

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

TOMAŠEVSKA PROBLĒMA

BAKALaura DARBS

Autors: **Kristīne Danemane**

Stud. apl. Mate040012

Darba vadītājs: Asoc. prof., Dr. math.
Andrejs Cibulis

RĪGA 2008

Anotācija

Bakalaura darbā aplūkota Tomaševska problēma par noteikta veida vienības vektoru skaitu Eiklīda telpā R^n . Darbā iegūts tās atrisinājums, ja $2 \leq n \leq 6$.

Annotation

Tomaszewski's problem about the number of certain type of unit vectors in space R^n has been considered in this bachelor's work. The solution has been obtained for $2 \leq n \leq 6$.

Saturs

Ievads	4
1. Īsas ziņas par Lagranžu	6
2. Lagranža reizinātāju metode	7
3. Uzdevuma formulējums	14
4. Hipotēzes pierādījums gadījumā $n = 2$	15
5. Hipotēzes pierādījums gadījumā $n = 3$	16
6. Hipotēzes pierādījums gadījumā $n = 4$	18
7. Hipotēzes pierādījums gadījumā $n = 5$	24
8. Hipotēzes pierādījums gadījumā $n = 6$	35
Secinājumi	42
Literatūra	43
1. pielikums. Georga Enģeļa risinājums, ja $n = 4$	44
2. pielikums. Studenta risinājums	46
3. pielikums. Programmas ar Maple 10	51

Ievads

Bakalaura darbā aplūkotā problēma aizgūta no žurnālā *The American Mathematical Monthly* publicētā raksta [1], kur dots šāds formulējums:

„Tomaszewski [1986, 280] considered n real numbers a_1, \dots, a_n satisfying $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ and asked if, of the 2^n sums of the form $\sum \pm a_i$, it is possible that there are more with $|\sum \pm a_i| > 1$ than there are with $|\sum \pm a_i| \leq 1$. Ron Holzman (wrc) proves that the proportion with smaller sum is at least $63/169 > 0.37278$.”

Problēmas saturs ir šāds. Aplūko vienības vektoru $a = (a_1, \dots, a_n)$, t. i., $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$, un izveido visas iespējamās izteiksmes

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n.$$

To skaits ir 2^n . Jautājums: **vai var gadīties, ka to izteiksmju, kuras lielākas nekā 1 ir vairāk nekā to, kuras mazākas nekā 1?**

Problēmas risināšanai minētos 2^n skaitļus iedalīsim divās kopās A un B , kur kopā A iekļausim visus tos skaitļus, kuru modulis ir lielāks par 1, t. i.,

$$\left| \sum_{i=1}^n \pm a_i \right| > 1,$$

un kopā B tos, kuri nepārsniedz 1, t. i.,

$$\left| \sum_{i=1}^n \pm a_i \right| \leq 1.$$

Hipotēze: $|B| \geq |A|$,

t. i., kopas B elementu skaits ir lielāks vai vienāds ar kopas A elementu skaitu.

Atzīmēsim, ka vispārīgā gadījumā problēma nav atrisināta. Darbā secīgi aplūkoti gadījumi $n = 2, 3, 4, 5$ un 6 . Tajos visos hipotēzes pareizību izdodas pierādīt.

Pierādījumā ir izmantota Lagranža reizinātāju metode. Darbā turklāt pētīts jautājums par kopas A elementu skaitu. Šim nolūkam ir izveidota programma, kas ar Maple 10 palīdzību atvieglo skaitlisku piemēru konstruēšanu. Cita starpā iegūts negaidīts rezultāts, proti, ka kopa A nevar sastāvēt tikai no viena elementa telpā \mathbb{R}^5 .

Darba teorētiskajā daļā ir aprakstīta Lagranža reizinātāju metode un īsas ziņas par Lagranžu.

6. nodaļā ir dota interesanta vēsturiska informācija. Izklāstīts bijušā LU pasniedzēja Georga Enģeļa risinājums, ja $n = 4$, kura kopija skatāma 1. pielikumā. Savukārt 2. pielikumā skatāms kāda LU studenta risinājums. Tas aizņem tikai četras lapas un pretendē uz problēmas atrisinājumu vispārīgā gadījumā. Jāuzsver, ka šis risinājums nav korekts un risinājuma ideja, vispārīgi runājot, nav realizējama.

1. Īsas ziņas par Lagranžu

Lagranžs (Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813) ir franču matemātiķis un mehāniķis. 17 gadu vecumā sāka pasniegt lekcijas Artilērijas skolā Turīnā, profesors no 1754. gada.

Centās attīstīt matemātisko analīzi, iztiekot bez robežas un bezgalīgi mazu lielumu jēdzienu ieviešanas.

Darbojies mehānikā, ģeometrijā, matemātiskajā analīzē, algebrā, skaitļu teorijā u. c. Matemātiskajā analīzē pazīstama Teilora formula ar atlikuma locekli Lagranža formā, Lagranža galīgo pieaugumu formula, Lagranža interpolācijas polinoms u. c. viņa vārdā nosaukti jēdzieni. Matemātiskajā fizikā – atrada stīgas svārstību vienādojuma atrisinājumu.

Variāciju rēķinu uzdevumu risināšanai Lagranžs *Analītiskajā mehānikā* 1788. gadā formulēja savu slaveno reizinātāju likumu. Jāuzsver, ka to viņš formulēja bezgalīgu dimensiju situācijā un tikai vēlāk aptuveni pēc 10 gadiem *Analītisko funkciju teorijā* 1797. gadā viņš savu metodi pielietoja galīgu dimensiju uzdevumiem [2, 3].

Saskaņā ar [4] Lagranžs esot itāļu matemātiķis un astronoms, kurš savu lielāko mūža daļu pavadījis Francijā.

2. Lagranža reizinātāju metode

Pats Lagranžs savu principu raksturo tā [2, 12. lpp]:

„Var izteikt šādu vispārīgu principu. Ja tiek meklēts maksimums vai minimums vairākargumentu funkcijai, starp kuras mainīgajiem pastāv ar vienu vai vairākiem vienādojumiem uzdotas sakarības, tad pie minimizējamās funkcijas jāpieskaita funkcijas, kuras uzdod saites vienādojumus un kuras jāpareizina ar nenoteiktiem koeficientiem un tad jāmeklē maksimums vai minimums konstruētajai summai it kā mainīgie būtu neatkarīgi. Iegūtie vienādojumi kopā ar saišu vienādojumiem kalpos visu nezināmo noteikšanai.”

Praksē parasti sastopami tādi funkcijas minimizācijas vai maksimizācijas uzdevumi, kuros funkcijas lokālo vai globālo ekstrēmu meklē nevis visā tās definīcijas apgabalā, bet gan kādā tā apakškopā, kuru nosaka zināmi **ierobežojumi (saites)**, kas doti vienādību vai nevienādību veidā.

Pieņemsim, ka funkcija $f:U \rightarrow R$, kur $U \subset X$ un X – metriskā telpa, funkcijas $g_i:U \rightarrow R$, un

$$g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, m.$$

1. definīcija. Punktu $u^0 \in U$ sauc par **pieļaujamu punktu** (attiecībā uz saitēm $g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, m$), ja, $g_i(u^0) \leq 0, i = 1, \dots, m$.

Apzīmēsim ar Q visu pieļaujamo punktu kopu, t. i., $Q = \{u \in U \mid g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$.

2. definīcija. Pieļaujamu punktu $u^0 \in U$ sauc par funkcijas **nosacītā (globālā) minimuma punktu attiecībā uz saitēm** $g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, m$, ja

$$\forall u^0 \in Q: f(u) \geq f(u^0). \quad (1)$$

Līdzīgi definē **stingrā nosacītā minimuma punktu**, 2. definīcijā ņemot prasību

$$\forall u^0 \in Q \setminus \{u^0\}: f(u) > f(u^0),$$

un **lokālā nosacītā minimuma punktu**, aizvietojot (1) ar prasību:

$$\exists K_\varepsilon(u^0) \subset X: \forall u \in Q \cap K_\varepsilon(u^0): f(u) > f(u^0)..$$

Ja minimizācijas uzdevumā ierobežojumi nav doti, tad to sauc par **brīvās (beznosacījuma) minimizācijas** uzdevumu.

1. teorēma. (Par nosacītā minimuma nepieciešamo nosacījumu).

Ja u^0 ir funkcijas $f:U \rightarrow R$ ($U \subset R^{k+m}$) nosacītā minimuma punkts attiecībā uz saitēm $g_i(u) = 0, i = 1, \dots, m$, turklāt

1) f un g_i ir nepārtraukti diferencējamas punkta u^0 apkārtnē,

$$2) \text{ Jakobi determinants } \frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(u_{k+1}, \dots, u_{k+m})} \Big|_{u^0} \neq 0,$$

tad eksistē tāds Lagranža vektors $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$, ka u^0 apmierina vienādojumu sistēmu

$$\frac{\partial f}{\partial u_j} \Big|_{u^0} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \Big|_{u^0} = 0, \quad j = 1, \dots, k+m. \quad (2)$$

Piezīme. Viegli redzēt, ka (2) var iegūt, aplūkojot funkciju

$$\Lambda(u, \lambda^0) = f(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 g_i(u)$$

un pielīdzinot nullei visus tās parciālos atvasinājumus pēc u_j punktā u^0 :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u_j} \Big|_{u^0} = 0, \quad j = 1, \dots, k+m.$$

3. definīcija. Funkciju $\Lambda(u, \lambda) = f(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(u)$ sauc par **Lagranža funkciju**

(klasisko) uzdevumam par funkcijas f nosacīto minimizāciju attiecībā uz saitēm $g_i(u) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

1. teorēma apgalvo to, ka pastāvot tās nosacījumiem, nosacītā minimuma punkts ir Lagranža funkcijas stacionārs punkts.

Ļoti liela ir šīs teorēmas praktiskā nozīme, meklējot punktu u^0 , kas varētu būt uzdevuma

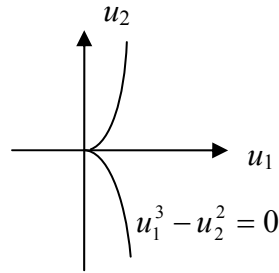
$$\begin{aligned} f &\rightarrow \min \\ g_i(u) &= 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

atrisinājums. Ievērojot to, ka nosacītā minimuma punkts u^0 ir pieļaujams, tas apmierina vienādojumus $g_i(u) = 0$, $i = 1, \dots, m$. Šie vienādojumi kopā ar sistēmu (1) izveido $k + 2m$

vienādojumu sistēmu, no kuras precīzi vai tuvināti var atrast $k + 2m$ nezināmos

$$u_1^0, \dots, u_{k+m}^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$$

1. piemērs. Aplūkosim uzdevumu par funkcijas $f(u_1, u_2) = u_1$ nosacīto minimizāciju attiecībā uz saiti $g_1(u_1, u_2) = u_1^3 - u_2^2 = 0$. Attēlojot saites vienādojumu kā līniju (u_1, u_2) -plaknē 2.1. att.,



2.1. att.

redzam, ka mazākā u_1 vērtība būs tikai tam līnijas punktam, kuram $u_1 = 0$, tātad punktam $(0, 0)$. Saskaņā ar 1. teorēmu punktam $(0, 0)$ jābūt Lagranža funkcijas stacionāram punktam. Lagranža funkcija šim uzdevumam ir

$$\Lambda(u, \lambda_1) = u_1 + \lambda_1(u_1^3 - u_2^2).$$

Tās parciālie atvasinājumi ir $\frac{\partial \Lambda}{\partial u_1} = 1 + 3\lambda_1 u_1^2$, $\frac{\partial \Lambda}{\partial u_2} = -2\lambda_1 u_2$ un kā redzam $\frac{\partial \Lambda}{\partial u_1} \Big|_{(0,0)} - 1 \neq 0$.

Pārbaudot vai izpildās 1. teorēmas nosacījumi, redzam, ka $\frac{\partial g_1}{\partial u_1} \Big|_{(0,0)} = 3u_1^2 \Big|_{(0,0)} = 0$ un

$\frac{\partial g_1}{\partial u_2} \Big|_{(0,0)} = -2u_2 \Big|_{(0,0)} = 0$, tātad punktā $(0, 0)$ neizpildās 1. teorēmas otrais nosacījums.

2. teorēma. (Par nosacītā minimuma nepieciešamo nosacījumu).

Ja \hat{u} ir funkcijas $f : U \rightarrow R$ ($U \subset R^{k+m}$) nosacītā minimuma punkts attiecībā uz saitēm $g_i(u) = 0$, $i = 1, \dots, m$, un funkcijas f un $g_i : U \rightarrow R$ ir nepārtraukti diferencējamas kādā punkta u^0 apkārtnē, tad eksistē Lagranža (vispārinātais) vektors

$$\lambda^0 = (\lambda_0^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0) \neq 0$$

tāds, ka

$$\frac{\partial f}{\partial u_j} \Big|_{u^0} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \Big|_{u^0} = 0, \quad j = 1, \dots, k + m. \quad (3)$$

Piezīme. Viegli redzēt, ka (3) var iegūt, aplūkojot **vispārināto Lagranža funkciju**

$$\Lambda(u, \lambda^0) = \lambda_0^0 f(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 g_i(u)$$

un pielīdzinot nullei visus tās parciālos atvasinājumus pēc u_j punktā u^0 :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u_j} \Big|_{\hat{u}} = 0, \quad j = 1, \dots, k + m.$$

Tātad 2. teorēma apgalvo, ka funkcijas f nosacītā minimuma punkts ir vispārinātās Lagranža funkcijas stacionārs punkts.

4. definīcija. Ja nosacīti stacionāram punktam u^0 atbilst tikai tādi Lagranža vektori $(\lambda_0^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$, kuriem $\lambda_0^0 \neq 0$, tad u^0 sauc par **normālu** nosacīti stacionāru punktu. Ja eksistē Lagranža vektors $(0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0) \neq 0$, tad u^0 **nav normāls** nosacīti stacionārs.

2. piemērs. Minimizēt $f(u_1, u_2) = u_1$, ja saite ir $u_1^3 - u_2^2 = 0$.

Vispārinātā Lagranža funkcija ir

$$\Lambda(u, \lambda^0) = \lambda_0^0 u_1 + \lambda_1^0 (u_1^3 - u_2^2)$$

Atvasinot to un pielīdzinot atvasinājumus nullei, iegūstam

$$\lambda_0^0 + 3\lambda_1^0 u_1^2 = 0, \quad -2\lambda_1^0 u_2 = 0.$$

Pieņemsim, ka $\lambda_0^0 = 0$, tad $\lambda_1^0 \neq 0$, jo $(\lambda_0^0, \lambda_1^0) \neq 0$, tādēļ $u_2^0 = 0$. No saites vienādojuma izriet, ka arī $u_1^0 = 0$. Tātad $(0, 0)$ ir nosacīti stacionārs punkts ar Lagranža vektoru $(0, 1)$, tādēļ tas nav normāls stacionārs punkts. Tomēr apskatot 1. piemēru, noskaidrojām, ka tas ir minimuma punkts un normālu nosacīti stacionāru punktu šim uzdevumam nav.

Piezīme. Augstāk minētā terminoloģija ņemta no [5], vietām nedaudz pielabojot valodu un izklāstu.

Problēmai, kur saites ir uzdodas nevienādību veidā

$$(P) \quad \begin{cases} f(u) \rightarrow \min \\ u \in R^n \\ g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, m, \end{cases}$$

pie nosacījuma, ka $g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, m$, definē netukšu kopu

$$Q = \{u \in R^n \mid g_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, m\} \quad (4)$$

ir pierādītas šādas teorēmas.

3. teorēma. Ja

- funkcijas $f, g_j, j = 1, \dots, m$, ir definētas telpā R^n un ir nepārtrauktas;
- eksistē elements $u_* \in R^n$ tāds, ka $g_j(u_*) \leq 0, j = 1, \dots, m$;
- izpildās vismaz viens no sekojošiem nosacījumiem:

$$f(u) \xrightarrow{|u| \rightarrow \infty} \infty,$$

kopa Q (definēta ar (4)) ir ierobežota,

tad problēmai (P) eksistē atrisinājums.

4. teorēma. funkcijas $f, g_i, i = 1, \dots, m$, pieder $C^1(R^n)$ un ja $u^0 \in R^n$ ir problēmas **(P)** atrisinājums, tad eksistē skaitļi (Lagranža reizinātāji) $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ tādi, ka

- ne visi skaitļi $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ ir vienādi ar nulli;
- $\lambda_0 \geq 0, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m$;
- $\lambda_i g_i(u^0) = 0, i = 1, \dots, m$;
- $\lambda_0 f'(u^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g'_i(u^0) = 0$.

Problēmas (P) risināšanas shēma, izmantojot Lagranža reizinātāju metodi ir šāda:

4. teorēma dod ekstrēma nepieciešamos nosacījumus, kuri pierakstāmi sistēmas veidā

$$\begin{cases} \lambda_0^0 f'(u^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 g'_i(u^0) = 0, \\ \lambda_j^0 g_j(u^0) = 0, j = 1, \dots, m, \\ \lambda_0^0 \geq 0, \lambda_i^0 \geq 0, i = 1, \dots, m; \lambda_0^0 + \lambda_1^0 + \dots + \lambda_m^0 > 0, \\ u^0 \in R^n. \end{cases} \quad (5)$$

Analogi, kā meklējot funkcijas $f: R^n \rightarrow R$ minimumu ir jāatrod f stacionārie punkti, tā problēmas **(P)** gadījumā ir jāatrod pāri

$$(\lambda, u) \in R^{m+1} \times R^n, \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m), u = (u_1, \dots, u_m),$$

kuri apmierina prasības (5). Tos atrod tā:

1. solī no (5) pirmajiem n vienādojumiem izsaka nezināmos $u \in R^n$ kā aizklātu funkciju no

$$\lambda \in R^{m+1}, x = x(\lambda).$$

2. solī no pārējām (5) sakarībām, kas tagad ir formā

$$\begin{aligned} \lambda_i g_i(u(\lambda)) &= 0, i = 1, \dots, m \\ \lambda_i &\geq 0, i = 0, 1, \dots, m; \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m > 0, \end{aligned}$$

nosaka iespējamās λ vērtības, $\lambda = \lambda^0 = (\lambda_0^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$

3. solī pārbauda, kuri elementi $\lambda \in R^{m+1}, u = u(\lambda)$, apmierina ierobežojumus

$$g_i(u(\lambda^0)) \leq 0, i = 1, \dots, m,$$

un uz tiem salīdzina vērtības $f(u(\lambda^0))$.

3. piemērs. Aplūkosim problēmu

$$(P1) \quad \begin{cases} f(u_1, u_2, u_3) = u_1 + 2u_2 + 4u_3 \rightarrow \min \\ u \in R^3 \\ g(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - 1 \leq 0. \end{cases}$$

1. etaps: *atrisinājuma eksistence*.

Pārlicināties, vai eksistē elements, kurš apmierina ierobežojumus. Skaidrs, ka elements $(0, 0, 0)$ apmierina ierobežojumu.

Tā kā

$$g(u_1, u_2, u_3) \geq \|(u_1, u_2, u_3)\|^2 - 1,$$

tad

$$g(u_1, u_2, u_3) \rightarrow \infty, \text{ ja } \|(u_1, u_2, u_3)\| \rightarrow \infty.$$

Tātad ir apmierināti 3. teorēmas nosacījumi un problēmai **(PI)** eksistē atrisinājums.

2. etaps: *ekstrēma nepieciešamie nosacījumi*.

Saskaņā ar 4. teorēmu problēmas **(PI)** ekstrēma nepieciešamie nosacījumi ir tāda pāra

$$\left((\lambda_0^0, \lambda_1^0), (u_1^0, u_2^0, u_3^0) \right) \in R^2 \times R^3$$

eksistence, kam izpildās

$$\begin{aligned} \lambda_0^0 \nabla f(u_1^0, u_2^0, u_3^0) + \lambda_1^0 \nabla g(u_1^0, u_2^0, u_3^0) &= 0, \\ \lambda_1^0 g(u_1^0, u_2^0, u_3^0) &= 0, \\ \lambda_0^0 \geq 0, \lambda_1^0 \geq 0, \lambda_0^0 + \lambda_1^0 &> 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Izrakstot (6) atklātā veidā iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{aligned} \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2u_1 \\ 2u_2 \\ 2u_3 \end{pmatrix} &= 0, \\ \lambda_1 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - 1) &= 0, \\ \lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_0 + \lambda_1 &> 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Acīmredzot $\lambda_1 \neq 0$, jo, ja $\lambda_1 = 0$, tad no (7) pirmajiem vienādojumiem sekotu, ka arī $\lambda_0 = 0$, bet tas ir pretrunā ar pēdējo (7) sakarību. Izdalot visas (7) sakarības ar λ_1 , iegūstam, ka, nesamazinot vispārīgumu, var pieņemt, ka $\lambda_1 = 1$. tad (7) pirmie 3 vienādojumi dos meklējamās funkcijas

$$u_1 = -\frac{1}{2}\lambda_0, u_2 = -\lambda_0, u_3 = -2\lambda_0. \quad (8)$$

Tā kā $\lambda_1 = 1$, tad ceturtais (7) vienādojums dod

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\lambda_0^2 + \lambda_0^2 + 4\lambda_0^2 &= 1, \\ \lambda_0 &= \sqrt{\frac{4}{21}}, \end{aligned}$$

jo λ_0 jābūt nenegatīvam.

Ievietojot iegūto λ_0 vērtību sakarībā (8), iegūstam, ka eksistē tikai viens pāris

$$\left((\lambda_0^0, \lambda_1^0), (u_1^0, u_2^0, u_3^0) \right) = \left(\left(\sqrt{\frac{4}{21}}, 1 \right), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{21}}, -\sqrt{\frac{4}{21}}, -2\sqrt{\frac{4}{21}} \right) \right), \quad (9)$$

kurš apmierina ekstrēma nepieciešamos nosacījumus.

Tā kā problēmas **(PI)** atrisinājuma eksistence ir pierādīta, tad pāris, kuru dod formula (9) ir šīs problēmas atrisinājums. [6, 26-33]

Piezīme. Ar Koši nevienādību, uzdevumu var atrisināt daudz vienkāršāk:

$$\begin{aligned} |1 \cdot x + 2 \cdot y + 4 \cdot z|^2 &\leq (1^2 + 2^2 + 4^2)(x^2 + y^2 + z^2) \leq 21 \cdot 1 \Rightarrow \\ &-\sqrt{21} \leq |x + 2y + 4z| \leq \sqrt{21}. \end{aligned}$$

Punktu, kurš dod minimumu var noteikt no proporcionalitātes nosacījuma

$$1: 2: 4 = x: y: z.$$

No vienādības

$$x^2 + (2x)^2 + (4x)^2 = 1 \text{ jeb } 21x^2 = 1$$

iegūstam minimuma punktu

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{4}{\sqrt{21}} \right).$$

Ieteicama grāmata par ekstrēmu uzdevumiem, kurā var atrast informāciju par Lagranža reizinātāju metodi un tās vispārinājumiem ir [7].

3. Uzdevuma formulējums

Dots: $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$, $a_i \in R$, tātad tiks apskatīti skaitļi no reālo skaitļu kopas, kuru

kvadrātu summa ir vienāda ar 1.

$\sum_{i=1}^n (\pm a_i)$ - 2^n skaitļi, kurus var iedalīt kopās:

A : ietilpst skaitļi, kuru modulis ir lielāks par 1: $\left| \sum_{i=1}^n \pm a_i \right| > 1$;

B : ietilpst skaitļi, kuru modulis ir mazāks vai vienāds ar 1: $\left| \sum_{i=1}^n \pm a_i \right| \leq 1$.

Hipotēze: Kopas B elementu skaits ir lielāks vai vienāds ar kopas A elementu skaitu: $|B| \geq |A|$.

Piezīme: Uzdevuma pierādījumā tiks pieņemts, ka $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$. Tā var rīkoties, jo apskatot šādas summas $\sum_{i=1}^n (\pm a_i)$ tiek apskatīti visi iespējamie gadījumi, tāpēc skaitļu secība rezultātu neietekmē. Pozitīvus skaitļus var ņemt tāpēc, ka apskata skaitļu kvadrātus un modulus. Šajos gadījumos rezultāts būs pozitīvs neatkarīgi no tā vai skaitlis ir pozitīvs vai negatīvs.

4. Hipotēzes pierādījums gadījumā $n = 2$

Dots: $\sum_{i=1}^2 a_i^2 = 1, a_1, a_2 \in R.$

$\sum_{i=1}^2 (\pm a_i)$ dod $2^2 = 4$ izteiksmes:

$$a_1 + a_2$$

$$a_1 - a_2$$

$$-a_1 + a_2$$

$$-a_1 - a_2$$

Tā kā jāaplūko šo izteiksmju absolūtās vērtības, tad atliek tikai divas dažādās izteiksmes:

$$|a_1 + a_2|$$

$$|a_1 - a_2|$$

Jāpierāda: $|B| \geq |A|.$

Pierādījums. Var uzskatīt, ka $a_1 \geq a_2$. Aplūkosim divas izteiksmes:

$$S_1 = a_1 + a_2$$

$$S_2 = a_1 - a_2.$$

Pārbaudīsim, vai ir iespējams, ka abas izteiksmes vienlaicīgi ir lielākas par 1. Ja

$$S_i > 1, i = 1, 2,$$

tad saskaitot iegūtu:

$$2a_1 > 2 \Rightarrow a_1 > 1,$$

kas ir pretrunā ar doto $a_1^2 + a_2^2 = 1.$

Secinājums: nav iespējams, ka kopā A ir divi elementi.

Kopas A elementu skaits

$|A| = 1.$ Ir iespējams, ka viena izteiksme ir lielāka par 1, bet otra mazāka par 1.

Piemērs: $a_1 = 0.8, a_2 = 0.6$

$$a_1^2 + a_2^2 = 0.64 + 0.36 = 1$$

$$S_1 = 1.4 > 1, S_2 = 0.2 \leq 1.$$

$|A| = 0.$ Ir iespējams, ka visas izteiksmes nepārsniedz 1.

Piemērs: $a_1 = 1, a_2 = 0.$

$$S_1 = S_2 = 1$$

Tātad vienmēr $|B| \geq |A|,$ ja $n = 2.$

5. Hipotēzes pierādījums gadījumā $n = 3$

Dots: $\sum_{i=1}^3 a_i^2 = 1, a_1, a_2, a_3 \in R$

$\sum_{i=1}^3 (\pm a_i)$ tātad ir iespējamās $2^3 = 8$ izteiksmes:

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 \\ & a_1 + a_2 - a_3 \\ & a_1 - a_2 + a_3 \\ & a_1 - a_2 - a_3 \\ & -a_1 + a_2 + a_3 \\ & -a_1 + a_2 - a_3 \\ & -a_1 - a_2 + a_3 \\ & -a_1 - a_2 - a_3 \end{aligned}$$

Izteiksmes var apvienot četrās šādās:

$$\begin{aligned} & |a_1 + a_2 + a_3| \\ & |a_1 - a_2 + a_3| \\ & |a_1 - a_2 - a_3| \\ & |a_1 + a_2 - a_3| \end{aligned}$$

Jāpierāda: $|B| \geq |A|$

Pierādījums:

Apzīmē:

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_2 = a_1 + a_2 - a_3$$

$$S_3 = a_1 - a_2 + a_3$$

$$S_4 = |a_1 - a_2 - a_3|$$

Lai atvieglotu pētījumu, tiks meklētas izteiksmes ar lielākajām iespējamajām vērtībām.

Ja divu izteiksmju starpība ir lielāka vai vienāda ar nulli, tad izteiksme, kas ir mazināmā ir lielāka vai vienāda par izteiksmi, kas ir mazinātājs.

Tiek salīdzinātas izteiksmes:

$$S_1 \geq S_2 \Leftrightarrow S_1 - S_2 = a_1 + a_2 + a_3 - a_1 - a_2 + a_3 = 2a_3 \geq 0,$$

$$S_2 \geq S_3 \Leftrightarrow S_2 - S_3 = a_1 + a_2 - a_3 - a_1 + a_2 - a_3 = 2a_2 - 2a_3 \geq 0, \text{ jo } a_2 \geq a_3,$$

$S_3 \geq S_4$. Jāapskata divi gadījumi.

$$\text{Ja } S_4 = a_1 - a_2 - a_3 \Rightarrow S_3 \geq S_4 \Leftrightarrow S_3 - S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_1 + a_2 + a_3 = 2a_3 \geq 0.$$

Ja $S_4 = -a_1 + a_2 + a_3 \Rightarrow S_3 \geq S_4 \Leftrightarrow S_3 - S_4 = a_1 - a_2 + a_3 + a_1 - a_2 - a_3 = 2a_1 - 2a_2 \geq 0$, jo $a_1 \geq a_2$.

Tātad ir spēkā šāda sakarība:

$$S_1 \geq S_2 \geq S_3 \geq S_4$$

Pārbauda vai ir iespējams, ka trīs izteiksmes ir lielākas par 1 un viena no izteiksmēm nepārsniedz 1.

Tā kā izteiksmes S_1, S_2, S_3 ir izteiksmes ar lielākajām vērtībām, tiks pieņemts, ka

$$S_i > 1, i = 1, 2, 3.$$

Saskaitot izteiksmes $S_2 > 1$ un $S_3 > 1$ iegūst: $2a_1 > 2 \Rightarrow a_1 > 1$, kas ir pretrunā ar doto $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$.

Secinājums: nav iespējams, ka kopā A ir trīs elementi.

Kopas A elementu skaits

$|A| = 2$. Ir iespējams, ka divas izteiksmes ir lielākas par 1 un divas izteiksmes nepārsniedz 1.

Piemērs: $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_3 = 0$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + 0 = 1$$

$$S_1 = S_2 \approx 1.41 > 1$$

$$S_3 = S_4 = 0 \leq 1$$

$|A| = 1$. Ir iespējams, ka viena izteiksme ir lielāka par 1 un trīs izteiksmes nepārsniedz 1.

Piemērs: $a_1 = 0.8$, $a_2 = 0.6$, $a_3 = 0$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0.64 + 0.36 + 0 = 1$$

$$S_1 = S_2 = 1.4 > 1$$

$$S_3 = S_4 = 0.2 \leq 1$$

$|A| = 0$. Ir iespējams, ka četras izteiksmes ir mazākas vai vienādas ar 1.

Piemērs: $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$$

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 1 \leq 1$$

Tātad vienmēr $|B| \geq |A|$, ja $n = 3$.

6. Hipotēzes pierādījums gadījumā $n = 4$

Dots: $\sum_{i=1}^4 a_i^2 = 1, a_1, a_2, a_3, a_4 \in R$

$\sum_{i=1}^4 (\pm a_i)$ tātad ir iespējamas $2^4 = 16$ izteiksmes:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$	$-a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
$a_1 - a_2 + a_3 + a_4$	$-a_1 - a_2 + a_3 + a_4$
$a_1 - a_2 - a_3 + a_4$	$-a_1 - a_2 - a_3 + a_4$
$a_1 - a_2 + a_3 - a_4$	$-a_1 - a_2 + a_3 - a_4$
$a_1 - a_2 - a_3 - a_4$	$-a_1 - a_2 - a_3 - a_4$
$a_1 + a_2 - a_3 + a_4$	$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4$
$a_1 + a_2 - a_3 - a_4$	$-a_1 + a_2 - a_3 - a_4$
$a_1 + a_2 - a_3 - a_4$	$-a_1 + a_2 - a_3 - a_4$

Izteiksmes var apvienot astoņās šādās:

$$\begin{aligned}
 &|a_1 + a_2 + a_3 + a_4| \\
 &|a_1 - a_2 + a_3 + a_4| \\
 &|a_1 - a_2 - a_3 + a_4| \\
 &|a_1 - a_2 + a_3 - a_4| \\
 &|a_1 - a_2 - a_3 - a_4| \\
 &|a_1 + a_2 - a_3 + a_4| \\
 &|a_1 + a_2 - a_3 - a_4| \\
 &|a_1 + a_2 + a_3 - a_4|
 \end{aligned}$$

Jāpierāda: $|B| \geq |A|$

Pierādījums:

Apzīmē:

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_2 = a_1 + a_2 + a_3 - a_4$$

$$S_3 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4$$

$$S_4 = a_1 + a_2 - a_3 - a_4$$

$$S_5 = a_1 - a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_6 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$$

$$S_7 = |a_1 - a_2 - a_3 + a_4|$$

$$S_8 = |a_1 - a_2 - a_3 - a_4|$$

Safīdzina izteiksmes:

$$S_1 \geq S_2 \Leftrightarrow S_1 - S_2 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = 2a_4 \geq 0$$

$$S_2 \geq S_3 \Leftrightarrow S_2 - S_3 = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 2a_3 - 2a_4 \geq 0, \text{ jo } a_3 \geq a_4$$

$$S_3 \geq S_4 \Leftrightarrow S_3 - S_4 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_1 - a_2 + a_3 + a_4 = 2a_4 \geq 0$$

$$S_3 \geq S_5 \Leftrightarrow S_3 - S_5 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_1 + a_2 - a_3 - a_4 = 2a_2 - 2a_3 \geq 0, \text{ jo } a_2 \geq a_3$$

$$S_3 \geq S_6 \Leftrightarrow S_3 - S_5 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 2a_2 - 2a_3 + 2a_4 \geq 0, \text{ jo}$$

$$a_2 \geq a_3 \geq a_4$$

$S_3 \geq S_7$. Jāapskata divi gadījumi.

$$\text{Ja } S_7 = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 \Rightarrow$$

$$S_3 \geq S_7 \Leftrightarrow S_3 - S_7 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_1 + a_2 + a_3 - a_4 = 2a_2 \geq 0$$

$$\text{Ja } S_7 = -a_1 + a_2 + a_3 - a_4 \Rightarrow$$

$$S_3 \geq S_7 \Leftrightarrow S_3 - S_7 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = 2a_1 - 2a_3 + 2a_4 \geq 0, \text{ jo}$$

$$a_1 \geq a_3 \geq a_4$$

$S_3 \geq S_8$. Jāapskata divi gadījumi.

$$\text{Ja } S_8 = a_1 - a_2 - a_3 - a_4 \Rightarrow$$

$$S_3 \geq S_8 \Leftrightarrow S_3 - S_8 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2a_2 + 2a_4 \geq 0$$

$$\text{Ja } S_8 = -a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \Rightarrow$$

$$S_3 \geq S_8 \Leftrightarrow S_3 - S_8 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_1 - a_2 - a_3 - a_4 = 2a_1 - 2a_3 \geq 0, \text{ jo } a_1 \geq a_3$$

Tātad S_1, S_2, S_3 ir izteiksmes ar lielākajām vērtībām.

Tā kā S_1, S_2, S_3 ir izteiksmes ar lielākajām vērtībām, tad pārbaudot vai ir iespējams, ka piecas izteiksmes ir lielākas par 1 un trīs izteiksmes ir mazākas vai vienādas ar 1 pieņem, ka $S_i > 1, i=1, 2, 3$.

Saskaitot $S_3^2 > 1$ ar $S_6^2 > 1$, iegūst:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2a_1a_2 - 2a_1a_3 + 2a_1a_4 - 2a_2a_3 + 2a_2a_4 - 2a_3a_4 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 2a_1a_2 + 2a_1a_3 - 2a_1a_4 - 2a_2a_3 + 2a_2a_4 - 2a_3a_4 > 2$$

Izmantojot doto $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1$, izdalot ar 2, savēlot līdzīgos locekļus un vēlreiz izdalot ar 2 iegūst:

$$-a_2a_3 + a_2a_4 - a_3a_4 > 0 \text{ pretruna, jo } a_3 \geq a_4$$

Saskaitot $S_3^2 > 1$ ar $S_7^2 > 1$, analogiski iegūst:

$$-a_1a_3 + a_1a_4 - a_3a_4 > 0 \text{ pretruna, jo } a_3 \geq a_4$$

Saskaitot $S_3^2 > 1$ ar $S_8^2 > 1$, analogiski iegūst:

$$-a_1a_3 + a_2a_4 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_2 \ \& \ a_3 \geq a_4$$

No tā seko, ka S_6, S_7, S_8 nevar būt lielākas par viens, tātad $S_6, S_7, S_8 \in B$

Paliek neapskatīts tikai gadījums, kad $S_i > 1, i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Saskaitot $S_4 > 1$ ar $S_5 > 1$, iegūst:

$$a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_1 - a_2 + a_3 + a_4 = 2a_1 > 2 \Rightarrow a_1 > 1 \text{ pretruna ar doto}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1.$$

Secinājums: nav iespējams, ka kopā A ir pieci elementi.

Kopas A elementu skaits

$|A| = 4$. Ir iespējams, ka četras izteiksmes ir lielākas par 1 un četras izteiksmes ir mazākas vai vienādas ar 1.

Piemērs: $a_1 = 0.7, a_2 = 0.7, a_3 = 0.1, a_4 = 0.1$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 0.49 + 0.49 + 0.01 + 0.01 = 1$$

$$S_1 = 1.6 > 1$$

$$S_2 = S_3 = 1.4 > 1$$

$$S_4 = 1.2 > 1$$

$$S_5 = S_8 = 0.2 \leq 1$$

$$S_6 = S_7 = 0 \leq 1$$

$|A| = 3$. Ir iespējams, ka trīs izteiksmes ir lielākas par 1 un piecas izteiksmes ir mazākas vai vienādas ar 1.

Piemērs: $a_1 = \frac{\sqrt{14}}{5}, a_2 = \frac{3}{5}, a_3 = \frac{1}{5}, a_4 = \frac{1}{5}$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = \frac{14}{25} + \frac{9}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} = 1$$

$$S_1 \approx 1.75 > 1$$

$$S_2 = S_3 \approx 1.35 > 1$$

$$S_4 \approx 0.95 \leq 1$$

$$S_5 \approx 0.55 \leq 1$$

$$S_6 = S_7 \approx 0.15 \leq 1$$

$$S_8 = 0.25 \leq 1$$

$|A| = 2$. Ir iespējams, ka divas izteiksmes ir lielākas par 1 un sešas izteiksmes ir mazākas vai vienādas ar 1.

Piemērs: $a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.3$, $a_3 = 0.3$, $a_4 = 0.1$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 0.81 + 0.09 + 0.09 + 0.01 = 1$$

$$S_1 = 1.6 > 1$$

$$S_2 = 1.4 > 1$$

$$S_3 = S_5 = 1 \leq 1$$

$$S_4 = S_6 = 0.8 \leq 1$$

$$S_7 = 0.4 \leq 1$$

$$S_8 = 0.2 \leq 1$$

$|A| = 1$. Ir iespējams, ka viena izteiksme ir lielāka par 1 un septiņas izteiksmes ir mazākas vai vienādas ar 1.

Piemērs: $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = 0.5$, $a_4 = 0.5$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 = 1$$

$$S_1 = 2 > 1$$

$$S_2 = S_3 = S_5 = S_8 = 1 \leq 1$$

$$S_4 = S_6 = S_7 = 0 \leq 1$$

$|A| = 0$. Ir iespējams, ka visas astoņas izteiksmes ir mazākas vai vienādas ar 1.

Piemērs: $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1$$

$$S_i = 1 \leq 1, i = 1, 2, \dots, 8$$

Tātad vienmēr $|B| \geq |A|$, ja $n = 4$.

Uzdevums pierādīt hipotēzi $n = 4$ gadījumā kādreiz tika piedāvāts kā konkursa uzdevums.

Aprakstīts bijušā LU pasniedzēja G. Eņģeļa risinājums:

a) Pieņemsim, ka $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq 0$ (beigās parādīsim, ka šis ierobežojums nav būtisks) un $\sum_{i=1}^4 a_i^2 = 1$. Acīmredzot $a_1 \leq 1$. Ja $|(a, \delta)| \leq 1$, teiksim, ka vektors δ der vektoram

b) Acīmredzot $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \leq a_1 - a_4 \leq 1$ un arī $|(a_1 - a_2) - (a_3 - a_4)| \leq 1$.

Tāpēc vektori $(1, -1, 1, -1)$, $(1, -1, -1, 1)$, $(-1, 1, 1, -1)$ un $(-1, 1, -1, 1)$ der visiem (nenegatīviem) vektoriem a.

$$c) (a_1 - a_2 - a_3 - a_4)^2 = \sum_1^4 a_i^2 - 2a_1a_2 - 2a_1a_3 - 2a_1a_4 + 2a_2a_3 + 2a_2a_4 =$$

$$= 1 - 2a_2(a_1 - a_3) - 2a_3(a_1 - a_4) - 2a_4(a_1 - a_2) \leq 1.$$

Tātad $|a_1 - a_2 - a_3 - a_4| \leq 1$ un vektori $(1, -1, -1, -1)$, $(-1, 1, 1, 1)$ der visiem (nenegatīviem) a.

$$d) (a_1 \pm (a_2 - a_3 - a_4))^2 = a_1^2 \pm 2a_1(a_2 - a_3 - a_4) + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 2a_2a_3 - 2a_2a_4 + 2a_3a_4 =$$

$$(a_1 \pm (a_2 - a_3 - a_4))^2 = a_1^2 \pm 2a_1(a_2 - a_3 - a_4) + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 2a_2a_3 - 2a_2a_4 + 2a_3a_4 =$$

$$1 \pm 2a_1(a_2 - a_3 - a_4) - 2a_2a_3 - 2a_4(a_2 - a_3).$$

No šejienes redzams:

$$\text{ja } a_2 - a_3 - a_4 \geq 0, \text{ tad } (a_1 - (a_2 - a_3 - a_4))^2 \leq 1,$$

$$\text{ja } a_2 - a_3 - a_4 < 0, \text{ tad } (a_1 + (a_2 - a_3 - a_4))^2 \leq 1.$$

Tātad:

$$\text{ja } a_2 - a_3 - a_4 \geq 0, \text{ tad der vektori } (1, -1, 1, 1) \text{ un } (-1, 1, -1, -1);$$

$$\text{ja } a_2 - a_3 - a_4 < 0, \text{ tad der vektori } (1, 1, -1, -1) \text{ un } (-1, -1, 1, 1).$$

$$\text{ja } a_2 - a_3 - a_4 < 0, \text{ tad } (a_1 + (a_2 - a_3 - a_4))^2 \leq 1.$$

$$e) \text{ Piemērs } a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, a_3 = a_4 = 0 \text{ rāda, ka ne katram a der } (1, 1, -1, -1).$$

$$\text{Piemērs } a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ rāda, ka ne katram a der } (1, -1, 1, 1).$$

f) Ir parādīts, ka ne katram pozitīvam vektoram der vismaz 8 vektori δ . Ja dotais vektors nav pozitīvs, tad varam pieņemt, ka $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq |a_4|$ un derīgs vektoram δ iegūst, piemēroti mainot δ koordinātu zīmes.

G. Eņģeļa risinājumā punktā b) aprakstītā sakarība $|(a_1 - a_2) - (a_3 - a_4)| \leq 1$ ir patiesa, jo $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq 0$ un $a_1 \leq 1$, tātad arī $(a_1 - a_2) \leq 1$ & $(a_3 - a_4) \leq 1$ un atņemot šādus divus skaitļus, to starpības modulis būs mazāks vai vienāds ar viens.

Īsāks risinājums (A. Cibulis)

Izmantojot nosacījumu $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq 0$, un kāpināšanu kvadrātā, iegūstam, ka pēdējie trīs skaitļi no šādiem 8 skaitļiem

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_2 = a_1 + a_2 + a_3 - a_4$$

$$S_3 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4$$

$$S_4 = a_1 - a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_5 = a_1 + a_2 - a_3 - a_4$$

$$S_6 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$$

$$S_7 = |a_1 - a_2 - a_3 + a_4|$$

$$S_8 = |a_1 - a_2 - a_3 - a_4|$$

nepārsniedz 1 :

$$S_8^2 = 1 - 2a_1a_2 - 2a_1a_3 - 2a_1a_4 + 2a_2a_3 + 2a_2a_4 + 2a_3a_4 \leq 1 \Rightarrow |S_8| \leq 1,$$

$$S_7^2 = 1 - 2a_1a_2 - 2a_1a_3 + 2a_1a_4 + 2a_2a_3 - 2a_2a_4 - 2a_3a_4 \leq 1 \Rightarrow |S_7| \leq 1,$$

$$S_6^2 = 1 - 2a_1a_2 + 2a_1a_3 - 2a_1a_4 - 2a_2a_3 + 2a_2a_4 - 2a_3a_4 \leq 1 \Rightarrow |S_6| \leq 1,$$

Pierādīsim, ka vismaz viens no skaitļiem S_4 un S_5 arī nepārsniedz 1. Tiešām, ja

$$S_4 > 1 \text{ \& } S_5 > 1 \Rightarrow S_4 + S_5 = 2a_1 > 2 \Rightarrow a_1 > 1, \text{ kas ir pretrunā ar nosacījumu } \sum_{i=1}^4 a_i^2 = 1.$$

7. Hipotēzes pierādījums gadījumā $n = 5$

Dots: $\sum_{i=1}^5 a_i^2 = 1, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in R$

$\sum_{i=1}^5 (\pm a_i)$ tātad ir iespējamas $2^5 = 32$ izteiksmes, kuras var apvienot sešpadsmit šādās:

$$\begin{aligned} &|a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5| \\ &|a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5| \\ &|a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5| \\ &|a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5| \\ &|a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5| \\ &|a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5| \\ &|a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5| \\ &|a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5| \\ &|a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5| \\ &|a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5| \\ &|a_1 + a_2 - a_3 - a_4 - a_5| \\ &|a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5| \\ &|a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5| \\ &|a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5| \\ &|a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + a_5| \\ &|a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5| \end{aligned}$$

Jāpierāda: $|B| \geq |A|$

<p>Apzīmē:</p> $\begin{aligned} S_1 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ S_2 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 \\ S_4 &= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 \\ S_5 &= a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ S_6 &= a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 \\ S_7 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 \\ S_8 &= a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 \end{aligned}$	$\begin{aligned} S_9 &= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \\ S_{10} &= a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5 \\ S_{11} &= a_1 + a_2 - a_3 - a_4 - a_5 \\ S_{12} &= a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 \\ S_{13} &= a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 \\ S_{14} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5 \\ S_{15} &= a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + a_5 \\ S_{16} &= a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \end{aligned}$
---	---

Vispirms tiek meklētas lielākās izteiksmes. Viegli redzēt, ka S_1, S_2, S_3 ir lielākas par pārējām.

Salīdzina izteiksmes:

$$S_1 \geq S_2 \Leftrightarrow S_1 - S_2 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + a_5 = 2a_5 \geq 0$$

$$S_2 \geq S_3 \Leftrightarrow S_2 - S_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 = 2a_4 - 2a_5 \geq 0, \text{ jo } a_4 \geq a_5$$

$$S_3 \geq S_4 \Leftrightarrow S_3 - S_4 = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5 = 2a_3 - 2a_4 \geq 0, \text{ jo}$$

$$a_3 \geq a_4$$

$$S_3 \geq S_5 \Leftrightarrow S_3 - S_5 = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_1 + a_2 - a_3 - a_4 - a_5 = 2a_2 - 2a_4 \geq 0, \text{ jo}$$

$$a_2 \geq a_4$$

$$S_3 \geq S_6 \Leftrightarrow S_3 - S_6 = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 = 2a_5 \geq 0$$

$$S_3 \geq S_7 \Leftrightarrow S_3 - S_7 = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 = 2a_2 \geq 0$$

$$S_3 \geq S_8 \Leftrightarrow S_3 - S_8 = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5 = 2a_3 \geq 0$$

$$S_3 \geq S_9 \Leftrightarrow S_3 - S_9 = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = 2a_3 - 2a_4 + 2a_5 \geq 0, \text{ jo}$$

$$a_3 \geq a_4 \geq a_5$$

$$S_3 \geq S_{10} \Leftrightarrow S_3 - S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 = 2a_2 - 2a_4 + 2a_5 \geq 0,$$

$$\text{jo } a_2 \geq a_4 \geq a_5$$

$S_3 \geq S_{11}$. Jāapskata divi gadījumi.

$$\text{Ja } S_{11} = a_1 + a_2 - a_3 - a_4 - a_5 \Rightarrow$$

$$S_3 \geq S_{11} \Leftrightarrow S_3 - S_{11} = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2a_3 + 2a_5 \geq 0$$

$$\text{Ja } S_{11} = -a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \Rightarrow$$

$$S_3 \geq S_{11} \Leftrightarrow S_3 - S_{11} = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + a_1 + a_2 - a_3 - a_4 - a_5 = 2a_1 + 2a_2 - 2a_4 \geq 0,$$

$$\text{jo } a_2 \geq a_4$$

$S_3 \geq S_{12}$. Jāapskata divi gadījumi.

$$\text{Ja } S_{12} = a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 \Rightarrow$$

$$S_3 \geq S_{12} \Leftrightarrow S_3 - S_{12} = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2a_2 + 2a_3 + 2a_5 \geq 0$$

$$\text{Ja } S_{12} = -a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \Rightarrow$$

$$S_3 \geq S_{12} \Leftrightarrow S_3 - S_{12} = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 = 2a_1 - 2a_4 \geq 0, \text{ jo}$$

$$a_1 \geq a_4$$

$S_3 \geq S_{13}$. Jāapskata divi gadījumi.

$$\text{Ja } S_{13} = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 \Rightarrow$$

$$S_3 \geq S_{13} \Leftrightarrow S_3 - S_{13} = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 = 2a_2 + 2a_3 - 2a_4 \geq 0,$$

jo $a_3 \geq a_4$

$$\text{Ja } S_{13} = -a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 \Rightarrow$$

$$S_3 \geq S_{13} \Leftrightarrow S_3 - S_{13} = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 = 2a_1 + 2a_5 \geq 0$$

$S_3 \geq S_{14}$. Jāapskata divi gadījumi.

$$\text{Ja } S_{14} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5 \Rightarrow$$

$$S_3 \geq S_{14} \Leftrightarrow S_3 - S_{14} = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 = 2a_2 + 2a_3 - 2a_4 \geq 0,$$

jo $a_3 \geq a_4$

$$\text{Ja } S_{14} = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 \Rightarrow$$

$$S_3 \geq S_{14} \Leftrightarrow S_3 - S_{14} = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5 = 2a_2 + 2a_3 \geq 0$$

$S_3 \geq S_{15}$. Jāapskata divi gadījumi:

$$\text{Ja } S_{15} = a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + a_5 \Rightarrow$$

$$S_3 \geq S_{15} \Leftrightarrow S_3 - S_{15} = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 = 2a_2 + 2a_3 \geq 0$$

$$\text{Ja } S_{15} = -a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 \Rightarrow$$

$$S_3 \geq S_{15} \Leftrightarrow S_3 - S_{15} = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + a_5 = 2a_1 - 2a_4 + 2a_5 \geq 0,$$

jo $a_1 \geq a_4$

$S_3 \geq S_{16}$. Jāapskata divi gadījumi.

$$\text{Ja } S_{16} = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \Rightarrow$$

$$S_3 \geq S_{16} \Leftrightarrow S_3 - S_{16} = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = \\ = 2a_2 + 2a_3 - 2a_4 + 2a_5 \geq 0, \text{ jo } a_3 \geq a_4$$

$$\text{Ja } S_{16} = -a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 \Rightarrow$$

$$S_3 \geq S_{16} \Leftrightarrow S_3 - S_{16} = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 = 2a_1 \geq 0$$

Tātad S_1, S_2, S_3 ir izteiksmes ar lielākajām vērtībām.

Tā kā S_1, S_2, S_3 ir izteiksmes ar lielākajām vērtībām, tad pārbaudot hipotēzi var uzskatīt, ka $S_i > 1, i = 1, 2, 3$.

Teorēma. Starp jebkuriem deviņiem skaitļiem S_i vismaz nepārsniedz 1.

Teorēmas pierādījumā tiks izmantota tabula, kura ir sastādīta, kāpinot

$S_i, i = 1, \dots, 16$ kvadrātā un ar \pm atzīmējot koeficienta pie $a_i a_j$ zīmi.

Zīmju tabula $n=5$

	a_1a_2	a_1a_3	a_1a_4	a_1a_5	a_2a_3	a_2a_4	a_2a_5	a_3a_4	a_3a_5	a_4a_5
S_1^2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
S_2^2	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-
S_3^2	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-
S_4^2	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+
S_5^2	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+
S_6^2	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+
S_7^2	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-
S_8^2	+	-	-	+	-	-	+	+	-	-
S_9^2	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-
S_{10}^2	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-
S_{11}^2	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+
S_{12}^2	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+
S_{13}^2	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+
S_{14}^2	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+
S_{15}^2	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-
S_{16}^2	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-

Pierādījums:

1. Pieņem, ka $S_7 > 1$, $S_k > 1$, $k \geq 8$

Saskaitot $S_7^2 > 1$ ar $S_8^2 > 1$, pēc 7.1. tabulas redzams, ka

$$1 - 2a_1a_4 + 2a_1a_5 - 2a_2a_3 - 2a_4a_5 + 1 > 2 \Rightarrow -a_1a_4 + a_1a_5 - a_2a_3 - a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_4 \geq a_5$$

Analoģiski iegūst:

$$S_7^2 + S_9^2 > 2 \Rightarrow -a_2a_3 + a_2a_4 - a_2a_5 - a_3a_4 + a_3a_5 - a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_3 \geq a_4 \geq a_5$$

$$S_7^2 + S_{10}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 - a_2a_3 - a_4a_5 > 0 \text{ pretruna}$$

$$S_7^2 + S_{11}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_4 - a_2a_3 - a_2a_5 + a_3a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_2 \geq a_3$$

$$S_7^2 + S_{12}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 - a_1a_4 + a_2a_4 + a_3a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_2 \geq a_3$$

$$S_7^2 + S_{13}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 + a_1a_5 - a_2a_5 - a_3a_4 > 0 \text{ pretruna, jo } a_2 \geq a_5$$

$$S_7^2 + S_{14}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 + a_1a_3 - a_1a_4 - a_2a_3 + a_2a_4 - a_3a_4 > 0 \text{ pretruna, jo } a_2 \geq a_3 \geq a_4$$

$$S_7^2 + S_{15}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 - a_1a_4 + a_1a_5 + a_2a_4 - a_2a_5 - a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_4 \geq a_5$$

$$S_7^2 + S_{16}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 - a_3a_4 + a_3a_5 - a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_4 \geq a_5$$

Secinājums: Starp jebkuriem diviem skaitļiem S_7, S_k vismaz viens pieder kopai B , ja $8 \leq k \leq 16$

2. Pieņem, ka $S_{10} > 1, S_k > 1, k = 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16$

$$S_{10}^2 + S_7^2 > 2 \text{ pretrunu ieguva iepriekš.}$$

$$S_{10}^2 + S_8^2 > 2 \Rightarrow -a_2a_3 - a_2a_4 + a_2a_5 + a_3a_4 - a_3a_5 - a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_2 \geq a_3 \geq a_5$$

$$S_{10}^2 + S_{11}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_5 - a_2a_3 - a_2a_4 + a_3a_4 > 0 \text{ pretruna, jo } a_2 \geq a_3$$

$$S_{10}^2 + S_{12}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 - a_1a_5 + a_2a_5 + a_3a_4 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4$$

$$S_{10}^2 + S_{13}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 + a_1a_4 - a_2a_4 - a_3a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_2 \geq a_4$$

$$S_{10}^2 + S_{14}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 + a_1a_3 - a_1a_5 - a_2a_3 + a_2a_5 - a_3a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_2 \geq a_3 \geq a_5$$

$$S_{10}^2 + S_{15}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 + a_3a_4 - a_3a_5 - a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4$$

$$S_{10}^2 + S_{16}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 + a_1a_4 - a_1a_5 - a_2a_4 + a_2a_5 - a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_2 \geq a_4 \geq a_5$$

Secinājums: Starp jebkuriem diviem skaitļiem S_{10}, S_k vismaz viens pieder kopai B , ja $k = 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16$.

3. Pieņem, ka $S_{11} > 1, S_k > 1, k = 5, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 16$

$$S_{11}^2 + S_7^2 > 2 \ \& \ S_{11}^2 + S_{10}^2 > 2 \text{ pretrunu ieguva iepriekš.}$$

$$S_{11}^2 + S_5^2 > 2 \Rightarrow -a_2a_3 - a_2a_4 - a_2a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$$

$$S_{11}^2 + S_{12}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_3 - a_1a_4 - a_1a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4$$

$$S_{11}^2 + S_{13}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_3 - a_2a_4 - a_2a_5 + a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_2 \geq a_4$$

$$S_{11}^2 + S_{14}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_4 - a_1a_5 - a_2a_3 + a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_4$$

$$S_{11}^2 + S_{15}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_3 - a_1a_4 - a_2a_5 + a_3a_4 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_3$$

$$S_{11}^2 + S_{16}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_3 - a_1a_5 - a_2a_4 + a_3a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_3$$

Secinājums: Starp jebkuriem diviem skaitļiem S_{11}, S_k vismaz viens pieder kopai B , ja $k = 5, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 16$.

4. Pieņem, ka $S_{12} > 1, S_k > 1, k = 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16$

$$\text{Saskaitot } S_{12}^2 + S_7^2 > 2 \ \& \ S_{12}^2 + S_{10}^2 > 2 \ \& \ S_{12}^2 + S_{11}^2 > 2 \text{ pretrunu ieguva iepriekš.}$$

$$S_{12}^2 + S_8^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_3 - a_1a_4 + a_2a_5 + a_3a_4 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_5$$

$$S_{12}^2 + S_9^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_3 - a_1a_5 + a_2a_4 + a_3a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4$$

$$S_{12}^2 + S_{13}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 - a_1a_3 + a_2a_3 + a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$$

$$S_{12}^2 + S_{14}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 - a_1a_4 - a_1a_5 + a_2a_4 + a_2a_5 + a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_2 \geq a_4 \geq a_5$$

$$S_{12}^2 + S_{15}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 - a_1a_3 - a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4$$

$$S_{12}^2 + S_{16}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 - a_1a_3 - a_1a_5 + a_2a_3 + a_2a_5 + a_3a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_5$$

Secinājums: Starp jebkuriem diviem skaitļiem S_{12} , S_k vismaz viens pieder kopai B , ja $k = 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16$.

5. Pieņem, ka $S_{13} > 1$, $S_k > 1$, $k = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16$

Saskaitot $S_{13}^2 + S_7^2 > 2$ & $S_{13}^2 + S_{10}^2 > 2$ & $S_{13}^2 + S_{11}^2 > 2$ & $S_{13}^2 + S_{12}^2 > 2$ pretrunu ieguva iepriekš.

$$S_{13}^2 + S_8^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_3 + a_1a_5 - a_2a_4 - a_3a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_3 \geq a_5$$

$$S_{13}^2 + S_9^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_3 + a_1a_4 - a_2a_5 - a_3a_4 > 0 \text{ pretruna, jo } a_3 \geq a_4$$

$$S_{13}^2 + S_{14}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 - a_3a_4 - a_3a_5 + a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_3 \geq a_4$$

$$S_{13}^2 + S_{15}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 - a_1a_3 + a_1a_5 + a_2a_3 - a_2a_5 - a_3a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_2 \geq a_5$$

$$S_{13}^2 + S_{16}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 - a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 - a_2a_4 - a_3a_4 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_2 \geq a_4$$

Secinājums: Starp jebkuriem diviem skaitļiem S_{13} , S_k vismaz viens pieder kopai B , ja $k = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16$.

6. Pieņem, ka $S_{14} > 1$, $S_k > 1$, $k = 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16$

Saskaitot $S_{14}^2 + S_7^2 > 2$ & $S_{14}^2 + S_{10}^2 > 2$ & $S_{14}^2 + S_{11}^2 > 2$ & $S_{14}^2 + S_{12}^2 > 2$ & $S_{14}^2 + S_{13}^2 > 2$ pretrunu ieguva iepriekš.

$$S_{14}^2 + S_5^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 + a_1a_3 - a_2a_3 + a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$$

$$S_{14}^2 + S_8^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_4 - a_2a_3 + a_2a_5 - a_3a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_3 \geq a_5$$

$$S_{14}^2 + S_9^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_5 - a_2a_3 + a_2a_4 - a_3a_4 > 0 \text{ pretruna, jo } a_3 \geq a_4$$

$$S_{14}^2 + S_{15}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 - a_1a_4 + a_2a_4 - a_3a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_2$$

$$S_{14}^2 + S_{16}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 - a_1a_5 + a_2a_5 - a_3a_4 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_2$$

Secinājums: Starp jebkuriem diviem skaitļiem S_{14} , S_k vismaz viens pieder kopai B , ja $k = 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16$.

7. Pieņem, ka $S_{15} > 1$, $S_k > 1$, $k = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16$

$$S_{15}^2 + S_7^2 > 2 \text{ & } S_{15}^2 + S_{10}^2 > 2 \text{ & } S_{15}^2 + S_{11}^2 > 2 \text{ & } S_{15}^2 + S_{12}^2 > 2 \text{ & } S_{15}^2 + S_{13}^2 > 2 \text{ & }$$

$$S_{15}^2 + S_{14}^2 > 2 \text{ pretrunu ieguva iepriekš.}$$

$$S_{15}^2 + S_8^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_3 - a_1a_4 + a_1a_5 + a_3a_4 - a_3a_5 - a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_3 \geq a_5$$

$$S_{15}^2 + S_9^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_3 + a_2a_4 - a_2a_5 - a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4$$

$$S_{15}^2 + S_{16}^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 - a_1a_3 + a_2a_3 - a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_1 \geq a_2$$

Secinājums: Starp jebkuriem diviem skaitļiem S_{15} , S_k vismaz viens pieder kopai B , ja

$k = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16$.

8. Pieņem, ka $S_{16} > 1$, $S_k > 1$, $k = 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$

$$S_{16}^2 + S_7^2 > 2 \ \& \ S_{16}^2 + S_{10}^2 > 2 \ \& \ S_{16}^2 + S_{11}^2 > 2 \ \& \ S_{16}^2 + S_{12}^2 > 2 \ \& \ S_{16}^2 + S_{13}^2 > 2 \ \& \ S_{16}^2 + S_{14}^2 > 2 \ \&$$

$$S_{16}^2 + S_{15}^2 > 2 \text{ pretrunu ieguva iepriekš.}$$

$$S_{16}^2 + S_5^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_2 - a_1a_4 - a_2a_4 + a_3a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$$

$$S_{16}^2 + S_8^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_3 - a_2a_4 + a_2a_5 - a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_4 \geq a_5$$

$$S_{16}^2 + S_9^2 > 2 \Rightarrow -a_1a_3 + a_1a_4 - a_1a_5 - a_3a_4 + a_3a_5 - a_4a_5 > 0 \text{ pretruna, jo } a_3 \geq a_4 \geq a_5$$

Secinājums: Starp jebkuriem diviem skaitļiem S_{16} , S_k vismaz viens pieder kopai B , ja

$k = 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$.

No šīs teorēmas seko, ka ir vismaz astoņi tādi skaitļi, kuri nevar būt lielāki par 1. Tātad nav iespējams, ka $|A| > |B|$.

Kopas A elementu skaits.

$|A| = 8$. Ir iespējams, ka astoņas izteiksmes ir lielākas par 1 un citas astoņas izteiksmes ir mazākas vai vienādas ar 1.

Piemērs: $a_1 = 0.8$, $a_2 = 0.6$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 0.64 + 0.36 = 1$$

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_6 = S_8 = S_9 = S_{11} = 1.41 > 1$$

$$S_5 = S_7 = S_{10} = S_{12} = S_{13} = S_{14} = S_{15} = S_{16} = 0.2 \leq 1$$

$|A| = 7$. Ir iespējams, ka septiņas izteiksmes ir lielākas par 1 un deviņas izteiksmes ir mazākas vai vienādas ar 1.

Piemērs: $a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.4$, $a_3 = 0.1$, $a_4 = 0.1$, $a_5 = 0.1$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 0.81 + 0.16 + 0.01 + 0.01 + 0.01 = 1$$

$$S_1 = 1.6 > 1$$

$$S_2 = S_3 = S_4 = 1.4 > 1$$

$$S_6 = S_8 = S_9 = 1.2 > 1$$

$$S_5 = 0.8 \leq 1$$

$$S_7 = S_{10} = S_{13} = 0.6 \leq 1$$

$$S_{11} = 1 \leq 1$$

$$S_{12} = 0.2 \leq 1$$

$$S_{14} = S_{15} = S_{16} = 0.4 \leq 1$$

$|A| = 6$. Ir iespējams, ka sešas izteiksmes ir lielākas par 1 un desmit izteiksmes ir mazākas vai vienādas ar 1.

Piemērs: $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = 0.5$, $a_4 = 0.4$, $a_5 = 0.3$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.16 + 0.09$$

$$S_1 = 2.2 > 1$$

$$S_2 = 1.6 > 1$$

$$S_3 = 1.4 > 1$$

$$S_4 = S_5 = S_{12} = 1.2 > 1$$

$$S_6 = 0.8 \leq 1$$

$$S_7 = S_8 = S_{16} = 0.4 \leq 1$$

$$S_9 = S_{10} = S_{15} = 0.6 \leq 1$$

$$S_{11} = S_{13} = S_{14} = 0.2 \leq 1$$

$|A| = 5$. Ir iespējams, ka piecas izteiksmes ir lielākas par 1 un vienpadsmit izteiksmes ir mazākas vai vienādas ar 1.

Piemērs: $a_1 = 0.8$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = 0.3$, $a_4 = 0.1$, $a_5 = 0.1$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 0.64 + 0.25 + 0.09 + 0.01 + 0.01 = 1$$

$$S_1 = 1.8 > 1$$

$$S_2 = S_3 = 1.6 > 1$$

$$S_4 = 1.2 > 1$$

$$S_6 = 1.4 > 1$$

$$S_5 = S_{11} = 0.8 \leq 1$$

$$S_7 = S_{10} = 0.6 \leq 1$$

$$S_8 = S_9 = 1 \leq 1$$

$$S_{12} = S_{13} = 0.2 \leq 1$$

$$S_{14} = 0.4 \leq 1$$

$$S_{15} = S_{16} = 0 \leq 1$$

$|A| = 4$. Ir iespējams, ka četras izteiksmes ir lielākas par 1 un divpadsmit izteiksmes ir mazākas vai vienādas ar 1.

Piemērs: $a_1 = 0.9, a_2 = 0.3, a_3 = 0.3, a_4 = 0.1, a_5 = 0$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 0.81 + 0.09 + 0.09 + 0.01 = 1$$

$$S_1 = S_2 = 1.6 > 1$$

$$S_3 = S_6 = 1.4 > 1$$

$$S_4 = S_5 = S_9 = S_{10} = 1 \leq 1$$

$$S_7 = S_8 = S_{11} = S_{14} = 0.8 \leq 1$$

$$S_{12} = S_{15} = 0.2 \leq 1$$

$$S_{13} = S_{16} = 0.4 \leq 1$$

$|A| = 2$. Ir iespējams, ka divas izteiksme ir lielākas par 1 un četrpadsmit izteiksmes ir mazākas vai vienādas ar 1.

Piemērs: $a_1 = 0.5, a_2 = 0.5, a_3 = 0.5, a_4 = 0.5, a_5 = 0$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 0.5^2 + 0.5^2 + 0.5^2 + 0.5^2 + 0^2 = 1$$

$$S_1 = S_2 = 2 > 1$$

$$S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = S_9 = S_{10} = S_{12} = S_{15} = 1 \leq 1$$

$$S_7 = S_8 = S_{11} = S_{13} = S_{14} = S_{16} = 0 \leq 1$$

$|A| \neq 1$. Nav iespējams, ka viena izteiksme ir lielāka par 1 un piecpadsmit izteiksmes nepārsniedz 1.

Lai noskaidrotu, vai var būt situācija, kad tikai viena izteiksme lielāka par 1, risinām nosacītā ekstrēma uzdevumu, kurā meklēsim minimumu izteiksmei ar otru lielāko vērtību t. i. izteiksmei S_2 :

$$\min(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5)$$

$$\sum_{i=1}^5 a_i^2 = 1$$

$$\sum_{i=1}^5 a_i > 1.$$

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq 0$$

Ja minimums nepārsniegs 1, tad būs atrasts piemērs tikai ar vienu tādu izteiksmi, kas lielāka par 1. Savukārt, ja minimums pārsniegs 1, tad tāds piemērs neeksistēs.

Šo uzdevumu risināsim izmantojot Lagranža reizinātāju metodi.

$$f_0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 \rightarrow \min$$

$$g_1 : \sum_{k=1}^5 a_k^2 = 1$$

$$g_2 : -a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 + 1 < 0 \left(\sum_{k=1}^5 a_k > 1 \right)$$

$$g_3 : a_2 - a_1 \leq 0$$

$$g_4 : a_3 - a_2 \leq 0$$

$$g_5 : a_4 - a_3 \leq 0$$

$$g_6 : a_5 - a_4 \leq 0$$

Lagranža funkcija:

$$L = \lambda_0(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5) + \lambda_1(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) + \lambda_2(1 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5) + \lambda_3(a_2 - a_1) + \lambda_4(a_3 - a_2) + \lambda_5(a_4 - a_3) + \lambda_6(a_5 - a_4)$$

$$\begin{cases} \lambda_0 + 2\lambda_1 a_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 a_2 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 a_3 - \lambda_2 + \lambda_4 - \lambda_5 = 0 \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 a_4 - \lambda_2 + \lambda_5 - \lambda_6 = 0 \\ -\lambda_0 + 2\lambda_1 a_5 - \lambda_2 + \lambda_6 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_6(a_5 - a_4) = 0$$

$$\lambda_6 = 0 \Rightarrow 2\lambda_0 + 2\lambda_1(a_4 - a_5) + \lambda_5 = 0 \Rightarrow a_4 = a_5$$

$$\lambda_6 \neq 0 \Rightarrow a_4 - a_5 = 0 \Rightarrow a_4 = a_5$$

$$\lambda_5(a_4 - a_3) = 0$$

$$\lambda_5 = 0 \Rightarrow 2\lambda_1(a_3 - a_4) + \lambda_4 + \lambda_6 = 0 \Rightarrow a_3 = a_4$$

$$\lambda_5 \neq 0 \Rightarrow a_3 - a_4 = 0 \Rightarrow a_3 = a_4$$

$$\lambda_4(a_3 - a_2) = 0$$

$$\lambda_4 = 0 \Rightarrow 2\lambda_1(a_2 - a_3) + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \Rightarrow a_2 = a_3$$

$$\lambda_4 \neq 0 \Rightarrow a_3 - a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = a_3$$

$$\lambda_3(a_2 - a_1) = 0$$

$$\lambda_3 = 0 \Rightarrow 2\lambda_1(a_1 - a_2) + \lambda_4 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2$$

$$\lambda_3 \neq 0 \Rightarrow a_1 - a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2$$

Lai izpildītos nosacījumi $\lambda_i g_i = 0, i = 1, \dots, 6$, jābūt $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$

Apzīmē:

$$x := a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5,$$

ievietojot nosacījumā g_1 un f_0 , iegūst:

$$\begin{aligned} 3x &\rightarrow \min \\ 5x^2 &= 1 \end{aligned}$$

No vienādības $5x^2 = 1$ atrod $x = \sqrt{\frac{1}{5}}$ jo mums interesē nenegatīvas vērtības.

Tātad minimums funkcijai f_0 ir punktā $\left(\sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{1}{5}}\right)$ un tā vērtība ir $3\sqrt{\frac{1}{5}} > 1$.

Minimums pārsniedz 1, tātad piemērs $|A| = 1$ neeksistē.

$|A| = 0$. Ir iespējams, ka visas sešpadsmit izteiksmes ir mazākas vai vienādas ar 1.

Piemērs: $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 1$$

$$S_i = 1 \leq 1, i=1, 2, \dots, 16$$

Tātad vienmēr $|B| \geq |A|$, ja $n = 5$.

8. Hipotēzes pierādījums gadījumā $n = 6$

Dots: $\sum_{i=1}^6 a_i^2 = 1, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in R$

Ir iespējamas $2^6 = 64$ šāda veida $\sum_{i=1}^6 (\pm a_i)$ izteiksmes. Apzīmēsim:

$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$	$S_{17} = a_1 + a_2 - a_3 - a_4 - a_5 - a_6 $
$S_2 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - a_6$	$S_{18} = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 - a_6$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 + a_6$	$S_{19} = a_1 + a_2 - a_3 - a_4 - a_5 + a_6 $
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + a_6$	$S_{20} = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - a_6$
$S_5 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 + a_6$	$S_{21} = a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 - a_6$
$S_6 = a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$	$S_{22} = a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + a_5 + a_6 $
$S_7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - a_6$	$S_{23} = a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - a_6$
$S_8 = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$	$S_{24} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$
$S_9 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6$	$S_{25} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5 + a_6 $
$S_{10} = a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - a_6$	$S_{26} = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 $
$S_{11} = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 + a_6$	$S_{27} = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 $
$S_{12} = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6$	$S_{28} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5 - a_6 $
$S_{13} = a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5 + a_6$	$S_{29} = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - a_6 $
$S_{14} = a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 + a_6$	$S_{30} = a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + a_5 - a_6 $
$S_{15} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + a_6$	$S_{31} = a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 + a_6 $
$S_{16} = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 + a_6 $	$S_{32} = a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 - a_6 $

Jāpierāda: $|B| \geq |A|.$

Pierādījums:

$$S_{24}^2 = 1 - 2a_1a_2 + 2a_1a_3 - 2a_1a_4 + 2a_1a_5 - 2a_1a_6 - 2a_2a_3 + 2a_2a_4 - 2a_2a_5 + 2a_2a_6 - 2a_3a_4 + 2a_3a_5 - 2a_3a_6 - 2a_4a_5 + 2a_4a_6 - 2a_5a_6 \leq 1 \Rightarrow |S_{24}| \leq 1,$$

$$S_{27}^2 = 1 - 2a_1a_2 - 2a_1a_3 + 2a_1a_4 - 2a_1a_5 + 2a_1a_6 + 2a_2a_3 - 2a_2a_4 + 2a_2a_5 - 2a_2a_6 - 2a_3a_4 + 2a_3a_5 - 2a_3a_6 - 2a_4a_5 + 2a_4a_6 - 2a_5a_6 \leq 1 \Rightarrow |S_{27}| \leq 1,$$

$$S_{28}^2 = 1 - 2a_1a_2 + 2a_1a_3 - 2a_1a_4 - 2a_1a_5 - 2a_1a_6 - 2a_2a_3 + 2a_2a_4 + 2a_2a_5 + 2a_2a_6 - 2a_3a_4 - 2a_3a_5 - 2a_3a_6 + 2a_4a_5 + 2a_4a_6 + 2a_5a_6 \leq 1 \Rightarrow |S_{28}| \leq 1,$$

$$S_{29}^2 = 1 - 2a_1a_2 - 2a_1a_3 + 2a_1a_4 - 2a_1a_5 - 2a_1a_6 + 2a_2a_3 - 2a_2a_4 + 2a_2a_5 + 2a_2a_6 - 2a_3a_4 - 2a_3a_5 - 2a_3a_6 - 2a_4a_5 - 2a_4a_6 + 2a_5a_6 \leq 1 \Rightarrow |S_{29}| \leq 1,$$

Tā kā $S_{24} \leq 1$, tad izteiksmes, kuras ir mazākas vai vienādas par S_{24} arī nepārsniedz 1.

Pārbauda: $S_{24} \geq S_{25}$. Jāapskata divi gadījumi:

$$\text{Ja } S_{25} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5 + a_6 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} S_{24} \geq S_{25} &\Leftrightarrow S_{24} - S_{25} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 = \\ &= 2a_5 - 2a_6 \geq 0, \text{ jo } a_5 \geq a_6. \end{aligned}$$

$$\text{Ja } S_{25} = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} S_{24} \geq S_{25} &\Leftrightarrow S_{24} - S_{25} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5 + a_6 = \\ &= 2a_1 - 2a_2 + 2a_3 - 2a_4 \geq 0, \text{ jo } a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4. \end{aligned}$$

Secinājums: $S_{25} \leq 1$.

Pārbauda: $S_{24} \geq S_{26}$. Jāapskata divi gadījumi:

$$\text{Ja } S_{26} = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} S_{24} \geq S_{26} &\Leftrightarrow S_{24} - S_{26} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 - a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 + a_6 = \\ &= 2a_3 - 2a_4 \geq 0, \text{ jo } a_3 \geq a_4. \end{aligned}$$

$$\text{Ja } S_{26} = -a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 + a_6 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} S_{24} \geq S_{26} &\Leftrightarrow S_{24} - S_{26} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 = \\ &= 2a_1 - 2a_2 + 2a_5 - 2a_6 \geq 0, \text{ jo } a_1 \geq a_2 \geq a_5 \geq a_6. \end{aligned}$$

Secinājums: $S_{26} \leq 1$.

Ir izveidota tabula 8.1 pēc tāda paša principa kā tabula 7.1.

Izmantojot šo tabulu var pārliecināties, ka starp jebkuriem 17 skaitļiem vismaz viens nepārsniedz 1. Piemēram, ja $S_{30} > 1$ un $S_k > 1$, kur

$k = 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31$, tad rodas pretruna saskaitot šo skaitļu kvadrātus. Piemēram, ja $S_{30} > 1$ un $S_{12} > 1$, tad

$$S_{30}^2 + S_{12}^2 > 2 \Leftrightarrow -2a_1a_3 + 2a_2a_4 - 2a_2a_5 + 2a_2a_6 - 2a_4a_5 + 2a_4a_6 - 2a_5a_6 \geq 0,$$

kas pretrunā ar to, ka skaitļi, ai, sakārtoti dilstošā secībā. Detalizēts visu gadījumu izklāsts aizņemtu pārāk daudz vietas un tas šeit netiek iekļauts.

Zīmju tabula $n = 6$

	a_1a_2	a_1a_3	a_1a_4	a_1a_5	a_1a_6	a_2a_3	a_2a_4	a_2a_5	a_2a_6	a_3a_4	a_3a_5	a_3a_6	a_4a_5	a_4a_6	a_5a_6
S_1^2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
S_2^2	+	+	+	+	-	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-
S_3^2	+	+	+	-	+	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-
S_4^2	+	+	-	+	+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+
S_5^2	+	-	+	+	+	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+
S_6^2	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+
S_7^2	+	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+
S_8^2	+	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-
S_9^2	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-
S_{10}^2	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-
S_{11}^2	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	+	-	-
S_{12}^2	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-
S_{13}^2	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-
S_{14}^2	+	-	-	+	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+
S_{15}^2	-	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+
S_{16}^2	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+
S_{17}^2	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+
S_{18}^2	+	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+
S_{19}^2	+	-	-	-	+	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-
S_{20}^2	+	-	+	-	-	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+
S_{21}^2	+	-	-	+	-	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-
S_{22}^2	-	-	-	+	+	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+
S_{23}^2	-	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+
S_{24}^2	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-
S_{25}^2	-	+	-	-	+	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-
S_{26}^2	-	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	+	+	-	-
S_{27}^2	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-
S_{28}^2	-	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+
S_{29}^2	-	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+
S_{30}^2	-	-	-	+	-	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-
S_{31}^2	-	-	-	-	+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-
S_{32}^2	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Kopas A elementu skaits

$|A| = 16$. Ir iespējams, ka 16 izteiksmes ir lielākas par 1 un 16 nepārsniedz 1.

Piemērs: $a_1 = 0.8$, $a_2 = 0.6$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$, $a_6 = 0$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 0.64 + 0.36 = 1$$

$$\begin{aligned} S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_7 = S_8 = S_9 = \\ = S_{11} = S_{12} = S_{14} = S_{17} = S_{18} = S_{19} = S_{20} = S_{21} = 1.41 > 1 \\ S_6 = S_{10} = S_{13} = S_{15} = S_{16} = S_{22} = S_{23} = S_{24} = \\ = S_{25} = S_{26} = S_{27} = S_{28} = S_{29} = S_{30} = S_{31} = S_{32} = 0.2 \leq 1 \end{aligned}$$

$|A| = 15$. Ir iespējams, ka 15 izteiksmes ir lielākas par 1 un 17 nepārsniedz 1.

Piemērs: $a_1 = 0.8$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0.6$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$, $a_6 = 0$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 0.64 + 0.36 = 1$$

$$\begin{aligned} S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_6 = S_7 = S_8 = S_{10} = S_{11} = S_{13} = S_{15} = S_{18} = S_{23} = S_{24} = S_{28} = 1.41 > 1 \\ S_5 = S_9 = S_{12} = S_{15} = S_{16} = S_{17} = S_{19} = S_{20} = \\ = S_{21} = S_{22} = S_{25} = S_{26} = S_{27} = S_{29} = S_{30} = S_{31} = S_{32} = 0.2 \leq 1 \end{aligned}$$

$|A| = 14$. Ir iespējams, ka 14 izteiksmes ir lielākas par 1 un 18 izteiksmes nepārsniedz 1.

Piemērs: $a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.4$, $a_3 = 0.1$, $a_4 = 0.1$, $a_5 = 0.1$, $a_6 = 0$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 0.81 + 0.16 + 0.01 + 0.01 + 0.01 = 1$$

$$\begin{aligned} S_1 = S_2 = 1.6 > 1 \\ S_3 = S_4 = S_5 = S_7 = S_8 = S_9 = 1.4 > 1 \\ S_{11} = S_{12} = S_{14} = S_{18} = S_{20} = S_{21} = 1.2 > 1 \\ S_{13} = S_{15} = S_{16} = S_{23} = S_{24} = S_{26} = 0.6 \leq 1 \\ S_6 = S_{10} = 0.8 \leq 1 \\ S_{17} = S_{19} = 1 \leq 1 \\ S_{25} = S_{31} = S_{32} = 0.2 \leq 1 \\ S_{27} = S_{28} = S_{29} = S_{30} = 0.4 \leq 1 \end{aligned}$$

$|A| = 13$. Ir iespējams, ka 13 izteiksmes ir lielākas par 1 un 19 izteiksmes nepārsniedz 1.

Piemērs: $a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.1$, $a_3 = 0.4$, $a_4 = 0.1$, $a_5 = 0$, $a_6 = 0.1$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 0.81 + 0.01 + 0.16 + 0.01 + 0.01 = 1$$

$$S_1 = S_3 = 1.6 > 1$$

$$S_2 = S_4 = S_6 = S_7 = S_{11} = S_{13} = 1.4 > 1$$

$$S_8 = S_{10} = S_{15} = S_{18} = S_{23} = 1.2 > 1$$

$$S_5 = S_{12} = 0.8 \leq 1$$

$$S_9 = S_{14} = S_{16} = S_{19} = S_{20} = S_{27} = 0.6 \leq 1$$

$$S_{17} = S_{21} = S_{22} = S_{25} = S_{26} = S_{29} = S_{31} = 0.4 \leq 1$$

$$S_{24} = S_{28} = 1 \leq 1$$

$$S_{30} = S_{32} = 0.2 \leq 1$$

$|A| = 12$. Ir iespējams, ka 12 izteiksmes ir lielākas par 1 un 20 izteiksmes nepārsniedz 1.

Piemērs: $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = 0.5$, $a_4 = 0.4$, $a_5 = 0$, $a_6 = 0.3$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.16 + 0.9 = 1$$

$$S_1 = S_3 = 2.2 > 1$$

$$S_2 = S_7 = 1.6 > 1$$

$$S_4 = S_{11} = 1.4 > 1$$

$$S_5 = S_6 = S_{12} = S_{13} = S_{30} = S_{32} = 1.2 > 1$$

$$S_8 = S_{18} = 0.8 \leq 1$$

$$S_9 = S_{10} = S_{20} = S_{22} = S_{23} = S_{25} = S_{31} = 0.6 \leq 1$$

$$S_{14} = S_{15} = S_{19} = S_{26} = S_{29} = 0.4 \leq 1$$

$$S_{16} = S_{17} = S_{21} = S_{24} = S_{27} = S_{28} = 0.2 \leq 1$$

$|A| = 11$. Ir iespējams, ka 11 izteiksmes ir lielākas par 1 un 21 izteiksme nepārsniedz 1.

Piemērs: $a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.3$, $a_3 = 0.2$, $a_4 = 0.2$, $a_5 = 0.1$, $a_6 = 0.1$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 0.81 + 0.09 + 0.04 + 0.04 + 0.01 + 0.01 = 1$$

$$S_1 = 1.8 > 1$$

$$S_2 = S_3 = 1.6 > 1$$

$$S_4 = S_5 = S_7 = 1.4 > 1$$

$$S_6 = S_8 = S_9 = S_{11} = S_{12} = 1.2 > 1$$

$$S_{10} = S_{13} = S_{14} = S_{18} = S_{20} = 1 \leq 1$$

$$S_{15} = S_{16} = S_{19} = S_{21} = S_{23} = 0.8 \leq 1$$

$$S_{17} = S_{24} = S_{26} = S_{27} = 0.6 \leq 1$$

$$S_{22} = S_{29} = 0.4 \leq 1$$

$$S_{25} = S_{30} = S_{31} = 0.2 \leq 1$$

$$S_{32} = 0 \leq 1$$

$|A| = 10$. Ir iespējams, ka 10 izteiksmes ir lielākas par 1 un 22 izteiksmes nepārsniedz 1.

Piemērs: $a_1 = 0.8$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = 0.3$, $a_4 = 0.1$, $a_5 = 0.1$, $a_6 = 0$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 0.64 + 0.25 + 0.09 + 0.01 + 0.01 + 0 = 1$$

$$S_1 = S_2 = 1.8 > 1$$

$$S_3 = S_4 = S_7 = S_8 = 1.6 > 1$$

$$S_5 = S_9 = 1.2 > 1$$

$$S_{11} = S_{18} = 1.4 > 1$$

$$S_6 = S_{10} = S_{17} = S_{19} = 0.8 > 1$$

$$S_{12} = S_{14} = S_{20} = S_{21} = 1 \leq 1$$

$$S_{13} = S_{15} = S_{23} = S_{24} = 0.6 \leq 1$$

$$S_{16} = S_{25} = S_{26} = S_{31} = S_{32} = 0.2 \leq 1$$

$$S_{22} = S_{27} = S_{29} = S_{30} = 0 \leq 1$$

$$S_{28} = 0.4 \leq 1$$

$|A| = 9$. Ir iespējams, ka 9 izteiksmes ir lielākas par 1 un 23 izteiksmes nepārsniedz 1.

Piemērs: $a_1 = 0.6$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = 0.5$, $a_4 = 0.3$, $a_5 = 0.2$, $a_6 = 0.1$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 0.36 + 0.25 + 0.25 + 0.09 + 0.04 + 0.01 = 1$$

$|A| = 8$. Ir iespējams, ka 8 izteiksmes ir lielākas par 1 un 24 izteiksmes nepārsniedz 1.

Piemērs: $a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.3$, $a_3 = 0.3$, $a_4 = 0.1$, $a_5 = 0$, $a_6 = 0$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 0.81 + 0.09 + 0.09 + 0.01 = 1$$

$|A| = 7$. Ir iespējams, ka 7 izteiksmes ir lielākas par 1 un 25 izteiksmes nepārsniedz 1.

Piemērs: $a_1 = 0.6$, $a_2 = 0.1$, $a_3 = 0.6$, $a_4 = 0.1$, $a_5 = 0.1$, $a_6 = 0.5$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 0.36 + 0.01 + 0.36 + 0.01 + 0.01 + 0.25 = 1$$

$|A| = 5$. Ir iespējams, ka 5 izteiksmes ir lielākas par 1 un 27 izteiksmes nepārsniedz 1.

Piemērs: $a_1 = 0$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = 0.5$, $a_4 = 0.5$, $a_5 = 0.5$, $a_6 = 0$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 = 1$$

$|A| = 4$. Ir iespējams, ka 4 izteiksmes ir lielākas par 1 un 28 izteiksmes nepārsniedz 1.

Piemērs: $a_1 = 0.5, a_2 = 0.5, a_3 = 0.5, a_4 = 0.5, a_5 = 0, a_6 = 0$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 = 1$$

$|A| = 0$. Ir iespējams, 32 izteiksmes nepārsniedz 1.

Piemērs: $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0, a_6 = 0$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 1$$

Secinājumi

Tomaševska problēma ir atrisināta gadījumos $2 \leq n \leq 6$. Bet gadījumā $n = 6$ bakalaura darbā nav iekļauts pilns pierādījums, kas stipri palielinātu darba apjomu. Ir analizēta kopas A elementu skaita struktūra un iegūti daži negaidīti rezultāti par kopas A elementu skaitu. Piemēram, telpā \mathbb{R}^5 nevar būt tāda situācija, ka $|A| = 1$.

Literatūra

1. Guy R. K., *Monthly Unsolved Problems*, The American Mathematical Monthly, 1991, V. 98, N 10, pp. 973-976.
2. Sajori F., *A History of Mathematics*, Chelsea Publishing Company, 1991, p. 524.
3. Боголюбов А. Н., *Математики и механики. Биографический справочник*, Киев, Наукова думка, 1983, 640 с.
4. http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Louis_Lagrange
5. Engelsons J., *Optimizācijas metodes*, Rīga, P. Stučkas Latvijas Valsts universitāte, 1985, 100 lpp.
6. Raitums U., *Optimizācijas metodes: lekciju kurss*, Rīga, Latvijas Universitāte, 2002, 83 lpp.
7. Галеев Э. М., Тихомиров В. М., *Краткий курс теории экстремальных задач*, Москва, изд. МГУ, 1989, 204 с.

1. pielikums

Georga Enģeļa risinājums, ja $n = 4$

SP

#8

Y. Eijala

a) Pienūsim, ka $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq 0$ (beigās parādīsim, ka šis nosaukums nav būtisks) un $\sum_{i=1}^4 a_i^2 = 1$. Aizīmēsim $a_1 \leq 1$. Ja $|a_1 S| \leq 1$, ticinām, ka vektors S ir vektoram a .

b) Aizīmēsim $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \leq a_1 - a_4 \leq 1$ un arī $|(a_1 - a_2) - (a_3 - a_4)| \leq 1$.

Tāpēc vektori $(1, -1, 1, -1)$, $(1, -1, -1, 1)$, $(-1, 1, 1, -1)$ un $(-1, 1, -1, 1)$ ir visām (negatīviem) vektoriem a .

$$c) (a_1 - a_2 - a_3 - a_4)^2 = \sum_{i=1}^4 a_i^2 - 2a_1 a_2 - 2a_1 a_3 - 2a_1 a_4 + 2a_2 a_3 + 2a_2 a_4 + 2a_3 a_4 = 1 - 2a_2(a_1 - a_3) - 2a_3(a_1 - a_4) - 2a_4(a_1 - a_2) \leq 1. \text{ Tātad}$$

$|a_1 - a_2 - a_3 - a_4| \leq 1$ un vektori $(1, -1, -1, -1)$, $(-1, 1, 1, 1)$ ir visām (negatīviem) a .

$$d) (a_1 \pm (a_2 - a_3 - a_4))^2 = a_1^2 \pm 2a_1(a_2 - a_3 - a_4) + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 2a_2 a_3 - 2a_2 a_4 + 2a_3 a_4 = 1 \pm 2a_1(a_2 - a_3 - a_4) - 2a_2 a_3 - 2a_4(a_2 - a_3). \text{ No šejienes redzams}$$

ja $a_2 - a_3 - a_4 \geq 0$, tad $(a_1 - (a_2 - a_3 - a_4))^2 \leq 1$, bet ja

$a_2 - a_3 - a_4 < 0$, tad $(a_1 + (a_2 - a_3 - a_4))^2 \leq 1$. Jā tad:

ja $a_2 - a_3 - a_4 \geq 0$, tad der vektori $(1, -1, 1, 1)$ un $(-1, 1, -1, -1)$;

ja $a_2 - a_3 - a_4 < 0$, tad der vektori $(1, 1, -1, -1)$ un $(-1, -1, 1, 1)$.

e) Piemērs $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a_3 = a_4 = 0$ rāda, ka ne katam a der $(1, 1, -1, -1)$.

Piemērs $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ rāda, ka ne katam a der $(1, -1, 1, 1)$.

f) Ir parādīts, ka katam pozitīvam vektoram der vismaz 8 vektori S .

Ja dotais vektors nav pozitīvs, tad varam pieņemt, ka $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq |a_4|$

un dotajos vektoros S ņemot, piemēroti mainot S koordinātu zīmes.

2. pielikums

Studenta risinājums

Neatrisināta matemātiskā problēma
no žurnāla
"THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY"

Doti n reāli skaitļi a_1, a_2, \dots, a_n , pie tam $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$.

Apskatām 2^n izteiksmes $|\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3 + \dots + \varepsilon_n a_n|$,
kur $\varepsilon_i = \pm 1$, $1 \leq i \leq n$.

Vai vai gadījumā, ko varam mēs pateikt par izteiksmju
vērtību lielāku par 1?

Pasim ierīktojam vektoru a un vektoru ε , tad mēs
apskatām vai vai gadījumā, ka ir kāda tāda
daļa no izteiksmju pie pozitīvas vērtības lielāku
par 1, jo mēs varam no izteiksmes ar pozitīvu zīmību
ņemt pozitīvo daļu to pašu vērtību.

Apskatām izteiksmi $\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \dots + \varepsilon_n a_n$ kā divu
vektoru a un ε skalāro reizinājumu, kur
 $a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ un $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n)$.

ε komponentas ir vienības vektors un to garums vektorā
vektora a nosaukums ir reāli skaitļi, kas apmierina
vienādību $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$.

Aplūkosim n -dimensiju telpu ar vektoriem a un ε .

Jo skalāro reizinājumu izsaka formā

$$(a, \varepsilon) = |a| |\varepsilon| \cos \varphi, \text{ kur } \varphi \text{ leņķis starp abiem}$$

vektoriem.

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}, \text{ bet pēc dotā } \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1,$$

$$\text{tātad } |a| = 1.$$

$$|\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2}, \varepsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq n$$

$$(\pm 1)^2 = 1, \text{ tātad } |\varepsilon| = \sqrt{n}$$

$$\text{Patac} \quad (a, e) = |a| \cos \varphi.$$

Mūs interesē tie skalārie reizinājumi, kuri
 ir lielāki par 1 pēc moduļa

$$|a| \cos \varphi > 1$$

Tas ir, jāaplūko tie vektori, kuri vektora
 loka ar a vektoru kosinuss ir lielāks par $\frac{1}{|a|}$

$$|\cos \varphi| > \frac{1}{|a|} \quad (a \neq 0)$$

Spējamies n-dimensiju telpā vienā no koordinātu
 asīm, attiecībā pret kuru aprakstīta vektoru
 Pa citu vektoru viņu komponentu gausim ir 1, tad
 simetrijas dēļ ir vienāds, kuri koordinātu asi
 irētas.

No vienas 2^m vektoru sistēmas pusi (t.i. 2^{m-1}) var
 projicēt uz vienas koordinātu ass vektoru sistēmu
 ar galvenās ass ~~vienību~~ vektoru, t.i. attiecīgās komponentes
 algebriskās gausim ir +1 Attiecīgi 2^{m-1} vektoru projekciju
 vektoru ir pretēji ass vektoru.

Pietiek aplūkot tikai vektoru ar pozitīvo kosinusu,
 jo katam no tiem eksistē pretējais vektors, kura
 koordinātu vektors pretējām asīm nesa pretēji vektoru.
 un skalārais reizinājums ar vektoru a pēc moduļa
 abiem vektoriem ir vienāds

Ļūdzim no pozitīvi vektoru vektoru
 vado lūzi ar koordinātu asi, kura kosinuss ir
 $\cos \alpha = \frac{1}{|a|}$ (Pēc vektoru reizinājuma ar
 ar vienību vektoru $(e, e) = |e| \cos \alpha$)

Visi pozitīvi vektoru vektoru sadalīti pa simetrijas
 plānu attiecībā pret koordinātu asi, t.i. katam vektoru
 eksistē simetrisks pret koordinātu asi

Helektori vektorite simetriake vektor n an kedar
 pesan koordinatam, fiksai vektoram an paktijo viki.
 Jfaktumam n koordinatam, pura rasktero abo vektoram
 pvektivno vektoram affiinitam pakti raskteram koordinatam
 est $i - ka$ vienas, $i + 1$.

Kai pamoktu k , ka jia vektoru un koordinatam
 est fiksai abotam viana planam, apskaitisim so
 jia vektoru jankto reizinajumu (paci koordinatam
 est vektoru vensai vianiba, est).

Janktojam reizinajumu jankto vektoram an 0
 Takti janktojam, vai

$$[e, e', e_i] = 0 \quad (e' \text{ n vektoru simetriake, } e_i \text{ vektoru})$$

Paci ein vektoram e_i nan 0 vianipi i -ka koordinatam,
 kad mui interesam vianipi i -ka koordinatam est vektorite jankto
 reizinajumu janktojam vektoram

$$[e, e'] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_i & \dots & e_n \\ e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_i & \dots & e_n \\ -e_1 & -e_2 & -e_3 & \dots & -e_i & \dots & -e_n \end{vmatrix}$$

Apskaitisim reizinajumu paci pirmam vektoram i -ka lokali

$$e_i \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_i & \dots & e_n \\ e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_i & \dots & e_n \\ -e_1 & -e_2 & -e_3 & \dots & -e_i & \dots & -e_n \end{vmatrix} - e_i \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_i & \dots & e_n \\ e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_i & \dots & e_n \\ -e_1 & -e_2 & -e_3 & \dots & -e_i & \dots & -e_n \end{vmatrix} = 0$$

i -ka lokala koeficientu vienbu est 0 paci determinantu
 spasi, ka, ja determinanta n divu vianiba vektoru, ka vektoru i an e .

Takti vektorite jankto reizinajumu janktojam vektoram
 i -ka koordinatam $n 0$ un ka skalara reizinajumu
 an vianiba est $n 0$.

$$[e, e', e_i] = 0$$

Jia est vektorite janktojam.

Kipajumi est vianiba pamatjumu:

Kai ein vianiba est n abo so vektoru
 lineara kombinacija, kad jia abotam viana planam.

$$e_i = \frac{1}{2}(e + e')$$

Izvēloties no 2^{n-1} pozitīvu vektoriem n -vektorā $2^{n-1} + 1$ vektoru (t.i. vienā nodaļā), starp izvēlētajiem būs vismaz viens simetrisks pāris (Pavisam ir 2^{n-2} simetrisku pāru, katrā iespējams izvēlēties tikai 2^{n-2} nesimetrisku vektorus).

Ārī skalāro reizinājumu ^{reizinājumu} ar vienu n -vektoru vektoram ir bāzes lietas pēc z , katru nosauksim, ko a vektoru n -vektorā izdod lietas pēc $\frac{1}{n}$ pēc modula:

$$| \cos \varphi | \frac{1}{n}$$

Tas nozīmē, ka vektoru a vektoru katrā φ ir jābūt mazākam pēc leņķi α , ko n -vektorā vektoru ar koordinātu 1 ir, ja $\cos \alpha = \frac{1}{n}$. (Ja $\alpha > 90^\circ$, ja $\cos \alpha < 0$)

Tāpat tas nav iespējams attiecībā pret simetrisku vektoru pāri, jo, pār vienu abiem vektoru un koordinātu 1 ir attēlot vienā plaknē, katrs x ir mazāks no viena katrā, ko jābūt vektoru vai vektoru ar simetrisku pāri. (Ja vārdi, no katrā n mazāks pēc x ar vienu no abiem vektoru, tad attiecīgi ar abiem vektoru katrā ir lielāks pēc x , ja katrā starp pašiem simetriskā vektoru pāri vektoru ir $2 \cdot 1$)

No visa tā seko, ka neeksistē kads vektoru a , kurā skalāro reizinājumi ar vienu nodaļā pozitīvu vektoru n -vektorā bāzes lietas pēc z visiem reizinājumiem. (Pēc modula)

Tāpēc, attēlot uz problēmas priekšpusi, mēs gaidīsim, ka vienā nodaļā pusei izvēlētajiem $1, 2, 3, \dots, n$ vektoru bāzes lietas pēc z .

3. pielikums. Programmas ar Maple 10

Programma kopas A elementu skaita noteikšanai, kad $n = 6$.

```
> restart;
s[1]:=abs((a1+a2+a3+a4+a5+a6)):
s[2]:=abs((a1+a2+a3+a4+a5-a6)):
s[3]:=abs((a1+a2+a3+a4-a5+a6)):
s[4]:=abs((a1+a2+a3-a4+a5+a6)):
s[5]:=abs((a1+a2-a3+a4+a5+a6)):
s[6]:=abs((a1-a2+a3+a4+a5+a6)):
s[7]:=abs((a1+a2+a3+a4-a5-a6)):
s[8]:=abs((a1+a2+a3-a4+a5-a6)):
s[9]:=abs((a1+a2-a3+a4+a5-a6)):
s[10]:=abs((a1-a2+a3+a4+a5-a6)):
s[11]:=abs((a1+a2+a3-a4-a5+a6)):
s[12]:=abs((a1+a2-a3+a4-a5+a6)):
s[13]:=abs((a1-a2+a3+a4-a5+a6)):
s[14]:=abs((a1+a2-a3-a4+a5+a6)):
s[15]:=abs((a1-a2+a3-a4+a5+a6)):
s[16]:=abs((a1-a2-a3+a4+a5+a6)):
s[17]:=abs((a1+a2-a3-a4-a5-a6)):
s[18]:=abs((a1+a2+a3-a4-a5-a6)):
s[19]:=abs((a1+a2-a3-a4-a5+a6)):
s[20]:=abs((a1+a2-a3+a4-a5-a6)):
s[21]:=abs((a1+a2-a3-a4+a5-a6)):
s[22]:=abs((a1-a2-a3-a4+a5+a6)):
s[23]:=abs((a1-a2+a3+a4-a5-a6)):
s[24]:=abs((a1-a2+a3-a4+a5-a6)):
s[25]:=abs((a1-a2-a3-a4-a5+a6)):
s[26]:=abs((a1-a2-a3+a4+a5-a6)):
s[27]:=abs((a1-a2-a3+a4-a5+a6)):
s[28]:=abs((a1-a2+a3-a4-a5-a6)):
s[29]:=abs((a1-a2-a3+a4-a5-a6)):
s[30]:=abs((a1-a2-a3-a4+a5-a6)):
s[31]:=abs((a1-a2-a3-a4-a5+a6)):
s[32]:=abs((a1-a2-a3-a4-a5-a6)):
>
for a1 from 0 by 0.1 to 1 do
  for a2 from 0 by 0.1 to 1 do
    for a3 from 0 by 0.1 to 1 do
      for a4 from 0 by 0.1 to 1 do
        for a5 from 0 by 0.1 to 1 do
          for a6 from 0 by 0.1 to 1 do
o:=0:
if (a1^2+a2^2+a3^2+a4^2+a5^2+a6^2=1) then
  for i from 1 to 32 do
    if (s[i]<=1) then o:=o+1;end if;end
do;

Cipars pie o norāda to izteiksmju skaitu, kuras nepārsniedz 1.
if o=32 then print(a1, a2, a3, a4, a5, a6);
```

```

print('s[1]=s[1], 's[2]= s[2], 's[3]= s[3], 's[4]=
s[4], 's[5]= s[5], 's[6]= s[6], 's[7]= s[7],
's[8]=s[8], 's[9]= s[9], 's[10]=s[10], 's[11]= s[11], 's[12]='
s[12], 's[13]= s[13], 's[14]=s[14], 's[15]=s[15], 's[16]='
s[16], 's[17]= s[17], 's[18]= s[18], 's[19]= s[19], 's[20]='
s[20], 's[21]= s[21], 's[22]= s[22], 's[23]= s[23], 's[24]='
s[24], 's[25]= s[25], 's[26]= s[26], 's[27]=s[27],
's[28]=s[28], 's[29]= s[29], 's[30]= s[30],
's[31]=s[31], 's[32]= s[32]);
end if;
end if; end do; end do; end do; end do; end do; end do;

```

Rezultātā izdrukā skaitļus $a_j, j = 1, \dots, 6$ un atbilstošās izteiksmju vērtības $S_i, i = 1, \dots, 32$

0, 0, 0, 0, 0, 1.0

$s_1 = 1.0, s_2 = 1.0, s_3 = 1.0, s_4 = 1.0, s_5 = 1.0, s_6 = 1.0, s_7 = 1.0, s_8 = 1.0, s_9 = 1.0, s_{10} = 1.0, s_{11} = 1.0,$
 $s_{12} = 1.0, s_{13} = 1.0, s_{14} = 1.0, s_{15} = 1.0, s_{16} = 1.0, s_{17} = 1.0, s_{18} = 1.0, s_{19} = 1.0, s_{20} = 1.0, s_{21} = 1.0,$
 $s_{22} = 1.0, s_{23} = 1.0, s_{24} = 1.0, s_{25} = 1.0, s_{26} = 1.0, s_{27} = 1.0, s_{28} = 1.0, s_{29} = 1.0, s_{30} = 1.0, s_{31} = 1.0,$
 $s_{32} = 1.0$

0, 0, 0, 0, 1.0, 0

$s_1 = 1.0, s_2 = 1.0, s_3 = 1.0, s_4 = 1.0, s_5 = 1.0, s_6 = 1.0, s_7 = 1.0, s_8 = 1.0, s_9 = 1.0, s_{10} = 1.0, s_{11} = 1.0,$
 $s_{12} = 1.0, s_{13} = 1.0, s_{14} = 1.0, s_{15} = 1.0, s_{16} = 1.0, s_{17} = 1.0, s_{18} = 1.0, s_{19} = 1.0, s_{20} = 1.0, s_{21} = 1.0,$
 $s_{22} = 1.0, s_{23} = 1.0, s_{24} = 1.0, s_{25} = 1.0, s_{26} = 1.0, s_{27} = 1.0, s_{28} = 1.0, s_{29} = 1.0, s_{30} = 1.0, s_{31} = 1.0,$
 $s_{32} = 1.0$

0, 0, 0, 1.0, 0, 0

$s_1 = 1.0, s_2 = 1.0, s_3 = 1.0, s_4 = 1.0, s_5 = 1.0, s_6 = 1.0, s_7 = 1.0, s_8 = 1.0, s_9 = 1.0, s_{10} = 1.0, s_{11} = 1.0,$
 $s_{12} = 1.0, s_{13} = 1.0, s_{14} = 1.0, s_{15} = 1.0, s_{16} = 1.0, s_{17} = 1.0, s_{18} = 1.0, s_{19} = 1.0, s_{20} = 1.0, s_{21} = 1.0,$
 $s_{22} = 1.0, s_{23} = 1.0, s_{24} = 1.0, s_{25} = 1.0, s_{26} = 1.0, s_{27} = 1.0, s_{28} = 1.0, s_{29} = 1.0, s_{30} = 1.0, s_{31} = 1.0,$
 $s_{32} = 1.0$

0, 0, 1.0, 0, 0, 0

$s_1 = 1.0, s_2 = 1.0, s_3 = 1.0, s_4 = 1.0, s_5 = 1.0, s_6 = 1.0, s_7 = 1.0, s_8 = 1.0, s_9 = 1.0, s_{10} = 1.0, s_{11} = 1.0,$
 $s_{12} = 1.0, s_{13} = 1.0, s_{14} = 1.0, s_{15} = 1.0, s_{16} = 1.0, s_{17} = 1.0, s_{18} = 1.0, s_{19} = 1.0, s_{20} = 1.0, s_{21} = 1.0,$
 $s_{22} = 1.0, s_{23} = 1.0, s_{24} = 1.0, s_{25} = 1.0, s_{26} = 1.0, s_{27} = 1.0, s_{28} = 1.0, s_{29} = 1.0, s_{30} = 1.0, s_{31} = 1.0,$
 $s_{32} = 1.0$

0, 1.0, 0, 0, 0, 0

$s_1 = 1.0, s_2 = 1.0, s_3 = 1.0, s_4 = 1.0, s_5 = 1.0, s_6 = 1.0, s_7 = 1.0, s_8 = 1.0, s_9 = 1.0, s_{10} = 1.0, s_{11} = 1.0,$
 $s_{12} = 1.0, s_{13} = 1.0, s_{14} = 1.0, s_{15} = 1.0, s_{16} = 1.0, s_{17} = 1.0, s_{18} = 1.0, s_{19} = 1.0, s_{20} = 1.0, s_{21} = 1.0,$
 $s_{22} = 1.0, s_{23} = 1.0, s_{24} = 1.0, s_{25} = 1.0, s_{26} = 1.0, s_{27} = 1.0, s_{28} = 1.0, s_{29} = 1.0, s_{30} = 1.0, s_{31} = 1.0,$
 $s_{32} = 1.0$

1.0, 0, 0, 0, 0, 0

$s_1 = 1.0, s_2 = 1.0, s_3 = 1.0, s_4 = 1.0, s_5 = 1.0, s_6 = 1.0, s_7 = 1.0, s_8 = 1.0, s_9 = 1.0, s_{10} = 1.0, s_{11} = 1.0,$
 $s_{12} = 1.0, s_{13} = 1.0, s_{14} = 1.0, s_{15} = 1.0, s_{16} = 1.0, s_{17} = 1.0, s_{18} = 1.0, s_{19} = 1.0, s_{20} = 1.0, s_{21} = 1.0,$
 $s_{22} = 1.0, s_{23} = 1.0, s_{24} = 1.0, s_{25} = 1.0, s_{26} = 1.0, s_{27} = 1.0, s_{28} = 1.0, s_{29} = 1.0, s_{30} = 1.0, s_{31} = 1.0,$
 $s_{32} = 1.0$

Programma, kura attēlo koeficienta $a_j a_k$, $j, k = 1, \dots, 6$ zīmi, kāpinot izteiksmi S_i , $i = 1, \dots, 32$ kvadrātā.

```

> restart;
> s[1]:=[a[1],a[2],a[3],a[4],a[5],a[6]]:
s[2]:=[a[1],a[2],a[3],a[4],a[5],-a[6]]:
s[3]:=[a[1],a[2],a[3],a[4],-a[5],a[6]]:
s[4]:=[a[1],a[2],a[3],-a[4],a[5],a[6]]:
s[5]:=[a[1],a[2],-a[3],a[4],a[5],a[6]]:
s[6]:=[a[1],-a[2],a[3],a[4],a[5],a[6]]:
s[7]:=[a[1],a[2],a[3],a[4],-a[5],-a[6]]:
s[8]:=[a[1],a[2],a[3],-a[4],a[5],-a[6]]:
s[9]:=[a[1],a[2],-a[3],a[4],a[5],-a[6]]:
s[10]:=[a[1],-a[2],a[3],a[4],a[5],-a[6]]:
s[11]:=[a[1],a[2],a[3],-a[4],-a[5],a[6]]:
s[12]:=[a[1],a[2],-a[3],a[4],-a[5],a[6]]:
s[13]:=[a[1],-a[2],a[3],a[4],-a[5],a[6]]:
s[14]:=[a[1],a[2],-a[3],-a[4],a[5],a[6]]:
s[15]:=[a[1],-a[2],a[3],-a[4],a[5],a[6]]:
s[16]:=[a[1],-a[2],-a[3],a[4],a[5],a[6]]:
s[17]:=[a[1],a[2],-a[3],-a[4],-a[5],-a[6]]:
s[18]:=[a[1],a[2],a[3],-a[4],-a[5],-a[6]]:
s[19]:=[a[1],a[2],-a[3],-a[4],-a[5],a[6]]:
s[20]:=[a[1],a[2],-a[3],a[4],-a[5],-a[6]]:
s[21]:=[a[1],a[2],-a[3],-a[4],a[5],-a[6]]:
s[22]:=[a[1],-a[2],-a[3],-a[4],a[5],a[6]]:
s[23]:=[a[1],-a[2],a[3],a[4],-a[5],-a[6]]:
s[24]:=[a[1],-a[2],a[3],-a[4],a[5],-a[6]]:
s[25]:=[a[1],-a[2],-a[3],-a[4],-a[5],a[6]]:
s[26]:=[a[1],-a[2],-a[3],a[4],a[5],-a[6]]:
s[27]:=[a[1],-a[2],-a[3],a[4],-a[5],a[6]]:
s[28]:=[a[1],-a[2],a[3],-a[4],-a[5],-a[6]]:
s[29]:=[a[1],-a[2],-a[3],a[4],-a[5],-a[6]]:
s[30]:=[a[1],-a[2],-a[3],-a[4],a[5],-a[6]]:
s[31]:=[a[1],-a[2],-a[3],-a[4],-a[5],a[6]]:
s[32]:=[a[1],-a[2],-a[3],-a[4],-a[5],-a[6]]:

```

```

> for i from 1 to 32 do
kv[i]:=s[i][1]*s[i][2]+s[i][1]*s[i][3]+s[i][1]*s[i][4]+s[i][1]
*s[i][5]+s[i][1]*s[i][6]+s[i][2]*s[i][3]+s[i][2]*s[i][4]+s[i][2]
*s[i][5]+s[i][2]*s[i][6]+s[i][3]*s[i][4]+s[i][3]*s[i][5]+s[i]
[3]*s[i][6]+s[i][4]*s[i][5]+s[i][4]*s[i][6]+s[i][5]*s[i][6]
end do;

```

$$kv_1 := a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_1 a_5 + a_1 a_6 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_2 a_5 + a_2 a_6 + a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6$$

$$kv_2 := a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_1 a_5 - a_1 a_6 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_2 a_5 - a_2 a_6 + a_3 a_4 + a_3 a_5 - a_3 a_6 + a_4 a_5 - a_4 a_6 - a_5 a_6$$

$$kv_3 := a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 - a_1 a_5 + a_1 a_6 + a_2 a_3 + a_2 a_4 - a_2 a_5 + a_2 a_6 + a_3 a_4 - a_3 a_5 + a_3 a_6 - a_4 a_5 + a_4 a_6 - a_5 a_6$$

$$kv_4 := a_1 a_2 + a_1 a_3 - a_1 a_4 + a_1 a_5 + a_1 a_6 + a_2 a_3 - a_2 a_4 + a_2 a_5 + a_2 a_6 - a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 - a_4 a_5 - a_4 a_6 + a_5 a_6$$

$$kv_5 := a_1 a_2 - a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_1 a_5 + a_1 a_6 - a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_2 a_5 + a_2 a_6 - a_3 a_4 - a_3 a_5 - a_3 a_6 + a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6$$

$$kv_6 := -a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_1 a_5 + a_1 a_6 - a_2 a_3 - a_2 a_4 - a_2 a_5 - a_2 a_6 + a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6$$

$$kv_7 := a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 - a_1 a_5 - a_1 a_6 + a_2 a_3 + a_2 a_4 - a_2 a_5 - a_2 a_6 + a_3 a_4 - a_3 a_5 - a_3 a_6 - a_4 a_5 - a_4 a_6 + a_5 a_6$$

$$kv_8 := a_1 a_2 + a_1 a_3 - a_1 a_4 + a_1 a_5 - a_1 a_6 + a_2 a_3 - a_2 a_4 + a_2 a_5 - a_2 a_6 - a_3 a_4 + a_3 a_5 - a_3 a_6 - a_4 a_5 + a_4 a_6 - a_5 a_6$$

$$kv_9 := a_1 a_2 - a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_1 a_5 - a_1 a_6 - a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_2 a_5 - a_2 a_6 - a_3 a_4 - a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_4 a_5 - a_4 a_6 - a_5 a_6$$

$$kv_{10} := -a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_1 a_5 - a_1 a_6 - a_2 a_3 - a_2 a_4 - a_2 a_5 + a_2 a_6 + a_3 a_4 + a_3 a_5 - a_3 a_6 + a_4 a_5 - a_4 a_6 - a_5 a_6$$

$$kv_{11} := a_1 a_2 + a_1 a_3 - a_1 a_4 - a_1 a_5 + a_1 a_6 + a_2 a_3 - a_2 a_4 - a_2 a_5 + a_2 a_6 - a_3 a_4 - a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_4 a_5 - a_4 a_6 - a_5 a_6$$

$$kv_{12} := a_1 a_2 - a_1 a_3 + a_1 a_4 - a_1 a_5 + a_1 a_6 - a_2 a_3 + a_2 a_4 - a_2 a_5 + a_2 a_6 - a_3 a_4 + a_3 a_5 - a_3 a_6 - a_4 a_5 + a_4 a_6 - a_5 a_6$$

$$kv_{13} := -a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 - a_1 a_5 + a_1 a_6 - a_2 a_3 - a_2 a_4 + a_2 a_5 - a_2 a_6 + a_3 a_4 - a_3 a_5 + a_3 a_6 - a_4 a_5 \\ + a_4 a_6 - a_5 a_6$$

$$kv_{14} := a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_1 a_4 + a_1 a_5 + a_1 a_6 - a_2 a_3 - a_2 a_4 + a_2 a_5 + a_2 a_6 + a_3 a_4 - a_3 a_5 - a_3 a_6 - a_4 a_5 - a_4 a_6 \\ + a_5 a_6$$

$$kv_{15} := -a_1 a_2 + a_1 a_3 - a_1 a_4 + a_1 a_5 + a_1 a_6 - a_2 a_3 + a_2 a_4 - a_2 a_5 - a_2 a_6 - a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 - a_4 a_5 \\ - a_4 a_6 + a_5 a_6$$

$$kv_{16} := -a_1 a_2 - a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_1 a_5 + a_1 a_6 + a_2 a_3 - a_2 a_4 - a_2 a_5 - a_2 a_6 - a_3 a_4 - a_3 a_5 - a_3 a_6 + a_4 a_5 \\ + a_4 a_6 + a_5 a_6$$

$$kv_{17} := a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_1 a_4 - a_1 a_5 - a_1 a_6 - a_2 a_3 - a_2 a_4 - a_2 a_5 - a_2 a_6 + a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_4 a_5 + a_4 a_6 \\ + a_5 a_6$$

$$kv_{18} := a_1 a_2 + a_1 a_3 - a_1 a_4 - a_1 a_5 - a_1 a_6 + a_2 a_3 - a_2 a_4 - a_2 a_5 - a_2 a_6 - a_3 a_4 - a_3 a_5 - a_3 a_6 + a_4 a_5 + a_4 a_6 \\ + a_5 a_6$$

$$kv_{19} := a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_1 a_4 - a_1 a_5 + a_1 a_6 - a_2 a_3 - a_2 a_4 - a_2 a_5 + a_2 a_6 + a_3 a_4 + a_3 a_5 - a_3 a_6 + a_4 a_5 - a_4 a_6 \\ - a_5 a_6$$

$$kv_{20} := a_1 a_2 - a_1 a_3 + a_1 a_4 - a_1 a_5 - a_1 a_6 - a_2 a_3 + a_2 a_4 - a_2 a_5 - a_2 a_6 - a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 - a_4 a_5 - a_4 a_6 \\ + a_5 a_6$$

$$kv_{21} := a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_1 a_4 + a_1 a_5 - a_1 a_6 - a_2 a_3 - a_2 a_4 + a_2 a_5 - a_2 a_6 + a_3 a_4 - a_3 a_5 + a_3 a_6 - a_4 a_5 + a_4 a_6 \\ - a_5 a_6$$

$$kv_{22} := -a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_1 a_4 + a_1 a_5 + a_1 a_6 + a_2 a_3 + a_2 a_4 - a_2 a_5 - a_2 a_6 + a_3 a_4 - a_3 a_5 - a_3 a_6 - a_4 a_5 - a_4 a_6 \\ + a_5 a_6$$

$$kv_{23} := -a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 - a_1 a_5 - a_1 a_6 - a_2 a_3 - a_2 a_4 + a_2 a_5 + a_2 a_6 + a_3 a_4 - a_3 a_5 - a_3 a_6 - a_4 a_5 - a_4 a_6 \\ + a_5 a_6$$

$$kv_{24} := -a_1 a_2 + a_1 a_3 - a_1 a_4 + a_1 a_5 - a_1 a_6 - a_2 a_3 + a_2 a_4 - a_2 a_5 + a_2 a_6 - a_3 a_4 + a_3 a_5 - a_3 a_6 - a_4 a_5 \\ + a_4 a_6 - a_5 a_6$$

$$kv_{25} := -a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_1 a_4 - a_1 a_5 + a_1 a_6 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_2 a_5 - a_2 a_6 + a_3 a_4 + a_3 a_5 - a_3 a_6 + a_4 a_5 \\ - a_4 a_6 - a_5 a_6$$

$$kv_{26} := -a_1 a_2 - a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_1 a_5 - a_1 a_6 + a_2 a_3 - a_2 a_4 - a_2 a_5 + a_2 a_6 - a_3 a_4 - a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_4 a_5 \\ - a_4 a_6 - a_5 a_6$$

$$kv_{27} := -a_1 a_2 - a_1 a_3 + a_1 a_4 - a_1 a_5 + a_1 a_6 + a_2 a_3 - a_2 a_4 + a_2 a_5 - a_2 a_6 - a_3 a_4 + a_3 a_5 - a_3 a_6 - a_4 a_5 \\ + a_4 a_6 - a_5 a_6$$

$$kv_{28} := -a_1 a_2 + a_1 a_3 - a_1 a_4 - a_1 a_5 - a_1 a_6 - a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_2 a_5 + a_2 a_6 - a_3 a_4 - a_3 a_5 - a_3 a_6 + a_4 a_5 \\ + a_4 a_6 + a_5 a_6$$

$$kv_{29} := -a_1 a_2 - a_1 a_3 + a_1 a_4 - a_1 a_5 - a_1 a_6 + a_2 a_3 - a_2 a_4 + a_2 a_5 + a_2 a_6 - a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 - a_4 a_5 \\ - a_4 a_6 + a_5 a_6$$

$$kv_{30} := -a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_1 a_4 + a_1 a_5 - a_1 a_6 + a_2 a_3 + a_2 a_4 - a_2 a_5 + a_2 a_6 + a_3 a_4 - a_3 a_5 + a_3 a_6 - a_4 a_5 \\ + a_4 a_6 - a_5 a_6$$

$$kv_{31} := -a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_1 a_4 - a_1 a_5 + a_1 a_6 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_2 a_5 - a_2 a_6 + a_3 a_4 + a_3 a_5 - a_3 a_6 + a_4 a_5 \\ - a_4 a_6 - a_5 a_6$$

$$kv_{32} := -a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_1 a_4 - a_1 a_5 - a_1 a_6 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_2 a_5 + a_2 a_6 + a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_4 a_5 \\ + a_4 a_6 + a_5 a_6$$

Ievadot komandu, **kv[31]+kv[32]**; rezultātā iegūst koeficienta $a_j a_k$, $j, k = 1, \dots, 6$ zīmi, sakaitot $S_{31}^2 > 1$ ar $S_{32}^2 > 1$.

> **kv[31]+kv[32];**

$$2 a_3 a_5 - 2 a_1 a_2 - 2 a_1 a_4 - 2 a_1 a_5 + 2 a_2 a_3 + 2 a_2 a_4 + 2 a_2 a_5 + 2 a_3 a_4 + 2 a_4 a_5 - 2 a_1 a_3$$

Ievadot komandu, **kv[18]+kv[20]+kv[23]+kv[30]**; rezultātā iegūst koeficienta $a_j a_k$, $j, k = 1, \dots, 6$ zīmi, sakaitot $S_{18}^2 > 1$ ar $S_{20}^2 > 1$, $S_{23}^2 > 1$, $S_{30}^2 > 1$.

> **kv[18]+kv[20]+kv[23]+kv[30];**

$$-2 a_3 a_5 - 2 a_1 a_5 - 4 a_1 a_6 - 2 a_2 a_5 - 2 a_4 a_5 + 2 a_5 a_6$$

Bakalaura darbs „Tomaševska problēma” izstrādāts LU Fizikas un matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Kristīne Danemane

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītājs: Asoc. prof., Andrejs Cibulis

Recenzents: Asoc. prof. Jānis Cepītis

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā 04.06.2008.

Metodiķe: Dzintra Holsta

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē

09.06.2008. prot. Nr. __, vērtējums __ (_____)

Komisijas sekretāre: Margarita Buiķe