha x$, $R(x)\sin\alpha x$ dažādos intervālos $[a,b]$.

Trešajā nodaļā tiek sniegts īss ieskats rindu parciālsummu un summu aprēķināšanā, izmantojot rezidijus.

Sevišķu vērību vēlētos pievērst ceturtajai nodaļai. Tajā ir apūkoti dažu kombinatoro summu piemēri, kuru pierādījumos būtiski izmanto rezidiju teoriju.

Darbā bez speciālām atsaucēm un norādījumiem izmantoti reālo un komplekso skaitļu kopu teorijas jēdzieni, reālā un kompleksā mainīgā funkciju teorijas elementi – robeža, nepārtrauktība, atvasinājums, integrālis un citi. Apgabali un komplekso skaitļu kopas apzīmētas ar lielajiem burtiem. Ja šīs kopas ir noteiktas ar nevienādībām vai vienādojumiem, tad kopu standartapzīmējuma vietā lietots vienkāršots pieraksts, norādot figūriekavās kopu raksturojošās nevienādības vai vienādības. Tā, piemēram, pieraksts $D = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ nozīmē, ka runa ir par pusriņķi D, kuru nosaka nevienādības $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$. Kompleksās plaknes bezgalīgi tālais punkts jeb neīstais elements apzīmēts ar simbolu ∞, reālie neīstie elementi – attiecīgi ar simboliem $-\infty$ un $+\infty$.

Definīcijām, teorēmām un zīmējumiem ir divkārša numerācija: pirmais cipars norāda nodaļas numuru, otrais – kārtas numuru nodaļas ietvaros. Piemēri ir numurēti ar vienu ciparu – kārtas numuru atsevišķi katrā nodaļā.

1. Rezidija jēdziens, tā aprēķināšana un īpašības.

Kā zināms, lai atrastu noteiktā integrāļa precīzu vērtību (kas ir skaitlis, bet ne funkcija), mēs pamatā lietojam Ņūtona - Leibnica formulu

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (1.1)$$

Pēc šīs formulas noteikto integrāli aprēķinam no zemintegrāļa primitīvās funkcijas punktā b atņemot zemintegrāļa primitīvās funkcijas vērtību punktā a. Lai to izdarītu, mums ir jāatrod funkcijas f primitīvā funkcija F jeb nenoteiktais integrālis, kas vispārīgajā gadījumā ir sarežģīts uzdevums.

Ņūtona - Leibnica formulas viena no svarīgākajam īpašībām ir tāda, ka noteikto integrāli kā globālu funkcijas īpašību (tas atkarīgs no visam $f(x)$ vērtībām intervālā $x \in [a,b]$) atrod ar $F(x)$ palīdzību punktos $x = a$ un $x = b$, jeb izsaka ar $F(x)$ lokālajam īpašībām.

Vai bez Ņūtona - Leibnica formulas eksistē arī vēl citas metodes, ar kurām noteikto integrāli ka funkcijas globālu jēdzienu izsaka ar kādas citas funkcijas lokālajām īpašībām? Pozitīvu atbildi uz šo jautājumu atsevišķu integrāļu veidiem dod rezidiju teorija.

Rezidija definīcija.

Definīcija 1.1

Pieņemsim, ka funkcija f ir analītiska vienkārtsakarīgā apgabalā D, izņemot varbūt vienvērtīga rakstura singulāru punktu $z_0 \in D, z_0 \neq \infty$. Tad integrāli $\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz$, kur $L \subset D$ un aptver punktu z_0, sauc par funkcijas f rezidiju punktā z_0 un apzīmē šādi: $\mathrm{Res}[f(z);z_0]$, $\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}} f(z)$ vai $\mathrm{Res} f(z_0)$.

Tātad $$\operatorname{Res}\left[f(z); z_0\right] = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)dz. \qquad (1.2)$$

Definīcija 1.2

Ja $z_0 = \infty$ ir vienvērtīga rakstura singulārs punkts, tad rezidiju šajā punkta definē ar formulu:

$$\operatorname{Res}\left[f(z); \infty\right] = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z)dz, \qquad (1.3)$$

kur R ir pietiekami liels pozitīvs skaitlis, t.i., tik liels, lai apgabalā $|z| > R$ izņemot ∞ nebūtu citu funkcijas f singulāro punktu.

Rezidija definīcijai ir noteikta jēga tikai vienvērtīga rakstura singulārajos punktos (šādos punktos kontūrintegrāļa vērtība nav atkarīga arī no integrācijas sākumpunkta uz līnijas L), tādēļ aplūkosim tos tuvāk.

Singulārie punkti.

Definīcija 1.3

Punktu z_0 sauc par funkcijas f singulāro punktu, ja funkciju f nevar turpināt caur šo punktu z_0 vismaz pa vienu staru l. Praksē visbiežāk funkcijai f ir tikai izolēti singulārie punkti.

Definīcija 1.4

Punktu z_0 sauc par funkcijas f izolētu singulāro punktu, ja eksistē tāda šī punkta gredzenveida apkārtne, kurā nav citu funkcijas f singulāro punktu. Piemēram, funkcijām $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{\sin z}$, $\sqrt[3]{z}$ punkts $z_0 = 0$ ir izolēts singulārais punkts, bet funkcijām $tg\frac{1}{z}$, $ctg\frac{1}{z}$ punkts $z_0 = 0$ nav izolēts singulārais punkts, jo tā jebkurā apkārtnē atrodas citi singulārie punkti.

Izolētus singulāros punktus iedala:

1) vienvērtīga rakstura singulārajos punktos,

2) sazarojuma punktos.

Rezidiju sazarojuma punktiem nedefinē, jo integrālis pa slēgtu kontūru, kas ietver sazarojuma punktu, nav noteikts: tas ir atkarīgs arī no tā, kāds ir integrācijas sākuma un galapunkts.

Definīcija 1.5

Par vienvērtīga rakstura singulārajiem punktiem sauc punktus, kuriem jebkurā pietiekami mazā apkārtnē funkcija $w = f(z)$ katru slēgtu līniju, kas aptver singulāro punktu, attēlo par slēgtu līniju.

Vienvērtīga rakstura singulāros punktus iedala:

1) novēršami singulārie punkti,

2) poli (1.kārtas, 2.kartas, ..., n-tās kārtas),

3) būtiski singulārie punkti.

Definīcija 1.6

Vienvērtīga rakstura singulāro punktu z_0 sauc par funkcijas f novēršami singulāro punktu, ja eksistē $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A, \quad A \neq \infty$.

Piemēram, punkts $z = 0$ funkcijām $\dfrac{\sin z}{z}$, $\dfrac{z}{e^z - 1}$, $zctgz$ u.c.

Definīcija 1.7

Vienvērtīga rakstura singulāro punktu z_0 sauc par funkcijas f polu, ja $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Piemēram, punkts $z = 0$ funkcijām $\dfrac{1}{z}$, $ctgz$, $\dfrac{1}{z - \sin z}$ u.c.

Definīcija 1.8

Polu z_0 sauc par m-tās kārtas polu, ja funkcijai $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ punkts z_0 ir m-tās kārtas nulle, t.i., $\varphi(z_0) = \varphi'(z_0) = \ldots = \varphi^{(m-1)}(z_0) = 0$, $\varphi^{(m)}(z_0) \neq 0$. Vienādība $\varphi^{(k)}(z_0) = 0$, kur $k = 0,1,\ldots,m-1$, šeit tiek saprasta robežas nozīmē: $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi^{(k)}(z) = 0$.

Definīcija 1.9

Vienvērtīga rakstura singulāro punktu z_0 sauc par funkcijas f būtiski singulāro punktu, ja neeksistē robeža $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ - ne galīga, ne bezgalīga. Piemēram, punkts $z = 0$ funkcijām $\sin\dfrac{1}{z}$, $\cos\dfrac{1}{z}$, $\exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$ u.c.

Tagad, kad esam definējuši rezidiju teorijā nozīmīgākos singulāros punktus, varam formulēt lietojumos ļoti svarīgu Košī rezidiju teorēmu.

Teorēma 1.1 (Košī rezidiju teorēma)

Ja funkcija ir analītiska vienkārtsakarīgā apgabalā D ar rektificējamu kontūru ∂D, izņemot varbūt vienvērtīga rakstura singulāros punktus $z_m \in D$, $m = 1,2,\ldots,n$ tad

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{m=1}^{n} \operatorname{Re}s\left[f(z); z_m\right]. \tag{1.4}$$

Pēc Košī rezidiju teorēmas kontūrintegrāli ka globālu funkcijas jēdzienu var vienkārši izteikt ar atsevišķu skaitļu – rezidiju jeb lokālu funkcijas jēdzienu – summu. Šī īpašība arī nosaka Košī rezidiju teorēmas nozīmi dažādos lietojumos.

Rezidija aprēķināšana punktā $z_0 \neq \infty$.

Rezidiju definē vienvērtīga rakstura singulārā punktā ar formulām (1.2) vai (1.3). Šāda singulāra punkta z_0 apkārtnē funkciju f var attīstīt vienā vienīgā veidā Lorāna rindā:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k, \; 0 < |z - z_0| < r \text{, ja } z_0 \neq \infty, \tag{1.5}$$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k, \quad R < |z| < +\infty \text{, ja } z_0 = \infty. \tag{1.6}$$

Ir pareiza šāda teorēma:

Teorēma 1.2

$\mathrm{Res}[f(z); z_0] = c_{-1}$, ja $z_0 \neq \infty$, kur c_{-1} ir rindas (1.5) koeficients pie $(z - z_0)^{-1}$.

$\mathrm{Res}[f(z); \infty] = -c_{-1}$, kur c_{-1} ir rindas (1.6) koeficients pie z^{-1}.

Ar teorēmas (1.2) palīdzību var atrast algoritmus rezidiju aprēķināšanai dažāda tipa vienvērtīga rakstura singulāros punktos.

1^0 Ja $z_0 \neq \infty$ ir novēršams singulārs punkts vai arī punktā z_0 funkcija ir analītiska, tad

$$\mathrm{Res}[f(z); z_0] = 0. \tag{1.7}$$

2^0 Ja punkts $z_0 \neq \infty$ ir pirmās kārtas pols, tad

$$\mathrm{Res}[f(z); z_0] = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)]. \tag{1.8}$$

Praksē bieži pirmās kārtas pols z_0 ir funkcijām, kuras izsakāmas kā divu funkciju dalījums:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{g(z)}, \text{ kur } \varphi(z_0) \neq 0, \; g(z_0) = 0, \; g'(z_0) \neq 0. \tag{1.9}$$

Šajā gadījumā
$$\mathrm{Res}\left[\frac{\varphi(z)}{g(z)}; z_0\right] = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}. \tag{1.10}$$

3^0 Ja $z_0 \neq \infty$ ir n-tās kārtas pols, tad

$$\mathrm{Res}[f(z); z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)]. \tag{1.11}$$

4^0 Ja $z_0 \neq \infty$ ir būtiski singulārs punkts, tad

$$\mathrm{Res}\left[f(z); z_0\right] = c_{-1}. \qquad (1.12)$$

Rezidija aprēķināšana punktā $z_0 = \infty$.

Rezidija aprēķināšanā punktā $z_0 = \infty$ parasti izmanto vai nu formulu

$$\mathrm{Res}\left[f(z); \infty\right] = -c_{-1}, \qquad (1.13)$$

kur c_{-1} ir Lorāna rindas $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k$ koeficients pie z^{-1}, vai arī sekojošu teorēmu:

Teorēma 1.3

Ja funkcijai f kompleksā plaknē C ir tikai galīgs skaits vienvērtīga rakstura singulāru punktu $z_1, z_2, \ldots, z_n$, un nav sazarojuma punktu, tad rezidiju summu visos $\overline{C}$ plaknes singulārajos punktos, ieskaitot punktu ∞, ir vienāda ar nulli.

Tātad

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z); z_k\right] + \mathrm{Res}\left[f(z); \infty\right] = 0, \qquad (1.14)$$

jeb

$$\mathrm{Res}\left[f(z); \infty\right] = -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z); z_k\right]. \qquad (1.15)$$

Formulēsim arī sekojošajās nodaļās integrāļu aprēķināšanas formulu pamatošanai bieži izmantotās divas lemmas:

Lemma 1.1 Pieņemsim, ka

1) funkcija f ir nepārtraukta apgabalā $D = \{|z| > R_0, \alpha \le \arg z \le \beta\}$, kur

$\beta - \alpha \le 2\pi$, $R_0 > 0$;

2) $zf(z) \to 0$ vienmērīgi attiecībā pret $\arg z \in [\alpha, \beta]$, ja $z \to \infty$, $z \in D$.

Tad
$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0, \tag{1.16}$$

kur C_R ir riņķa līnijas loks $\{|z| = R, \alpha \le \arg z \le \beta\}$.

Lemma 1.2 (Žordāna lemma augšējai pusplaknei). Pieņemsim, ka

1) funkcija f ir nepārtraukta apgabalā $D = \{\operatorname{Im} z > a, |z| > R_0\}$, kur $R_0 > 0$, a - reāls;

2) $f(z) \to 0$ vienmērīgi attiecībā pret $\arg z$, ja $z \to \infty$ apgabalā D.

Tad katram pozitīvam skaitlim α

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} \exp(i\alpha z) f(z)dz = 0, \tag{1.17}$$

kur C_R ir riņķa līnijas loks $\{|z| = R, \operatorname{Im} z > a\}$.

2. Rezidiju lietojumi integrāļu atrašanai.

Šajā nodaļā aplūkosim metodes, kā dažādus integrāļus no racionālām funkcijām ($R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $R(x)\cos\alpha x$, $R(x)\sin\alpha x$) aprēķina ar rezidiju palīdzību, vajadzības gadījumā izmantojot iepriekšējā nodaļā apskatītās kompleksā mainīgā funkcijas teorijas metodes. Kā zināms, lielu daļu integrāļu aprēķina ar reālās klasiskās matemātiskās analīzes integrēšanas metodēm vai skaitlisko integrēšanu, ko parasti realizē ar datorprogrammu. Pie tam, programmu paketes, piemēram, "MATHEMATICA" jaunākās versijas integrāļus spēj atrast arī analītiski. Taču ko darīt, ja integrālis ir atkarīgs no viena vai vairākiem parametriem, vai arī zemintegrāļa funkcija ir oscilējoša un ar skaitliskām metodēm ir grūti sasniegt vajadzīgo precizitāti? Apskatīsim metodes, kurās ar rezidiju palīdzību dažādus integrāļus varēs aprēķināt tieši, vai arī pārveidot par tādiem integrāļiem, kuriem skaitlisko metožu pielietošana vairs grūtības nesagādās. Lasītāja ērtības labad, sadalīsim integrāļus pa tipiem, atkarībā no tā, kā šos integrāļus aprēķina ar rezidiju palīdzību. Šeit gan jāpiezīmē, ka literatūrā šāds sadalījums nav stingri noteikts, tādēļ var būt atšķirības starp šajā un citā darbā lietoto integrāļu sadalījumu pa tipiem.

Kā redzējām iepriekšējā nodaļā, galvenā nozīme noteikto integrāļu aprēķināšanā, izmantojot rezidijus, ir Košī rezidiju teorēmai (skat. Teorēmu 2.1). Saskaņā ar to integrāļus aprēķina pa slēgtu kontūru no analītiskām funkcijām. Ja jāaprēķina noteiktais integrālis $\int\limits_a^b f(x)dx$, kura kontūrs nav slēgts, tad, izpildot substitūciju $x = a + \dfrac{t(b-a)}{2\pi}$ un $z = \exp(it)$, iegūstam vienādības:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)dt = \oint\limits_{|z|=1} F(z)dz, \qquad (2.1)$$

kur $$\varphi(t)=\frac{b-a}{2\pi}f\left(a+\frac{t(b-a)}{2\pi}\right), t\in[0,2\pi], \tag{2.2}$$

un $$F(z)=\frac{-i}{t}\varphi(-i\ln_0 z), z\in L=\{|z|=1\}. \tag{2.3}$$

Ievērosim, ka pēdējais integrālis formulā (2.1) ir kontūrintegrālis pa vienības riņķa līniju. Lai šādam integrālim varētu lietot Košī rezidiju teorēmu un izteiktu to ar rezidiju summu, funkcijai F, kas noteikta ar doto funkciju f, formulā (2.2) un (2.3), riņķī $|z|<1$ nedrīkst būt sazarojuma punkti. Vispārīgā gadījumā tie var būt un šādos gadījumos Košī rezidiju teorēmu tieši lietot nedrīkst. Apskatīto metodi tieši lietot var tikai atsevišķām zemintegrāļu funkciju klasēm, piemēram, tādām, kurām $f(x)=R(\sin x,\cos x)$, ja R ir mainīgo $\sin x$ un $\cos x$ racionāla funkcija un $b-a=2\pi.$

Integrāli $I=\int_0^{2\pi}R(\sin x,\cos x)dx$, kur R- racionāla funkcija, sauksim par <u>1.tipa integrāli</u>. Tā aprēķināšanai lieto substitūciju $\exp(ix)=z$ un Košī rezidiju teorēmu (sk.teorēmu 1.1). Ņemot vērā, ka $\cos x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $\sin x=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$ un $dx=-\frac{idz}{z}$,

iegūstam: $$I=-i\oint_{|z|=1}\frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)dz. \tag{2.4}$$

Integrālis formulā (2.4) pēc teorēmas 1.1 ir vienāds ar $2\pi i$ reizinājumu ar zemintegrāļa funkcijas visu rezidiju summu tajos singulārajos punktos, kuri atrodas riņķī $|z|<1$, jo zemintegrāļa funkcijai kā racionālai funkcijai vienīgie iespējamie singulārie punkti ir poli. Tādejādi esam ieguvuši šādu integrāļa I aprēķināšanas formulu:

$$\boxed{\int_0^{2\pi}R(\sin x,\cos x)dx=2\pi\sum_{|z_k|<1}\operatorname{Res}\left\{\frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right);z_k\right\}}. \tag{2.5}$$

Aplūkosim piemērus.

<u>1.Piemērs</u>. Aprēķināt integrāli $I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}$, $a,b,c\in R$, $a^2>b^2+c^2$.

Ar substitūciju $e^{ix} = z$ integrāli vispirms reducē uz kontūrintegrāli pa vienības riņķa līniju $|z| = 1$ un pēc tam pielieto formulu (2.4).

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{(b - ic)z^2 + 2az + b + ic}.$$

Singulārie punkti ir $z_{1,2} = \frac{1}{b - ic}\left(-a \pm \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}\right)$. Ja $a > 0$, tad nosacījumu $|z| < 1$ apmierina tikai $z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{b - ic}$. Tiešām, no nevienādības $a^2 > b^2 + c^2$ izriet, ka $|z_1| = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} < 1$, bet $|z_2| = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}} > 1$. Punkts z_1 ir pirmās kārtas pols.

Tātad

$$I = 2\pi \operatorname{Res}\left[\frac{2}{(b - ic)z^2 + 2az + b + ic}; \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{b - ic}\right] = \left.\frac{2\pi}{(b - ic)z + a}\right|_{z=z_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}.$$

Ja $a < 0$, tad riņķī $|z| < 1$ atrodas singulārais punkts z_2 un $I = -\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}$.

Tātad $I = \frac{2\pi \operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}$.

<u>2.Piemērs</u>. Aprēķināt integrāli $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\left(1 + 2a\sin x + a^2\right)^2}$, $a \in R$, $|a| < 1$.

Pēc substitūcijas $e^{ix} = z$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{zdz}{\left[-aiz^2 + \left(1 + a^2\right)z + ai\right]^2} = -\oint_{|z|=1} \frac{zdz}{a^2\left[z^2 + i\left(\frac{1}{a} + a\right)z - 1\right]^2}.$$

Zemintegrāļa funkcijas singulārie punkti ir $z_1 = -ia$ un $z_2 = -\frac{i}{a}$ (abi otrās kārtas poli), pie tam tikai $|z_1| = |a| < 1$. Pēc formulas (2.4)

$$I = -\frac{2\pi}{a^2}\operatorname{Res}\left\{\frac{z}{\left[z^2 + i\left(\frac{1}{a} + a\right)z - 1\right]^2}; -ia\right\}.$$

Rezidiju otrās kārtas polā aprēķinam pēc formulas (1.11) ar $n = 2$ un pirms atvasināšanas saīsinot ar $(z + ia)^2$, iegūsim:

$$I = -\frac{2\pi}{a^2}\lim_{z\to ia}\left[\frac{z}{\left(z + \frac{i}{a}\right)^2}\right]' = -\frac{2\pi}{a^2}\left[\left(z + \frac{i}{a}\right)^{-2} - 2z\left(z + \frac{i}{a}\right)^{-3}\right]\Bigg|_{z=-ia} = \frac{2\pi\left(1 + a^2\right)}{\left(1 - a^2\right)^3}.$$

Kā redzams, aplūkotā metode der tikai šaurām speciālām zemintegrāļu funkciju klasēm, tādēļ aplūkosim otru, daudz vispārīgāku rezidiju lietošanas metodi integrāļu aprēķināšanai.

Pieņemsim, ka jāaprēķina integrālis (īstais vai neīstais) $I = \int_a^b f(x)dx$. Aplūko $\oint_C \Phi(z)dz$ pa tādu slēgtu līniju C, un ar tādu zemintegrāļa funkciju Φ, lai būtu spēkā divi nosacījumi:

1) $\oint_C \Phi(z)dz$ varētu aprēķināt ar rezidijiem;

2) integrācijas kontūru C būtu iespējams sadalīt vairākās daļās $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$ tā, lai dažus no integrāļiem $\oint_{C_k} \Phi(z)dz$ varētu aprēķināt tieši, bet pārējos izteikt ar meklējamo integrāli I.

Ņemsim vērā, ka aprēķinot integrāli $\oint_C \Phi(z)dz$ gan ar rezidijiem, gan izsakot ar summu $\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} \Phi(z)dz = \sum_{k=1}^{n_1}\oint_{C_k} \Phi(z)dz + \sum_{k=n_1+1}^{n}\oint_{C_k} \Phi(z)dz$, meklējamo integrāli I atrodam no vienādības:

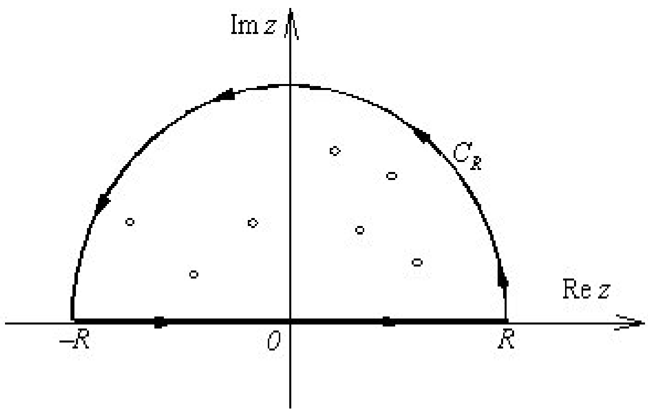
$$2\pi i\sum_{m}\operatorname{Res}[\Phi(z);z_m]=\sum_{k=1}^{n_1}\oint_{C_k}\Phi(z)dz+\sum_{k=n_1+1}^{n}\oint_{C_k}\Phi(z)dz, \tag{2.6}$$

kur z_m ir tie singulārie punkti, kas atrodas kontūra C iekšpusē, pirmā summa formulas (2.6) labajā pusē satur I, bet otro atrod tieši.

Izvēloties kontūru C, mērķtiecīgi būtu izvelēties tādu apgabalu, kurš nesaturētu sazarojuma punktus, jo tad kontūrintegrālim $\oint_C \Phi(z)dz$ varētu lietot Koši rezidiju teorēmu. Diemžēl, praksē šāda kontūra C atrašana, kā arī pašas funkcijas Φ noteikšana sagādā grūtības. Nav izslēgts, ka apskatāmajam integrālim $\int_a^b f(x)dx$ funkcija Φ un kontūrs C ar vajadzīgajām īpašībām neeksistē (tas gan nav pierādīts).

Protams, visus integrāļus aprēķināt ar šo metodi nevarēs, taču vairākām zemintegrāļu funkciju klasēm eksistē algoritmi, kā izveidot integrāļu aprēķināšanas formulas ar rezidiju palīdzību. Daļu no tiem tūdaļ aplūkosim.

Integrāli $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$, kur $P_n(x)$ un $Q_m(x)$ ir mainīgā x polinomi ar reāliem vai kompleksiem koeficientiem, $m-n\geq 2$ un polinomam $Q_m(x)$ nav saknes uz reālās ass ($Q_m(x)\neq 0$, ja $x\in R$) sauksim par 2.tipa integrāli. Aprēķinot šāda tipa integrāļus tiek izmantota iepriekš aplūkotā shēma, kur par $\Phi(z)$ izvēlas funkciju $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, bet par integrācijas kontūru C pusriņķa $D=\{|z|<R,\operatorname{Im}z>0\}$ kontūru ∂D ar tik lielu R, lai visa polinoma $Q_m(z)$ saknes, kas novietotas pusplaknē $\operatorname{Im}z>0$, atrastos šajā pusriņķī (sk. zīm. 2.1).



zīm 2.1

Aprēķināsim integrāli $\oint\limits_C \Phi(z)dz$ gan ar rezidijiem, gan izteiksim to kā divu integrāļu summu:

$$\oint\limits_C \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left[\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}; z_k\right] = \int\limits_{-R}^{R} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx + \int\limits_{C_R} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}dz\,, \tag{2.7}$$

kur C_R ir pusriņķa līnija (sk. zīm. 3.1). Izdarot pēdējā vienādībā robežpāreju, kad $R \to +\infty$ un ievērojot, ka pēc lemmas 2.1 $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{C_R} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}dz = 0$ iegūstam šādu 2.tipa integrāļu aprēķināšanas formulu:

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left[\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}; z_k\right]}. \tag{2.8}$$

<u>3.Piemērs</u>. Aprēķināt integrāli $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$.

Integrālis ir 2.tipa un to var pārrakstīt formā $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2(x-1)dx}{x^5 - 1}$, no kuras redzams, ka saucējam $z^5 - 1$ augšējā pusplaknē ir divas saknes $z_1 = \exp\frac{2\pi i}{5}$ un $z_2 = \exp\frac{4\pi i}{5}$ (abi zemintegrāļa funkcijas 1.kārtas poli). Pēc formulas (2.8)

$$I = 2\pi i\left\{\operatorname{Res}\left[\frac{z^2(z-1)}{z^5-1}; z_1\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{z^2(z-1)}{z^5-1}; z_2\right]\right\}.$$

Rezidijus aprēķinam pēc formulas (1.10):

$$I=\frac{2\pi i}{5}\left[\exp\left(-\frac{4\pi i}{5}\right)\left(\exp\frac{2\pi i}{5}-1\right)+\exp\left(-\frac{8\pi i}{5}\right)\left(\exp\frac{4\pi i}{5}-1\right)\right]=$$

$$=\frac{2\pi i}{5}\left[\exp\left(-\frac{2\pi i}{5}\right)-\left(\exp-\frac{4\pi i}{5}\right)+\exp\left(-\frac{4\pi i}{5}\right)-\left(\exp-\frac{8\pi i}{5}\right)\right]=$$

$$=\frac{2\pi i}{5}\left[\exp\left(-\frac{2\pi i}{5}\right)-\left(\exp\frac{2\pi i}{5}\right)\right]=\frac{4\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}.$$

<u>4.Piemērs</u>. Aprēķināt integrāli $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4+a^4}$, $a\in R$, $a\neq 0$.

Tā kā zemintegrāļa funkcija ir pāra funkcija, tad $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4+a^4}$. Apskatāmais integrālis ir 2.tipa un tam var pielietot formulu (2.8). Rezidiju summa jārēķina tajos singulārajos punktos z_k, kurus nosaka vienādojuma $z^4+a^4=0$ un nevienādības $\operatorname{Im} z_k>0$. Atrisinot šo ceturtās kārtas vienādojumu, iegūst:

$$z_k=\sqrt[4]{-a}=|a|\exp\left[\frac{i\pi}{4}(2k+1)\right],\ k=0,1,2,3.$$

Nosacījumu $\operatorname{Im} z_k>0$ apmierina tikai divi punkti $z_0=|a|\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$ un $z_1=|a|\exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right)$, kuri abi ir 1.kārtas poli. Pēc formulas (2.8) atrodam, ka

$$I=\pi i\left\{\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{z^4+a^4};|a|\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{z^4+a^4};|a|\exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right)\right]\right\}.$$

Aprēķinot rezidijus pēc formulas (1.10), iegūstam:

$$I=\pi i\left[\frac{1}{2\sqrt{2}a(1+i)}-\frac{1}{2\sqrt{2}a(1-i)}\right]=\pi i\frac{(-2i)}{4\sqrt{2}a}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4a}.$$

Integrāļus $I_1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\cos\alpha x dx$ un $I_2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\sin\alpha x dx$, kur $\alpha>0$, $P_n(x)$ un $Q_m(x)$ ir mainīgā x polinomi ar reāliem koeficientiem, $Q_m(x)\neq 0$, ja $x\in R$ un $m-n\geq 1$, sauksim par <u>3.tipa integrāļiem</u>. Aprēķinos par $\Phi(z)$ izvēlas $\Phi(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \exp(i\alpha z)$, bet integrācijas kontūru C tādu pašu kā 2.tipa integrāļiem (sk. zīm. 3.1). Pēc Košī rezidiju teorēmas (sk. teorēmu 2.1)

$$\int_C \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \exp(i\alpha z) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left[\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \exp(i\alpha z); z_k\right], \tag{2.9}$$

kur z_k ir tikai tās polinoma $Q_m(z)$ nulles, kuras atrodas augšējā pusplaknē $\operatorname{Im} z > 0$. Analogi 2.tipa integrāļiem, sadalīsim integrāli formulā (2.9) šādi:

$$\int_{-R}^{R} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \exp(i\alpha x) dx + \int_{C_R} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \exp(i\alpha z) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left[\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \exp(i\alpha z); z_k\right]. \tag{2.10}$$

Ievērojot, ka formulā (2.10) labā pusē nav atkarīga no R (tātad robeža eksistē), un izpildot robežpāreju $R \to +\infty$, kā arī integrālim pa loku C_R pielietojot lemmu 1.1 atrodam, ka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \exp(i\alpha x) dx = I_1 + iI_2 = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left[\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \exp(i\alpha z); z_k\right]. \tag{2.11}$$

Atdalot formulas (2.11) pēdējā vienādībā reālās un imaginārās daļas, iegūstam šādas 3.tipa integrāļu aprēķināšanas formulas:

$$\boxed{I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \cos \alpha x dx = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left[\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \exp(i\alpha z); z_k\right]\right\}}\,, \tag{2.12}$$

$$\boxed{I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \sin \alpha x dx = \operatorname{Im}\left\{2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left[\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \exp(i\alpha z); z_k\right]\right\}}\,. \tag{2.13}$$

<u>5.Piemērs</u>. Aprēķināt integrāli $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x dx}{x^2 - 2ax + b^2}$, $\alpha, a, b \in R$, $a^2 - b^2 < 0$.

Integrālis ir 3.tipa. Pieņemsim, vispirms, ka $\alpha > 0$. Vienādojuma $Q_2(z) = z^2 - 2az + b^2 = 0$ saknes ir $z_{1,2} = a \pm i\sqrt{b^2 - a^2}$, no kurām augšējā pusplaknē atrodas $z_1 = a + i\sqrt{b^2 - a^2}$. Šī sakne ir funkcijas $\frac{z\exp(i\alpha z)}{z^2 - 2az + b}$ pirmās kārtas pols. Pēc formulas (2.13)

$$I = \operatorname{Im}\left\{2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Re}s\left[\frac{z\exp(i\alpha z)}{z^2 - 2az + b}; z_1\right]\right\} =$$

$$= \operatorname{Im}\left\{\frac{\pi}{\sqrt{b^2 - a^2}}\left(a + i\sqrt{b^2 - a^2}\right)\exp\left[i\alpha\left(a + i\sqrt{b^2 - a^2}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{b^2 - a^2}}\exp\left(-\alpha\sqrt{b^2 - a^2}\right)\left(a\sin\alpha a + \sqrt{b^2 - a^2}\cos\alpha a\right).$$

Ja $\alpha < 0$, tad integrāļa absolūtā vērtība nemainās, bet mainās tikai zīme. Ja $\alpha = 0$, tad $I = 0$. Tādēļ

$$I = \frac{\pi \operatorname{sgn}\alpha}{\sqrt{b^2 - a^2}}\exp\left(-|\alpha|\sqrt{b^2 - a^2}\right)\left(a\sin|\alpha|a + \sqrt{b^2 - a^2}\cos\alpha a\right).$$

<u>6.Piemērs</u>. Aprēķināt integrāli $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\cos\alpha x dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2}$ $\qquad \alpha, a \in R$, $a \neq 0$.

Risināšanas plāns līdzīgs iepriekšējam piemēram, tikai šoreiz lietosim formulu (2.12). Augšējā pusplaknē atrodas viens otrās kārtas pols ia, ja $a > 0$. Pieņemot, ka arī $\alpha > 0$, iegūstam

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos\alpha x dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2} = \operatorname{Re}\left\{\pi i \operatorname{Re}s\left[\frac{z^2\exp(i\alpha z)}{\left(z^2 + a^2\right)^2}; ia\right]\right\}.$$

Rezidiju 2.kārtas polam ia aprēķinam pēc formulas (1.11) ar $n = 2$. Saīsinam ar $(z - ia)^2$ un iegūstam:

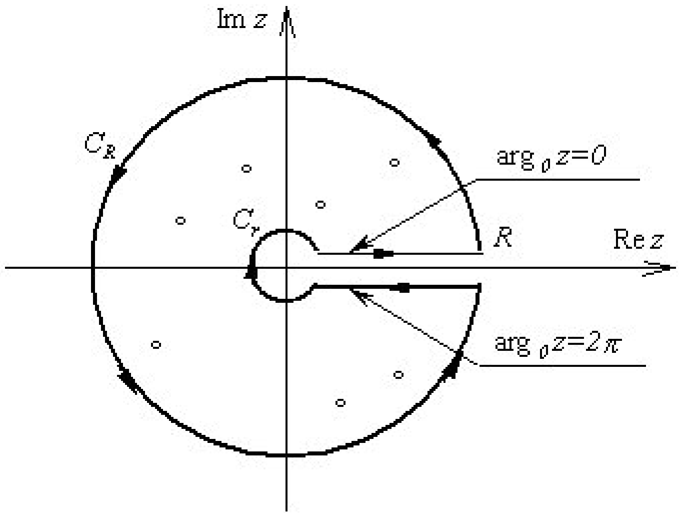
$$I = \operatorname{Re}\left\{\pi i \lim_{z \to ia}\left[\frac{z^2\exp(i\alpha z)}{(z + ia)^2}\right]'\right\} = \operatorname{Re}\left\{\pi i\left[\frac{1}{2ia}\exp(-\alpha a) + \frac{1}{4}ia\exp(-\alpha a) - \frac{1}{4ia}\exp(-\alpha a)\right]\right\} =$$

$$\frac{\pi}{4a}\exp(-\alpha a)(1 - \alpha a).$$

Integrāļa vērtība nemainās, ja α aizstāj ar $-\alpha$ un a ar $-a$. Tādēļ

$$I = \frac{\pi}{4|a|}\exp(-|\alpha a|)(1-|\alpha a|).$$

Integrāļus $I = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$, kur $\alpha > 0$, $P_n(x)$ un $Q_m(x)$ - polinomi ar reāliem vai kompleksiem koeficientiem, $Q_m(x) \neq 0$, ja $x \geq 0$, $P_n(0) \neq 0$ un $m - n - \alpha > 0$, sauksim par 4.tipa integrāļiem. Tos aprēķina, izvēloties par $\Phi(z) = \frac{z^{\alpha-1}P_n(z)}{Q_m(z)}$, bet kontūru C - kā parādīts 2.2 zīmējumā.



zīm 2.2

Riņķa līniju rādiusus r un R jāizvēlas tā, lai visas polinoma $Q_m(x)$ nulles z_k atrastos gredzenā $r < |z| < R$. Šāda kontūra C izvēle pamatojama ar to, ka funkcijai Φ punkts $z = 0$ vispārīgam α ir sazarojuma punkts. Lai varētu lietot Košī rezidiju teorēmu (skat. teorēmu 1.1), šīs sazarojuma punkts no apskatāmā apgabala ir jāizgriež. Griezums tiek veidots pa reālo pozitīvo pusasi. Funkciju Φ mēs šoreiz aplūkojam kā daudzvērtīgas funkcijas noteiktu vienvērtīgu zaru. Būtībā funkcija $\Phi(z)$ tiek aplūkota nevis kompleksajā plaknē, bet uz noteiktas šīs funkcijas Rīmana virsmas lapas.

Jāņem vērā, ka aprēķinot rezidijus daudzvērtīgas funkcijas f (vai tās atvasinājuma) vienvērtīga zara punktā z_k, šis z_k ir jāuzdod eksponentformā. Tātad, ja pieņemam, ka uz augšējās griezuma malas $\arg_0 z = 0$, tad uz apakšējās griezuma malas - $\arg_0 z = 2\pi$ (skat. 2.2 zīm.). Šajā gadījumā skaitļa z eksponentforma ir $z = |z| \exp(i \arg_0 z)$, bet vienvērtīgo zaru z^α izdala šādi:

$$z^\alpha = |z|^\alpha \exp(i \arg_0 z). \tag{2.14}$$

Pēc Košī rezidiju teorēmas

$$\oint_C z^{\alpha-1} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left[\frac{z^{\alpha-1} P_n(z)}{Q_m(z)}; |z_k| \exp(i \arg_0 z_k)\right], \tag{2.15}$$

kur summēšana notiek pa visām polinoma $Q_m(z)$ nullēm. Sadalot integrāli formulas (2.15) kreisajā pusē četros, iegūsim vienādību:

$$\int_r^R x^{\alpha-1} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx + \int_{C_R} z^{\alpha-1} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} dz - \exp(2\pi i a) \int_r^R x^{\alpha-1} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx - \int_{C_r} z^{\alpha-1} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} dz =$$

$$= 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left[\frac{z^{\alpha-1} P_n(z)}{Q_m(z)}; |z_k| \exp(i \arg_0 z_k)\right], \tag{2.16}$$

kurā, uz augšējās griezuma malas $z^{\alpha-1} = x^{\alpha-1} e^{i0(\alpha-1)} = x^{\alpha-1}$, bet uz apakšējās - $z^{\alpha-1} = x^{\alpha-1} \exp[2\pi i(\alpha-1)] = x^{\alpha-1} \exp(2\pi i \alpha)$. Integrāļi $\int_{C_R}$ un $\int_{C_r}$ aprēķināti attiecīgi pa riņķa līnijām $|z| = R$, $0 \le \arg_0 z \le 2\pi$ un $|z| = r$, $0 \le \arg_0 z \le 2\pi$. Izpildot vienādībā (2.16) robežpāreju $R \to +\infty$ un $r \to +0$, iegūstam:

$$I(1 - \exp(2\pi i \alpha)) = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left[\frac{z^{\alpha-1} P_n(z)}{Q_m(z)}; |z_k| \exp(i \arg_0 z_k)\right], \tag{2.17}$$

kur I ir meklējamais integrālis, jo $\int_{C_R} z^{\alpha-1} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} dz \to 0$, ja $R \to +\infty$ pēc lemmas 1.1 (lemmas nosacījumu izpildi nodrošina nevienādība $m - n - \alpha > 0$), bet vienādību

$$\lim_{r\to+0}\int_{C_r} z^{\alpha-1}\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}dz = 0 \qquad (2.18)$$

pierāda, tieši novērtējot šo integrāli.

No vienādības (2.18), ievērojot, ka

$$\frac{2\pi i}{1-\exp(2\pi i\alpha)} = -2\pi i\frac{e^{-i\pi\alpha}}{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}} = -\frac{\pi\exp(-i\pi\alpha)}{\sin\pi\alpha}, \qquad (2.19)$$

iegūstam šādu 4.tipa integrāļu aprēķināšanas formulu:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\sin\pi\alpha}\sum_k \operatorname{Re}s\left[\frac{z^{\alpha-1}P_n(z)}{Q_m(z)};|z_k|\exp(i\arg_0 z_k)\right]}, \qquad (2.20)$$

kur summācija notiek pa visām $Q_m(z)$ nullēm z_k.

<u>7.Piemērs</u>. Aprēķināt integrāli $I = \int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{x^2+2x+2}dx$, $0<\alpha<2$.

Integrālis ir 4.tipa. Lai tam varētu pielietot formulu (2.20), ir jāatrod visas saucēja polinoma Q_m saknes un katra no tām jāuzraksta formā $z_k = |z_k|\exp(i\arg_0 z_k)$. Dotajam integrālim I saucēja saknes ir $z_{1,2} = -1\pm i$. Pārrakstot tās abas eksponentformā, iegūstam $z_1 = \sqrt{2}\exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right)$, $z_2 = \sqrt{2}\exp\left(\frac{5\pi i}{4}\right)$. Integrāli aprēķinam pēc formulas (2.20), bet rezidijus – pēc formulas (1.10):

$$I = -\frac{\pi\exp(-i\pi\alpha)}{\sin\pi\alpha}\left\{\operatorname{Re}s\left[\frac{z^{\alpha-1}}{z^2+2z+2};\sqrt{2}\exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right)\right] + \operatorname{Re}s\left[\frac{z^{\alpha-1}}{z^2+2z+2};\sqrt{2}\exp\left(\frac{5\pi i}{4}\right)\right]\right\} =$$

$$= -\frac{\pi\exp(-i\pi\alpha)\left(\sqrt{2}\right)^{\alpha-1}}{\sin\pi\alpha}\left\{\frac{1}{2i}\exp\left[\frac{3\pi i}{4}(\alpha-1)\right] - \frac{1}{2i}\exp\left[\frac{5\pi i}{4}(\alpha-1)\right]\right\} =$$

$$= \frac{\pi\left(\sqrt{2}\right)^{\alpha-1}}{2i\sin\pi\alpha}\left[\exp\left(\frac{\pi i\alpha}{4}+\frac{3\pi i}{4}\right) - \exp\left(-\frac{\pi i\alpha}{4}-\frac{3\pi i}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi\left(\sqrt{2}\right)^{\alpha-1}}{\sin\pi\alpha}\sin\frac{\pi}{4}(\alpha+3).$$

8.Piemērs. Aprēķināt integrāli $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}dx}{x^2+2x\cos\beta+1}$, $0<\alpha<2$, $-\pi<\beta<\pi$.

Dotajam 4.tipa integrālim I zemintegrāļa funkcijai ir divi pirmās kārtas poli $z_{1,2}=-\cos\beta\pm\sin\beta=\exp(\pm i\beta)$. Pārveidosim tos eksponentformā $z_1=\exp[i(\pi+\beta)]$ un $z_2=\exp[i(\pi-\beta)]$. Integrāli atrodam pēc formulas (2.20):

$$I=-\frac{\pi\exp(i\pi\alpha)}{\sin\pi\alpha}\left\{\operatorname{Res}\left[\frac{z^{\alpha-1}}{z^2+2z\cos\beta+1};\exp[i(\pi+\beta)]\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{z^{\alpha-1}}{z^2+2z\cos\beta+1};\exp[i(\pi-\beta)]\right]\right\}=$$

$$=-\frac{\pi\exp(-i\pi\alpha)}{\sin\pi\alpha}\left\{-\frac{\exp[i(\alpha-1)(\pi+\beta)]}{2i\sin\beta}+\frac{\exp[i(\alpha-1)(\pi-\beta)]}{2i\sin\beta}\right\}=$$

$$=-\frac{\pi\sin[\beta(\alpha-1)]}{\sin\pi\alpha\sin\beta}=\frac{\pi\sin[\beta(1-\alpha)]}{\sin\pi\alpha\sin\beta}.$$

Integrāļus $I_1=\int\limits_0^{+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$ un $I_2=\int\limits_0^{+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\ln x dx$, kur $m-n\ge 2$, $P_n(x)$ un $Q_m(x)$ - polinomi ar reāliem koeficientiem, $Q_m(x)\ne 0$, ja $x\ge 0$, sauksim par <u>5.tipa integrāļiem</u>. Par integrējamo funkciju Φ jāizvēlas $\Phi(z)=(\ln_0 z)^2\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, kur funkciju $\ln_0 z$ aprēķina kā logaritmiskās funkcijas zaru:

$$\ln_0 z=\ln|z|+i\arg_0 z,\ \arg_0 z\in[0,2\pi]. \qquad (2.21)$$

Integrācijas kontūrs C tiek izvēlēts tāds pats kā 4.tipa integrāļiem (skat. zīm.2.2). Pēc pārveidojumiem, kas analogi iepriekšējo tipu integrāļiem, iegūst šādas 5.tipa integrāļu aprēķināšanas ar rezidijiem formulas:

$$\boxed{I_1=\int\limits_0^{+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx=-\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\sum_k\operatorname{Res}\left[\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}\ln_0^{\,2} z;z_k\right]}, \qquad (2.22)$$

$$\boxed{I_2=\int\limits_0^{+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\ln x dx=-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\sum_k\operatorname{Res}\left[\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}\ln_0^{\,2} z;z_k\right]}, \qquad (2.23)$$

kur jāsummē pa visām polinoma $Q_m(z)$ nullēm, bet $\ln_0 z$ jāaprēķina pēc formulas (2.21).

Atgādināsim, ka formulas (2.22) un (2.23) ir pareizas, ja polinomi $P_n(x)$ un $Q_m(z)$ ir polinomi ar reāliem koeficientiem. Sadalot 5.tipa integrāļus analogi kā formulā (2.16) 4.tipa integrāli, ievērosim, ka uz augšējās griezuma malas pēc formulas (2.21) $\ln_0^{\,2} z = \ln^2 x$, jo $\arg_0 z = 0$, bet uz apakšējās griezuma malas $\ln_0^{\,2} z = \ln^2 x + 4\pi i \ln x - 4\pi^2$, jo $z = xe^{2\pi i}$ un $\arg_0 z = 2\pi$. Izdarot robežpāreju analogu iepriekšējam integrāļu tipam un līdzīgi spriežot, redzam, ka integrāli I_1 un I_2 var atrast pēc (2.22) un (2.23) tikai tad, ja polinoma $P_n(x)$ un $Q_m(x)$ koeficienti ir reāli.

Savukārt, ja $P_n(x)$ un $Q_m(x)$ ir polinomi ar kompleksiem vai reāliem koeficientiem, tad integrāli I_1 var aprēķināt pēc formulas (2.20) pārejot uz robežu, kad $\alpha \to 1$, bet I_2 - atvasinot pēc α un tad pārejot uz robežu, kad $\alpha \to 1$.

Kompleksām racionālām funkcijām $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ formulas (2.22) vietā var lietot arī formulu:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = -\sum_k \operatorname{Res}\left[\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}\ln_0 z; z_k\right], \tag{2.24}$$

kur $m-n \geq 2$, $Q_m(x) \neq 0$, ja $x \in [0;+\infty]$.

Formulu (2.24) iegūst līdzīgi iepriekšējām, ja izvēlas $\Phi(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}\ln_0 z$, un kontūru C - kā parādīts 2.2 zīmējumā.

9 un 10.Piemērs. Aprēķināt integrāļus $I_1 = \int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 - 2x + 2}$ un $I_2 = \int_0^{+\infty} \dfrac{\ln x dx}{x^2 - 2x + 2}$.

Gan integrālis I_1, gan I_2 ir 5.tipa integrāļi, un tādēļ tos abus var aprēķināt attiecīgi pēc formulām (2.22) un (2.23). Zemintegrāļa funkciju singulārie punkti ir $z_{1,2} = 1 \pm i$ (1.kārtas poli). Lai aprēķinātu $\ln_0(z)$ šajos singulārajos punktos, z_1 un z_2 jāuzraksta formā $z_1 = \sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$, $z_2 = \sqrt{2}\exp\left(\frac{7\pi i}{4}\right)$. Tā kā $I_1 = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im} S$, $I_2 = -\frac{1}{2}\operatorname{Re} S$, kur

$$S = \operatorname{Re} s\left[\frac{\ln_0^2 z}{z^2 - 2z + 2}; \sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)\right] + \operatorname{Re} s\left[\frac{\ln_0^2 z}{z^2 - 2z + 2}; \sqrt{2}\exp\left(\frac{7\pi i}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{\left(\ln\sqrt{2} + \frac{i\pi}{4}\right)^2}{2i} - \frac{\left(\ln\sqrt{2} + \frac{7\pi i}{4}\right)^2}{2i} = -\frac{3\pi}{4}\ln 2 - \frac{3\pi^2}{2} i,$$

tad $I_1 = \frac{3\pi}{4}$ un $I_2 = \frac{3\pi}{8}\ln 2$.

Formula (2.24) ir ļoti nozīmīga daudzu noteikto integrāļu aprēķināšanā. Formulēsim teorēmu, ka katru racionālu funkciju, tajā skaitā arī polinomu, var integrēt ar rezidijiem.

Teorēma 2.1 Katrai racionālai funkcijai $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ar kompleksiem koeficientiem, kurai intervālā $x \in [a,b]$ nav polu,

$$\boxed{\int_a^b R(x)dx = -\sum_k \operatorname{Re} s\left[R(z)\ln_0 \frac{z-a}{b-z}; z_k\right]}, \qquad (2.25)$$

kur summācija notiek pa visiem $R(z)$ poliem, ieskaitot $z = \infty$, bet $\ln_0 w := \ln|w| + i\arg_0 w$.

Piezīme. Lai gan formula (2.25) ir pareiza visām racionālām funkcijām, tajā skaitā arī polinomiem, tās lietošana ne vienmēr ir mērķtiecīga.Teikto ilustrēsim ar piemēru.

10.Piemērs. Aprēķināt integrāli $I = \int_a^b x^n dx$.

Pēc Ņūtona-Leibnica formulas $I = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$. Ar rezidijiem šāda integrāļa atrašana ir garāka. Pēc formulas (2.25) $I = -\operatorname{Re} s\left[z^n \ln_0 \frac{z-a}{b-z}; \infty\right]$. Pietiekami lieliem $|z|$ ir pareizs attīstījums Lorāna rindā $z = \infty$ apkārtnē:

$$\ln_0 \frac{z-a}{b-z} = \ln_0 \frac{1-\frac{a}{z}}{1-\frac{b}{z}} + i\pi = i\pi + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k - a^k}{kz^k},$$

kur $|z| > \max(|a|,|b|)$. Funkcijas $z^n \ln_0 \frac{z-a}{b-z}$ koeficients $c_{-1} = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)$ un pēc teorēmas 1.2

$$I = -\operatorname{Res}\left[z^n \ln_0 \frac{z-a}{b-z}; \infty\right] = c_{-1} = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right).$$

Aplūkosim arī piemēru, kurā rezidiju lietošana ir vienkāršāka nekā tiešā integrēšana ar elementārajam funkcijām.

11.Piemērs: Atrast integrāli $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\left(1+x^5\right)}$.

Pēc formulas (2.25)

$$I = -\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z\left(1+z^5\right)} \ln_0 \frac{z-1}{2-z}; 0\right] - \sum_{k=0}^{4} \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z\left(1+z^5\right)} \ln_0 \frac{z-1}{2-z}; \exp\frac{(2k+1)\pi i}{5}\right],$$

jo rezidijs punktā $z=\infty$ ir 0. Atliek aprēķināt rezidijus vienkāršajos polos. Pēc formulas (1.10) iegūstam:

$$I = -\ln_0\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} \ln_0\left[\frac{\exp\frac{(2k+1)\pi i}{5} - 1}{2 - \exp\frac{(2k+1)\pi i}{5}}\right].$$

Tā kā I ir reāls skaitlis, arī vienādības labajā pusē var ņemt tikai reālo daļu

$$I = \ln 2 + \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} \ln \frac{\left|\exp\frac{(2k+1)\pi i}{5} - 1\right|}{\left|2 - \exp\frac{(2k+1)\pi i}{5}\right|} \text{ vai } I = \ln 2 + \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{4} \ln \frac{4\sin^2 a_k}{1 + 8\sin^2 a_k},\ a_k = \frac{(2k+1)\pi}{10}.$$

Atrodot šo pašu integrāli ar Ņūtona – Leibnica formulu, iegūstam $I = \frac{6}{5}\ln 2 - \frac{1}{5}\ln 33$.

Salīdzinot iegūtos rezultātus, iegūst pareizu vienādību

$$I=\ln 2+\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{4}\ln\frac{4\sin^2 a_k}{1+8\sin^2 a_k}=\frac{6}{5}\ln 2-\frac{1}{5}\ln 33\quad,\quad a_k=\frac{(2k+1)\pi}{10},$$

jo no tās izriet, ka $\left(2+\dfrac{1}{4\sin^2\dfrac{\pi}{10}}\right)\left(2+\dfrac{1}{4\sin^2\dfrac{3\pi}{10}}\right)=33$, ko var pierādīt tieši.

Secinājums: Rezidiju lietošana integrāļu atrašanai var dot rezultātu, kas ārēji ievērojami atšķiras no tā, ko iegūst ar Ņūtona – Leibnica formulu.

Formulēsim vēl vienu teorēmu, ar kuras palīdzību, lietojot formulu (2.25) var atrast noteikta veida integrāļus.

Teorēma 2.2 Ja $R(\sin x,\cos x)$ ir savu argumentu racionāla funkcija ar kompleksiem koeficientiem un $\beta-\alpha<2\pi$ – reāli skaitļi, tad $\int\limits_{\alpha}^{\beta}R(\sin x,\cos x)dx=$

$$=i\sum_{k}\operatorname{Res}\left\{\frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\ln_0\frac{z\exp\dfrac{(\beta-\alpha)i}{2}-\exp\dfrac{(\beta+\alpha)i}{2}}{\exp(i\beta)-z};z_k\right\},\qquad(2.26)$$

kur summācija notiek pa visiem racionālās punkcijas $R_1(z):=\frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)$ $\overline{C}$ plaknes poliem z_k ieskaitot $z=\infty$. Formulā (2.26) $\ln_0$ zaru izraugās tā, lai punkta $z=\infty$ apkārtnē tam būtu pareizs šāds attīstījums Lorāna rindā:

$$\ln_0\frac{z\exp\dfrac{(\beta-\alpha)i}{2}-\exp\dfrac{(\beta+\alpha)i}{2}}{\exp(i\beta)-z}=ic_0+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\exp(ik\beta)-\exp(ik\alpha)}{kz^k},\quad c_0=\frac{2\pi+\beta-\alpha}{2}.$$

12.Piemērs: Atrast $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{5-4\cos x}$.

Pēc formulas (2.26)

$$I=-i\sum_k \operatorname{Res}\left[\frac{1}{2z^2-5z+2}\ln_0\frac{z\exp\frac{\pi i}{4}-\exp\frac{\pi i}{4}}{\exp\left(\frac{\pi i}{2}\right)-z};z_k\right].$$

Singulārie punkti šajā gadījumā ir $z_1=2$, $z_2=\frac{1}{2}$ (abi vienkāršie poli) un $z=\infty$. Rezidijs punktā $z=\infty$ ir 0, tādēļ

$$I=-\frac{i}{3}\left[\ln_0\frac{2\exp\frac{\pi i}{4}-\exp\frac{\pi i}{4}}{\exp\left(\frac{\pi i}{2}\right)-2}-\ln_0\frac{\exp\frac{\pi i}{4}-2\exp\frac{\pi i}{4}}{2\exp\left(\frac{\pi i}{2}\right)-1}\right] \tag{2.27}$$

Ievērojot formulu $\ln_0 w=\ln|w|+i\arg_0 w$ un to, ka abas izteiksmes formulā (2.27) aiz $\ln_0$ zīmes ir kompleksi saistītie skaitļi, iegūst:

$$I=\frac{1}{3}\left\{\arg_0\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3i\sqrt{2}}{2}\right]-\arg_0\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3i\sqrt{2}}{2}\right]\right\}. \tag{2.28}$$

Atrodam atbilstošās $\arg_0$ vērtības, un no (2.28) iegūstam

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{5-4\cos x}=\frac{1}{3}[(-\pi+arctg3)-(\pi+arctg3)]=\frac{1}{3}\cdot(-2\pi)=-\frac{2\pi}{3}.$$

Šajā nodaļā aplūkotie 5 noteikto integrāļu veidi nebūt nav vienīgie, kuru atrašanai var pielietot rezidijus. Plašāku ieskatu un daudzus citus integrāļu piemērus var atrast grāmatās [2, 3, 5].

3. Rezidiju lietojumi rindu parciālsummu vai summu aprēķināšanā.

Rindu parciālsummu vai summu aprēķināšanā ar rezidijiem, par pamatu kalpo līdzīga shēma kā integrāļiem. Apskata kontūrintegrāli $\oint_C \Phi(z)dz$ un tā vērtību aprēķina divejādi: izmantojot rezidijus un sadalot integrācijas kontūru C vairākos kontūros $C_1, C_2, ..., C_n$. Vēlams integrācijas kontūru C (vai arī funkciju $\Phi(z)$) izvelēties atkarīgu no viena vai vairākiem parametriem, pēc kuriem pāriet uz robežu vienādībā:

$$2\pi i \sum_k \operatorname{Res}[\Phi(z); z_k] = \sum_{m=1}^{n} \oint_{C_m} \Phi(z)dz . \tag{3.1}$$

Ja vienādības (3.1) kreisajā pusē ir meklējama summa (vai rindas summa), bet integrāļus (3.1) labajā pusē pēc robežpārejas var aprēķināt, tad mērķis ir sasniegts. Vajadzības gadījumā šo metodi varam kombinēt ar citām metodēm, piemēram, dažus integrāļus vienādības (3.1) labajā pusē aprēķināt ar rezidijiem, vai arī vienam no integrāļiem vienādības (3.1) labajā pusē zemintegrāļa funkciju attīstīt rindā, integrēt pa locekļiem un iegūt meklējamo rindu, savukārt pēdējos integrāļus un summu vienādības (3.1) kreisajā pusē aprēķināt ar citām metodēm. Atsevišķos gadījumos ir lietderīgi sadalīt summu vienādības (3.1) kreisajā pusē vairākās, no kurām viena ir meklējama, bet otru (vai pārējās) var atrast ar citiem paņēmieniem.

Summējot rindas vai aprēķinot parciālsummas ar rezidiju palīdzību svarīgākā nozīme ir funkcijas Φ un kontūra C izvēlei. Līdzīgi kā integrāļu aprēķināšanā, arī šeit vispārīga algoritma, kā izvēlēties funkciju Φ un kontūru C, nav, tādēļ aplūkosim tikai atsevišķus summu vai rindu tipus, kuriem rezidiju izmantošana ir efektīva. Formulēsim dažas būtiskākās teorēmas.

Teorēma 3.1

Ja funkcija f ir meromorfa vaļējā kompleksā plaknē C un apmierina nosacījumus:

1) neviens no $f(z)$ poliem $a_1, a_2, ..., a_s$ nav vesels skaitlis;

2) eksistē tādu slēgtu kontūru virkne C_n, kurai, ja $n \to +\infty$, $r_n = \min\limits_{\xi \in C_n} |\xi| \to +\infty$, bet $\oint\limits_{C_n} \frac{f(z)}{\sin \pi z} dz \to 0$, tad

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Res}\left[\frac{f(z)}{\sin \pi z}; a_k\right]. \tag{3.2}$$

Piezīme. Teorēma paliek spēkā arī tad, ja kāds no poliem $a_1, a_2, ..., a_s$ ir vesels skaitlis, piemēram $a_k = m$, tikai tādā gadījumā, vienādības (3.2) kreisajā pusē ir summa $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{+\infty} (-1)^n f(n)$, bet labā puse paliek iepriekšējā, tikai, protams, punktā $z = a_k$, kas reizē ir arī funkcijas f pols, mainās pola kārta funkcijai $\frac{f(z)}{\sin \pi z}$. Līdzīgi arī gadījumos, kad vairāki a_j ir veseli skaitļi.

Teorēma 3.2

Ja teorēmas 3.1 formulējumā integrāli $\oint\limits_{C_n} f(z) \frac{dz}{\sin \pi z}$ aizvieto ar $\oint\limits_{C_n} f(z) ctg \pi z dz$, tad

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Res}[f(z) ctg \pi z; a_k]. \tag{3.3}$$

Arī šajā teorēmā, ja kāds no meromorfās funkcijas poliem a_k ir vesels skaitlis, piemēram, $a_j = m$, tad formulas (3.3) vietā iegūst

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Res}[f(z) ctg \pi z; a_k], \tag{3.4}$$

kur jāņem vērā, ka punkts $z = m$ funkcijai $f(z) ctg \pi z$ ir augstākas kārtas pols nekā funkcijai f.

Teorēma 3.3

Ja teorēmas 3.1 formulējumā integrāli $\oint\limits_{C_n} f(z)\frac{dz}{\sin \pi z}$ aizvieto ar $\oint\limits_{C_n} \frac{f(z)}{\cos\frac{\pi z}{2}}dz$ un poli $a_1, a_2, ..., a_s$ nav veseli nepāra skaitļi, tad

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n f(2n+1) = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{s}\operatorname{Re}s\left[\frac{f(z)}{\cos\frac{\pi z}{2}}; a_k\right]. \tag{3.5}$$

Teorēma 3.4

Ja teorēmas 3.1 formulējuma integrāli $\oint\limits_{C_n} f(z)\frac{dz}{\sin \pi z}$ aizvieto ar $\oint\limits_{C_n} f(z) tg\frac{\pi z}{2}dz$, tad

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2n+1) = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{s}\operatorname{Re}s\left[f(z) tg\frac{\pi z}{2}; a_k\right]. \tag{3.6}$$

Pieņemsim, ka $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ ir racionāla funkcija, $m-n\geq 1$ un tās poli $a_1, a_2, ..., a_s, s\leq m$. Tad par $f(z)$ var izraudzīties funkcijas $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, $\frac{P_n(z)\sin xz}{Q_m(z)}, -\pi<x<\pi$, $\frac{P_n(z)\exp(ixz)}{Q_m(z)}, -\pi<x<\pi$, $\frac{P_n(z)\exp(iz(\pi-x))}{Q_m(z)}, 0<x<2\pi$, kuras apmierina teorēmas 3.1 nosacījumus, un katrai no šīm funkcijām iegūst noteiktu summas aprēķināšanas formulu:

1) $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\frac{P_n(k)}{Q_m(k)} = -\pi\sum_{k=1}^{s}\operatorname{Re}s\left[\frac{P_n(z)}{Q_m(z)\sin\pi z}; a_k\right], -\pi<x<\pi; \tag{3.7}$$

2) $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\frac{P_n(k)}{Q_m(k)}\sin kx = -\pi\sum_{k=1}^{s}\operatorname{Re}s\left[\frac{P_n(z)\sin xz}{Q_m(z)\sin\pi z}; a_k\right], -\pi<x<\pi; \tag{3.8}$$

3) $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\frac{P_n(k)}{Q_m(k)}\cos kx = -\pi\sum_{k=1}^{s}\operatorname{Re}s\left[\frac{P_n(z)\cos xz}{Q_m(z)\sin\pi z}; a_k\right], -\pi<x<\pi; \tag{3.9}$$

4) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k \frac{P_n(k)}{Q_m(k)}\exp(ikx) = -\pi\sum_{k=1}^{s}\operatorname{Res}\left[\frac{P_n(z)\exp(ixz)}{Q_m(z)\sin\pi z};a_k\right], -\pi < x < \pi$; (3.10)

5) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k \frac{P_n(k)}{Q_m(k)}\exp(-ikx) = -\pi\sum_{k=1}^{s}\operatorname{Res}\left[\frac{P_n(z)\exp(i(\pi - x)z)}{Q_m(z)\sin\pi z};a_k\right], 0 < x < 2\pi$. (3.11)

Teorēma 3.5

Ja $f(z) = R(\cos z, \sin z)$ ir $\sin z$ un $\cos z$ racionāla funkcija, kurai piemīt īpašības:

1) funkcijai $f(z)$ nav polu uz reālās ass;

2) $f(z) \to 0$, ja $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$;

3) joslā $-\delta < \operatorname{Re} z < 2\pi - \delta$, kur $0 < \delta < \frac{\pi}{n}$, funkcijai $f(z)$ ir poli $a_1, a_2, ..., a_m$, tad

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = -\frac{n}{2}\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}\left[f(z)ctg\frac{\pi z}{2};a_k\right]. \tag{3.12}$$

Līdzīgi kā iepriekšējām teorēmām, tā paliek spēka arī tad, ja daži (vai visi) no poliem $a_1, a_2, ..., a_m$ atrodas uz reālas ass, bet nesakrīt ar funkcijas $ctg\frac{\pi z}{2}$ poliem taisnstūra apgabalā D. Ja kāds no šiem poliem, piemēram, $z = \frac{2l}{n}$ sakrīt ar funkcijas $ctg\frac{\pi z}{2}$ poliem apgabalā D, tad formulas (3.12) kreisajā pusē summā šo saskaitāmo $k = l$ atmet.

Aplūkosim piemērus.

1.Piemērs. Aprēķināt summu $S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2 + an + a^2}, a \neq 0$.

Šajā gadījumā rezidiji jāaprēķina divos 1.kārtas polos $z_1 = -\frac{a}{2}(1 - i\sqrt{3})$ un $z_2 = -\frac{a}{2}(1 + i\sqrt{3})$. Pēc formulas (3.7), pieņemot ka $a > 0$, iegūstam:

$$S=-\pi\left\{\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\left(z^2+az+a^2\right)\sin\pi z};-\frac{a}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\left(z^2+az+a^2\right)\sin\pi z};-\frac{a}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{\pi}{ia\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{\sin\left[\frac{\pi a}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\right]}-\frac{1}{\sin\left[\frac{\pi a}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)\right]}\right\}=$$

$$=\frac{2\pi}{a\sqrt{3}}\operatorname{Im}\frac{1}{\sin\left[\frac{\pi a}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\right]}=\frac{2\pi\cos\frac{\pi a}{2}sh\frac{\pi a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}\left(\sin^2\frac{\pi a}{2}+sh^2\frac{\pi a\sqrt{3}}{2}\right)}.$$

Pēc permanences principa (analītiskām funkcijām visas identitātes, kas pierādītas reālā mainīgā gadījumā, ir pareizas arī kompleksā plaknē) formula ir pareiza arī kompleksiem $a\neq 0$.

<u>2.Piemērs.</u> Aprēķināt summu $S=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2+a^2}$, $\quad a\in R, a\neq 0, -\pi<x<\pi$.

Summu pārveidosim tā, lai varētu pielietot formulu (3.11). Ievērojot, ka aiz summas zīmes ir pāra funkcija attiecībā pret n un šīs funkcijas vērtība ir $\frac{1}{a^2}$, ja $n=0$, iegūstam: $S=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2+a^2}$.

Pēc formulas (3.11):

$$S=\frac{1}{2a^2}-\frac{\pi}{2}\operatorname{Re}\left\{\operatorname{Res}\left[\frac{\exp(iz(\pi-x))}{\left(z^2+a^2\right)\sin\pi z};ia\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{\exp(iz(\pi-x))}{\left(z^2+a^2\right)\sin\pi z};-ia\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2a^2}+\frac{\pi}{4a}\operatorname{Re}\left[\frac{\exp(-a(\pi-x))}{sh\pi a}\right]+\left[\frac{\exp(a(\pi-x))}{sh\pi a}\right]=\frac{1}{2a^2}+\frac{\pi ch(a(\pi-x))}{2ash\pi a}.$$

<u>3.Piemērs.</u> Aprēķināt summu $S=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin kx}{k^3}$, $0<x<\pi$.

Formulu (3.11) tieši izmantot nevar, jo punktā $z=0$ funkcijai ir pols. Saskaņā ar piezīmi teorēmai 3.1, meklējamā summa pēc formulas (3.11) būs šāda:

$$S=\frac{1}{2}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{+\infty}\frac{\sin kx}{k^3}=\frac{\pi}{2}\operatorname{Im}\operatorname{Re}s\left[\frac{\exp(iz(\pi-x))}{z^3\sin\pi z};0\right],$$

jo formulā (3.11) $R(z)=\frac{1}{z^3}$ un vienīgais funkcijas R pols ir $z=0$. Aprēķinot rezidiju 4.kārtas polā $z=0$ pēc formulas (1.11) iegūstam:

$$S=\frac{\pi}{12}\operatorname{Im}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z\exp[iz(\pi-x)]}{\sin\pi z}\right)'''=\frac{\pi}{12}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z\sin[z(\pi-x)]}{\sin\pi z}\right)'''=$$

$$=\frac{\pi}{12}\lim_{z\to 0}[z\cos zx-z\sin zxctg\pi z]'''.$$

Lai aprēķinātu robežu, izteiksmi kvadrātiekavās attīstīsim Maklorēna rindā, izrakstot atklātā veidā rindu locekļus, kas satur z pakāpes līdz trešajai pakāpei ieskaitot, kā arī izmantosim formulu $zctg\pi z=\frac{1}{\pi}\left[B_0-B_2\frac{(2\pi)^2z^2}{2}+O(z^4)\right]$, kur $B_0=1$, $B_2=\frac{1}{6}$ - Bernulli skaitļi:

$$S=\frac{\pi}{12}\lim_{z\to 0}\left[z-\frac{z^3x^2}{2!}+\ldots\frac{1}{\pi}\left(zx-\frac{z^3x^3}{3!}+\ldots\right)\left(1-\frac{4B_2}{2!}z^2\pi^2+\right)\right]'''=$$

$$=\frac{\pi}{12}\lim_{z\to 0}\left[-\frac{x^2z^3}{2}+\frac{x^3z^3}{6\pi}+2B_2\pi xz^3\right]'''=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6\pi}+2B_2\pi x\right).$$

Tā kā Bernullī skaitlis $B_2=\frac{1}{6}$, tad

$$S=\frac{x^3}{12}-\frac{\pi x^2}{4}+\frac{\pi^2x}{6}.$$

Attīstoties skaitļošanas tehnikai, mūsdienās rezidiju lietošana rindu parciālsummu vai summu aprēķināšanā vairs nav tik aktuāla. Arī apskatīto piemēru ar datorprogrammas palīdzību var ļoti vienkārši atrisināt un pārbaudīt iegūto rezultātu. Taču atsevišķos gadījumos kompleksās analīzes metodes var izrādīties efektīvākas.

Atzīmēsim divus gadījumus, kuros ir lietderīga analītisku summēšanas metožu lietošana:

1) Rindas koeficienti ir atkarīgi no parametriem un summas īpašību analīze, lietojot skaitliskās metodes, kļūst sarežģīta.
2) Rindas ir vairākkārtīgas vai arī satur integrāļus (bieži sastopamas fizikā).

Šādos gadījumos kompleksās analīzes lietošana sevi attaisno ar ievērojami uzlabotu tālāko aprēķinu precizitāti.

4.Rezidiju lietojumi citu uzdevumu risināšanā.

Kā pārliecināsimies šajā nodaļā, rezidiju lietojumi nebūt neaprobežojas tikai ar integrāļu un parciālsummu vai summu atrašanu. Aplūkosim piemērus, kuros, iegūtā rezultāta pamatošanai, ērti izmantot tieši rezidiju teoriju.

<u>1.Piemērs</u>. Pieņemsim, ka $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $n \geq 2$ un x ir brīvi izraudzīti kompleksi skaitļi (protams, tie var būt arī reāli), m- nenegatīvs vesels skaitlis, $m \leq n$ un S_m ir šāda summa:

$$
\begin{aligned}
S_m = &\frac{(z_1 - x)^m}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)\ldots(z_1 - z_n)} + \frac{(z_2 - x)^m}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)\ldots(z_2 - z_n)} + \ldots \\
&\ldots + \frac{(z_n - x)^m}{(z_n - z_1)(z_n - z_2)\ldots(z_n - z_{n-1})}.
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

Pierādīt, ka visiem reāliem vai kompleksiem x:

a) $S_m = 0$, ja $m \leq n-2$;

b) $S_m = 1$, ja $m = n-1$;

c) $S_m = z_1 + z_2 + \ldots + z_n - mx$, ja $m = n$.

<u>Pierādījums.</u> a) Aplūko polinomu $P_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$ un funkciju $f(z) = \dfrac{(z-x)^m}{P_n(z)}$.

Aprēķinot $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z); z_k] = S_m$, iegūstam doto summu S_m.

Tiešām, $S_m = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(z_k - x)^m}{P_n'(z_k)} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z); z_k] = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[\dfrac{(z-x)^m}{P_n(z)}; z_k\right]$, jo funkcijai $f(z)$ vienīgie singulārie punkti C plaknē ir vienkāršie poli $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Pēc teorēmas 1.3

$$
\operatorname{Res}\left[\frac{(z-x)^m}{P_n(z)}; \infty\right] = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[\frac{(z-x)^m}{P_n(z)}; z_k\right] = -S_m . \tag{4.2}
$$

Lai atrastu $\mathrm{Res}[f(z);\infty]$, attīstīsim $f(z)$ Lorāna rindā $z=\infty$ apkārtnē un noteiksim koeficientu c_{-1}. Pēc Ņūtona binoma formulas:

$$(z-x)^m = z^m\left[1-\frac{mx}{z}+\frac{m(m-1)x^2}{2!z^2}-O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right]. \tag{4.3}$$

Savukārt, pēc Vjeta formulām:

$$P_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)=z^n\left[1-\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{z}+\frac{\sum\limits_{\substack{j,k=1\\k\geq j}}^{n} z_k z_j}{z^2}-O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right]. \tag{4.4}$$

Dalot gan skaitītāju, gan saucēju ar z^n, iegūstam:

$$\begin{aligned} &z^{m-n}\left[1-\frac{mx}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]\left[1-\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]^{-1}= \\ &=z^{m-n}\left[1-\frac{mx}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]\left[1+\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]= \\ &=z^{m-n}\left[1+\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n-mx}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

No (4.5) atrodam, ka gadījumā, ja $m\leq n-2$, $\mathrm{Res}[f(z);\infty]=0 \Rightarrow S_m=0$. Apgalvojums a) ir pierādīts.

b) Ja $m=n-1$, no (4.5) izriet, ka $\mathrm{Res}[f(z);\infty]=c_{-1}=-1 \Rightarrow S_m=1$. Apgalvojums b) ir pierādīts.

c) Ja $m=n$, no (4.5) izriet, ka

$\mathrm{Res}[f(z);\infty]=-(z_1+z_2+\ldots+z_n-nx)\Rightarrow S_m=z_1+z_2+\ldots+z_n-nx$.

Līdz ar to visi trīs apgalvojumi a), b), un c) ir pierādīti.

Ievietojot $x=0$(jo iegūtās vienādības ir spēkā katram x), iegūsim šādas trīs vienādības:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{z_k^{\ m}}{P_n'(z_k)}=0$, $0\leq m\leq n-2$, m- vesels skaitlis; (4.6)

2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{\;n-1}}{P_n'(z_k)} = 1;$ (4.7)

3) $\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{\;n}}{P_n'(z_k)} = z_1 + z_2 + \ldots + z_n .$ (4.8)

1.Sekas. No (4.6) seko, ka katram polinomam $Q_m(z)$, kura pakāpe ir mazāka vai vienāda ar $n-2$ un $P_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$, ir pareiza vienādība:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{Q_m(z_k)}{P_n'(z_k)} = 0 . \tag{4.9}$$

2.Sekas. No (4.7) seko, ka katram polinomam $Q_{n-1}(z)$ un $P_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$, ir pareiza vienādība:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{Q_{n-1}(z_k)}{P_n'(z_k)} = c_0 , \tag{4.10}$$

kur c_0 - polinoma $Q_{n-1}(z)$ koeficients pie z^{n-1}.

3.Sekas. No (4.8) seko, ka katram polinomam $Q_n(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_{n-1} z + c_n$ un $P_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$, ir pareiza vienādība:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{c_0 \cdot Q_n(z_k)}{P_n'(z_k)} = c_0(z_1 + z_2 + \ldots + z_n) + c_1 , \tag{4.11}$$

kur c_0 - polinoma $Q_n(z)$ koeficients pie z^n, bet c_1 - polinoma $Q_n(z)$ koeficients pie z^{n-1}.

2.Piemērs. Pieņemsim, ka $z_1, z_2, \ldots, z_N$, $N \geq 2$ un x ir brīvi izraudzīti dažādi kompleksi skaitļi (protams, tie var būt arī reāli), m - nenegatīvs vesels skaitlis.

Noteikt, kāda pakāpe ir polinomam

$$S(x)=\sum_{k=1}^{N}\frac{(z_k-x)^{N+m}}{P_N'(z_k)},\ P_N(z)=\prod_{k=1}^{N}(z-z_k), \tag{4.12}$$

un kāds ir polinoma $S(x)$ koeficients pie augstākās x pakāpes?

Atrisinājums. Aplūko polinomu $P_N(z)$ un funkciju $f(z)=\frac{(z-x)^{N+m}}{P_N(z)}$, kā arī kontūrintegrāli $\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$, kur C - riņķa līnija, kurā atrodas visas polinoma $P_N(z)$ saknes - $z_1, z_2, \ldots, z_N$. Šādu riņķa līniju var atrast, jo polinoma $P_N(z)$ sakņu skaits ir galīgs.

Pēc Košī rezidiju teorēmas (skat. teorēmu 1.1), aplūkojamais kontūrintegrālis ir vienāds ar $2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname{Re}s[f(z);z_k]$. Tātad

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{N}\operatorname{Re}s[f(z);z_k]=\sum_{k=1}^{N}\frac{(z_k-x)^{N+m}}{P_N'(z_k)}=S(x). \tag{4.13}$$

Pēc teorēmas 1.3 $S(x)=-\operatorname{Re}s[f(z);\infty]=-c_{-1}$. Savukārt, lai noteiktu koeficientu c_{-1}, attīstīsim funkciju $f(z)$ Lorāna rindā punkta $z=\infty$ apkārtnē:

$$f(z)=\frac{z^{N+m}\left(1-\frac{x}{z}\right)^{N+m}}{z^N\left(1+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots+\frac{a_N}{z^N}\right)}. \tag{4.14}$$

Pārrakstot formulā (4.14) skaitītāju pēc Ņūtona binoma formulas un saīsinot ar z^N, iegūsim:

$$f(z)=\frac{z^m\left(\sum_{k=0}^{N+m}(-1)^k C_{N+m}^k\left(\frac{x}{z}\right)^k\right)}{\left(1+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots+\frac{a_N}{z^N}\right)}=\frac{\sum_{k=0}^{N+m}(-1)^k C_{N+m}^k x^k z^{m-k}}{\left(1+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots+\frac{a_N}{z^N}\right)}, \tag{4.15}$$

kur $a_1, a_2, \ldots, a_N$ - konstantes, kuras var atrast pēc Vjeta formulām, bet C - nozīmē kombināciju skaitu.

Pasvītrosim, ka mūs interesē tikai koeficients c_{-1}, kas faktiski ir rezidijs. Lai atrastu šo koeficientu c_{-1} pie z^{-1} pakāpes, izmantosim nenoteikto koeficientu metodi.

Pieņemsim, ka $f(z)$ ir šādā formā:

$$f(z) = A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} + \ldots + A_0 z^0 + A_{-1} z^{-1} + \ldots + A_{-N} z^{-N}, \tag{4.16}$$

kur $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_0, A_{-1}, \ldots, A_{-N}$ - nenoteiktie koeficienti.

No formulas (4.16) atrodam, ka koeficients pie z^{-1} pakāpes ir A_{-1}. Lai atrastu šo nenoteikto koeficientu, ievietosim formulu (4.16) formulā (4.15). Rezultātā iegūsim:

$$(A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} + \ldots + A_0 z^0 + A_{-1} z^{-1} + \ldots + A_{-N} z^{-N})(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_N}{z^N}) = \sum_{k=0}^{N+m} (-1)^k C_{N+m}^k x^k z^{m-k} \tag{4.17}$$

Salīdzināsim z pakāpes formulas (4.17) kreisajā un labajā pusē. Acīmredzami, ka augstākā z pakāpe ir z^m, kuru kreisajā vienādības (4.17) pusē iegūst A_m reizinot ar 1, savukārt, labajā pusē – ievietojot $k = 0$. Salīdzinot koeficientus pie z^m vienādības (4.17) kreisajā un labajā pusē, secinam, ka $A_m = 1$. Līdzīgi, salīdzinot pārējās z pakāpes, veidosies trīsstūrveida vienādību sistēma, kur katrs nenoteiktais koeficients A_L, $L = m, m-1, \ldots, -N$ izsakāms ar iepriekšējiem nenoteiktajiem koeficientiem:

$$\begin{array}{l|l}
z^m & A_m \cdot 1 = 1 \\
z^{m-1} & A_{m-1} \cdot 1 + A_m \cdot a_1 = -x \cdot C_{N+m}^1 \\
z^{m-2} & A_{m-2} \cdot 1 + A_{m-1} \cdot a_1 + A_m \cdot a_2 = x^2 \cdot C_{N+m}^2 \\
\ldots & \qquad \ldots \\
z^{-1} & A_{-1} \cdot 1 + A_0 \cdot a_1 + A_1 \cdot a_2 + \ldots + A_m \cdot a_{m+1} = (-1)^{m+1} \cdot C_{N+m}^{m+1} \cdot x^{m+1} \\
 & \qquad \ldots
\end{array} \tag{4.18}$$

kur $a_1, a_2, \ldots, a_N$ - konstantes, kuras ir atrodamas pēc Vjeta formulām.

Izsakot no formulas (4.18) mūs interesējošo koeficientu A_{-1}, iegūsim:

$$A_{-1} = (-1)^{m+1} \cdot x^{m+1} \cdot C_{N+m}^{m+1} - Q(x), \tag{4.19}$$

kur $Q(x) = A_0 \cdot a_1 + A_1 \cdot a_2 + \ldots + A_m \cdot a_{m+1}$.

Ņemot vērā to, pēc kādas shēmas tiek pakāpeniski atrasti nenoteiktie koeficienti, kā arī, ievērojot, ka katrs iepriekšējais nenoteiktais koeficients ir par vienu pakāpi zemākas kārtas polinoms attiecībā pret x, nekā tam sekojošais, secinam, ka vienādībā (4.19) polinoma $Q(x)$ pakāpe nepārsniegs m. Tātad dotā polinoma $S(x)$ pakāpe ir $m+1$, un koeficients pie tās ir $(-1)^{m+1} \cdot C_{N+m}^{m+1}$, kur C - kombināciju skaits.

<u>Atbilde</u>. $S(x)$ ir $m+1$ pakāpes polinoms un $S(x) = (-1)^{m+1} \cdot C_{N+m}^{m+1} \cdot x^{m+1} + \ldots$.

<u>3.Piemērs</u>. Atrisināt vienādojumu:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{(z_k - x)^N}{P_N'(z_k)} = 0, \tag{4.20}$$

ja z_k ir polinoma $P_N(z)$ nulles, kuras visas ir vienkāršas.

Izmantojot 1.piemēra c) rezultātu, iegūstam vienādību:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{(z_k - x)^N}{P_N'(z_k)} = z_1 + z_2 + \ldots + z_N - Nx = 0. \tag{4.21}$$

No formulas (4.21) atrodam, ka $x = \dfrac{z_1 + z_2 + \ldots + z_N}{N}$.

<u>Atbilde</u>. Vienādojumam (4.20) ir tikai viena sakne – skaitļu $z_1, z_2, \ldots, z_N$ vidējais aritmētiskais, kaut arī vienādībā (4.20) formāli ir N-tās pakāpes polinoms.

<u>4.Piemērs</u>. Atrisināt vienādojumu:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{(z_k - x)^{N+1}}{P_N'(z_k)} = 0, \tag{4.22}$$

ja z_k ir polinoma $P_N(z)$ nulles, kuras visas ir vienkāršas.

Vienādojuma (4.22) atrisinājums, izmantojot 2.piemērā aplūkoto nenoteikto koeficientu metodi, reducējas uz kvadrātvienādojuma

$$x^2 \cdot C_{N+1}^2 + a_1 \cdot x \cdot C_{N+1}^1 + a_1^{\ 2} - a_2 = 0\,, \tag{4.23}$$

kur $a_1 = z_1 + z_2 + \ldots + z_N$, $a_2 = \sum_{\substack{j,k=1 \\ k \geq j}}^{N} z_k \cdot z_j$, C - kombināciju skaits, atrisināšanu.

Vienādojuma (4.23) saknes atrod pēc parastām kvadrātvienādojuma sakņu formulām. Sīkāk tās neizrakstīsim.

Nobeigums.

Diplomdarba 4.nodaļā, apskatot kombinatorās summas, netika aplūkots gadījums, kad viena vai vairākas polinoma $P_N(z)$ saknes ir vienādas. Šādā gadījumā rezidijs jārēķina augstākas kārtas polos, kas, protams, ievērojami sarežģī aprēķinus. Izvēršot pētījumus šajā jomā, būtu iespējams iegūt jaunus, varbūt pat ļoti nozīmīgus rezultātus.

Ļoti iespējams, ka aplūkotie kombinatoriskie polinomi ir saistīti ar simetriskiem polinomiem attiecībā pret $z_1, z_2, \ldots, z_N$, jo tos atrod pēc Vjeta formulām, kurās ir simetriskie polinomi. Arī šajā virzienā ir iespējas turpināt pētījumus.

Darbā netika apskatīti rezidiju lietojumi meromorfo un veselo funkciju teorijā, kā arī logaritmiskais rezidijs, kuru parasti lieto vienādojuma sakņu skaita noteikšanai.

Literatūra.

1.T.Cīrulis,D.Cīrule. Kompleksā mainīgā funkciju teorija 1.daļa. – Rīga, 2003,

156 lpp.

2. T.Cīrulis,D.Cīrule. Kompleksā mainīgā funkciju teorija 2.daļa. – Rīga, 2003,

321 lpp.

3.T.Cīrulis,O.Dzenītis.Kompleksā mainīgā funkciju teorija piemēros. – Rīga, 1983, 328 lpp.

4.T.Cīrulis,Dz.Damberga. Kompleksā mainīgā funkciju teorijas metodes. – Rīga, 1992, 130 lpp.

5.M.Jevgrafovs, J.Sidorovs, M.Fedoruks, M.Šabuņins, K.Bežanovs. Uzdevumu krājums analītisku funkciju teorijā (krievu valodā). – Maskava, 1972, 415 lpp.

Diplomdarbs izpildīts

Latvijas Universitātes

Vispārīgās matemātikas katedrā

Fizikas un matemātikas

Fakultātes 5.kursa students

(st.apl.Nr. SkMa 040037)

.... J.Gavrikovs

Darbs izpildīts .... Dr.hab.mat.prof. T.Cīrulis

Diplomdarbs iesniegts katedrā 2006. gada ”......” maijā.

Diplomdarbs aizstāvēts valsts pārbaudījumu komisijas sēdē

2006.gada ”.....” jūnijā ar atzīmi ....

Protokols Nr. ....

Pārbaudījumu komisijas sekretārs: ....