LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

LATVIJAS MATEMĀTIKAS RAJONU OLIMPIĀŽU UZDEVUMI UN TO RISINĀJUMI

MAĢISTRA DARBS

Autors: **Inese Ozoliņa**
Stud. apl. io08047

Darba vadītājs:
asoc. prof. Andrejs Cibulis

RĪGA 2010

ANOTĀCIJA

Maģistra darbs „Latvijas matemātikas rajonu olimpiāžu uzdevumi un to risinājumi” veidots kā palīgmateriāls skolotājiem un skolēniem, kas gatavojas matemātikas olimpiādēm. Darbā tiek aplūkoti uzdevumi no 1975./76., 1976./77. un 1977./78. mācību gada rajona matemātikas olimpiādēm. Darbs sastāv no uzdevumiem, ieteikumiem, atrisinājumiem un komentāriem.

Atslēgvārdi: matemātikas olimpiāde, rajona olimpiāde.

ANNOTATION

Master’s paper “The Latvian Regional Mathematics Olympiad Problems and Their Solutions” formed as an auxiliary material for teachers and pupils who are preparing for mathematical Olympiads. Problems from the school-years 1975/76-1977/78 regional mathematics Olympiads have been discussed in this paper. The paper consists of the problems, recommendations, solutions and commentaries.

Key words: mathematical Olympiad, regional Olympiad.

SATURS

IEVADS

Bieži vien skolēni nesaprot, kāpēc tik svarīgi ir iepazīt, izprast un mācīties matemātiku. Skolotāja labākie darba augļi ir tad, kad skolēns ir ieinteresēts risināt dažādus matemātiskus uzdevumus, jo tieši matemātikas zināšanas var sniegt labāku uztveri, aktīvu domāšanu, radošo iztēli, pozitīvas emocijas skolēnam. Vispārējā izglītībā matemātika ir mācību priekšmets, kura ietvaros skolēni apgūst formālas spriešanas metodes, kā arī sastopas ar pierādījuma jēdzienu. Tāpat matemātika ir neaizstājams instruments arī dažādu priekšmetu (fizika, astronomija, informātika u. c.) apguvē. Vingrinoties matemātisko uzdevumu risināšanā, skolēna domāšana pakāpeniski pakļaujas loģiski saistošiem secināšanas likumiem. Loģiskajai domāšanai ir būtiska loma tālākajā personības intelektuālajā attīstībā. Matemātikas specifiskā loģika audzina skolēnos domāšanas kultūru, tā spēj ievērojami paplašināt skolēnu redzesloku.

Matemātikas olimpiādes ir līdzeklis matemātikas pilnīgākai apgūšanai un izpratnei. To uzdevumi ir atšķirīgi no skolā apgūtajiem, līdz ar to matemātikas olimpiādes arī paplašina skolēnu redzesloku un vedina skolēnus domāt par matemātikas zinātnes tēmām. Olimpiāžu uzdevumi satur daudzus faktus un idejas, kas nav atrodami skolas kursā. Olimpiādes sniedz skolēniem ne tikai jaunas zināšanas, bet arī dod iespēju satikties ar līdzīgi domājošajiem. Tādējādi skolēni tiek motivēti turpināt padziļinātu matemātikas apgūšanu, taču ar pašām olimpiādēm vien nepietiek – skolēniem ir nepieciešams tām gatavoties. Veiksmīgs starts olimpiādē un sacensību sportiskais raksturs ir faktori, kas var pamudināt apdāvinātus skolēnus sagatavošanās posmam veltīt daudz vairāk laika un garīgās enerģijas, tādējādi būtiski papildinot savas matemātiskās zināšanas [1].

Olimpiāžu kustība Latvijā ilgst vairākus desmitus gadu un ievērojami ietekmē matemātikas kultūras attīstību. Latvijā regulāri tiek organizēti reģionāli un valsts mēroga ārpusklases pasākumi matemātikā – matemātikas olimpiādes un konkursi: Valsts matemātikas olimpiāde 3 kārtās (sagatavošanās, rajona un Valsts olimpiādes), Atklātā matemātikas olimpiāde, 4. klašu konkurss „Tik vai ... Cik?", Jauno matemātiķu konkurss 4. – 7. klašu skolēniem, Profesora Cipariņa klubs visiem pamatskolēniem, Neklātienes Nodarbības vidusskolēniem, Mazā Matemātikas un Informātikas universitāte, matemātikas kursi skolēniem un skolotājiem vairākos Latvijas reģionos, kā arī citas aktivitātes.

Par dažādām sacensībām matemātikas uzdevumu risināšanā līdz 1975./76. mācību gadam ziņas atrodamas darbos [2] un [3]. Sagatavošanās olimpiādes skolās 5. – 12. klašu skolēniem notiek kopš 1987./88. mācību gada. To rīkošanas ideja pieder Rīgas 25. vidusskolas matemātikas skolotājai A. Gustavai. Rajona olimpiādes 9. – 12. (agrāk 8. – 11.) klasēm notiek kopš 20. gs. piecdesmitajiem gadiem (1950./1951. m. g.). Kopš 1977./78. mācību gada tās, tāpat kā valsts olimpiādes 3. kārta, tiek rīkotas, sadarbojoties LR IZM/LR IZM ISEC un LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skolu (NMS). Savukārt rajonu matemātikas olimpiādes 5. – 8. klašu skolēniem notiek kopš 1978./79. m. g. (dažos rajonos tās notikušas arī agrāk). Atklātās olimpiādes 5. – 12. klašu skolēniem notiek kopš 1973./74. mācību gada. Tās rīko LU A. Liepas NMS. Starptautiskā matemātikas olimpiāde notiek kopš 1959. gada, kad tā notika Rumānijā. Sākumā tajā piedalījās tikai Austrumu bloka valstis. 2007./2008. mācību gadā šajā olimpiādē piedalījās dalībnieki no 97 valstīm. Savukārt komandu sacensības „Baltijas Ceļš" pirmo reizi notika 1990. gadā Rīgā [4], [5].

Matemātikas olimpiādes un konkursi izvirza skolēniem konkrētus mērķus un faktiski nosaka matemātikas padziļinātās apmācības standartus. Šāda veida sacensības rada iespēju uz šo standartu fona salīdzināt savu un citu skolēnu, kā arī skolotāju (pasniedzēju) veikumu. Matemātikas olimpiādes ar savu vērienīgumu un ar tajās esošo sacensību elementu piesaista plašu skolēnu un skolotāju sabiedrību. Piedaloties matemātikas olimpiādēs, skolēnam tiek dota iespēja izdarīt sev jaunus atklājumus. Taču jāievēro, ka šo atklājumu pamatā ir ilgstošs, neatlaidīgs, bieži vien visai grūts skolēna mācību darbs. Olimpiādes un konkursi ir brīvprātīgas aktivitātes, bērni tajos piedalās savas intereses pēc. Ja ilgstoši piedalās matemātikas sacensībās, negūstot nekādus panākumus, skolēnam pamazām var zust entuziasms un vēlme turpināt attīstīt savas nestandarta matemātikas uzdevumu risināšanas iemaņas. Tā kā lielākā daļā skolu ar matemātikas mācīšanu nodarbojas tikai pamatskolas līmenī, skolēniem ir ierobežotas iespējas apgūt paaugstinātas grūtības olimpiāžu uzdevumus un tāpēc maģistra darbs būs noderīgs palīglīdzeklis matemātikas zināšanu labākai apguvei. Maģistra darbā ir ietverti matemātikas olimpiāžu uzdevumi laika periodā no 1975./76. līdz 1977./78. mācību gadam, kā arī ieteikumi to atrisināšanai un uzdevumu atbildes. Darba autore vēlējusies savā darbā aplūkot tieši uzdevumus no pirmajām rajona matemātikas olimpiādēm, lai skolēni vai skolotāji varētu aplūkot un salīdzināt tos ar mūsdienu olimpiāžu uzdevumiem, saprotot, ka uzdevumi katru gadu ir citi, bet risināšanas metodes nemainās.

Darbā autore, risinot nestandarta uzdevumus, uzskatāmi parāda, ka uzdevumu atrisināšanai bieži nepieciešami nevis sarežģīti matemātiski pārveidojumi, bet prasme saskatīt uzdevumiem raksturīgu īpatnību, no kuras ar loģiskiem vai kombinatoriskiem spriedumiem var iegūt pilnīgu atrisinājumu. Daudzus nestandarta uzdevumus var risināt, izmantojot tikai vispārīgus spriešanas paņēmienus.

Maģistra darbā ietvertie uzdevumu risinājumi ir būtiski, lai varētu sagatavoties olimpiādēm. Šajā procesā ieteicams skatīt arī LU A. Liepas NMS (un arī citu organizāciju) izdotās grāmatas ar izstrādātiem olimpiāžu un konkursu uzdevumu atrisinājumiem. Ikviens no LU A. Liepas NMS izdotajiem materiāliem un arī šis darbs ir sagatavots tā, lai ar to varētu strādāt ne tikai skolotāji un apdāvinātie skolēni, bet gan katrs interesents, kurš ir gatavs ieguldīt savā attīstībā laiku un darbu. Tieši interese un pašatdeve ir noteicošie faktori skolēnu izaugsmei un iespējai gūt panākumus.

Daudziem uzdevumiem iespējami vairāki atšķirīgi risinājumi, tāpēc ir vērts uzdevumus atrisināt paša spēkiem un tad iepazīties ar sniegtajiem atrisinājumiem, jo tie var saturēt jaunas, Jums agrāk nezināmas idejas. Tādējādi Jūs attīstīsiet iemaņas un praktizēsieties patstāvīgi atrast un pielietot metodes uzdevumu risināšanā. Ja tomēr nav ideju kā atrisināt konkrēto uzdevumu, tad ieteicams vispirms izskatīt uzdevumu risināšanas ieteikumu sadaļu.

Darba autore uzsver, ka rakstot šādus darbus, tiek ieguldīts liels darbs un tas prasa pietiekami ilgstošu laiku. Katru uzdevumu ir nepieciešams izanalizēt, aplūkot katru iespēju, kas dažkārt olimpiādēs laika trūkuma dēļ, netiek izdarīts līdz galam.

Darba mērķis bija atrisināt uzdevumus, parādot pēc iespējas pilnīgāku risinājumu. Tika izveidota arī ieteikumu nodaļa, lai skolēns vai skolotājs nespējot rast risinājumu paša spēkiem, apskatot nelielu ieteikumu, spētu atrisināt to. Darbā ir iekļauta arī komentāru nodaļa, kurā parādīts, kā dažus uzdevumus ir iespējams atrisināt savādāk vai kur meklējama papildinformācija par uzdevumu. Tiem uzdevumiem, kuriem ir komentāri, pie uzdevuma numura ir burts „k”, piemēram, **77.8.4.$^{\mathbf{k}}$**.

Darbā ir iekļauti kopā 66 zīmējumi, kuri katrā nodaļā ir apzīmēti ar nodaļai atbilstošu burtu, t. i., viens zīmējums uzdevumu daļā, 10 zīmējumi ieteikumu nodaļā (piem., N1. zīm.), 48 zīmējumi – atrisinājumu daļā (piem., A1. zīm.) un 7 – komentāru nodaļā (piem., K1. zīm.).

Izmantotās literatūras saraksts dots darba beigās. Atsauces rakstītas formā [1] un avoti sakārtoti to izmantošanas secībā.

UZDEVUMI

1975. /76. mācību gads

8. klase

76.8.1. Šaha meistars spēlēja simultānspēli pie vairākiem galdiņiem. Pirmajās divās stundās viņš uzvarēja 60% no visa dalībnieku skaita, bet divas partijas zaudēja. Nākamo divu stundu laikā meistars spēli pabeidza. 40% no atlikušajiem dalībniekiem viņš uzvarēja, piecas partijas beidzās neizšķirti un vienu zaudēja. Ar cik dalībniekiem meistars spēlēja?

76.8.2. Atrast visus divciparu skaitļus, kuru summa ar skaitli, kas pierakstīts ar tiem pašiem cipariem otrādā secībā, ir naturāla skaitļa kvadrāts.

76.8.3. Skaitļi a^2, b^2, c^2 veido aritmētisku progresiju, kuras diference nav 0. Pierādīt, ka skaitļi $\frac{1}{c+b}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ arī veido aritmētisku progresiju.

76.8.4. Vienādsānu trapeces pamata mala ir a, bet diagonāle veido ar pamata malu leņķi α un ar sānu malu leņķi β. Aprēķināt pārējo trapeces malu garumus.

76.8.5. Ap regulāru trijstūri ABC apvilkta riņķa līnija ar rādiusu R. Cita riņķa līnija ar centru punktā O_1 pieskaras trijstūra malām AB un BC un apvilktajai riņķa līnijai. Atrast attālumu O_1A. Noskaidrot, vai O_1 atrodas trijstūrī ABC vai ārpus tā.

9. klase

76.9.1. Atrisināt nevienādību $\sqrt{\frac{(x^2-3x-4)^2}{x^2-8x+16}}-3>0$.

76.9.2. Dota skaitļu virkne 1, 9, 7, 6, 3, …, kurā katrs nākamais elements, sākot ar piekto, ir vienāds ar iepriekšējo četru elementu summas pēdējo ciparu. Vai ir iespējams, ka četri cits citam sekojoši virknes elementi ir 1, 8, 7, 6? Apgalvojumu pamatot.

76.9.3. Riņķa līnijā novilkta horda AB un tās galapunktos novilktas pieskares AC un BC. No patvaļīga riņķa līnijas punkta P vilkti perpendikuli pret hordu un pieskarēm: PD, PE, PF. Pierādīt, ka $PD^2 = PE \cdot PF$.

76.9.4. Izmantojot tikai lineālu, sadalīt doto trapeci divās daļās, kuru laukumi ir vienādi.

76.9.5. Dots taisnstūris, kura malas ir 11 m un 17 m. Taisnstūra centrā tup pele, bet vienā virsotnē – kaķis. Kaķis var skriet tikai pa taisnstūra malām, bet pele – pa malām un diagonālēm. Kaķa ātrums ir 10 reizes lielāks par peles ātrumu. Gan kaķis, gan pele var mainīt kustības virzienu tikai taisnstūra virsotnēs vai centrā. Viņi abi sāk skriet reizē un skrien bez apstāšanās. Kaķis vienmēr zina, kur atrodas pele, bet pele nekad nezina, ko dara un kur atrodas kaķis. Vai pele var paglābties no kaķa?

10. klase

76.10.1. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases}(x+y\sqrt{x}+y^2)\sqrt{x+y^2}=65\\(x-y\sqrt{x}+y^2)\sqrt{x+y^2}=185\end{cases}$.

76.10.2. Noskaidrot, ar kādām a vērtībām vienādojumam $\sin^6 x+\cos^6 x = a\cdot(\sin^4 x+\cos^4 x)$ eksistē atrisinājums, un atrast šo atrisinājumu.

76.10.3. Atrast skaitļa $\underbrace{888\cdots88}_{1976}^{\overbrace{333\cdots33371}^{1976}}$ pēdējo ciparu.

76.10.4. Aprēķināt leņķi starp mediānu un bisektrisi, kas vilktas taisnleņķa trijstūrī no šaurā leņķa α virsotnes.

76.10.5. Dotas n taisnes. Jebkuras divas no tām krustojas. Pierādīt, ka visas dotās taisnes atrodas vienā plaknē vai arī iet caur vienu punktu.

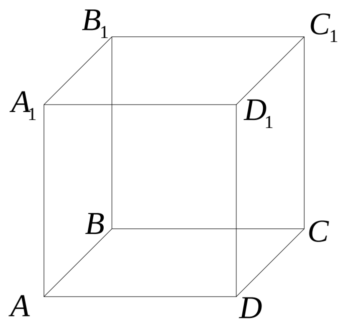
11. klase

76.11.1. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} \dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2} = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$.

76.11.2. Atrisināt vienādojumu $\operatorname{tg}^2 x + \cos 4x = 0$.

76.11.3. Atrisināt nevienādību $\log_{\frac{1}{2}}(\log_x(x+2)) \geq -1$.

76.11.4. Dots kubs $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (sk. 1. zīm.).



1. zīm.

Caur virsotni A, šķautnes DD_1 viduspunktu un skaldnes BB_1C_1C centru novilkta plakne. Atrast to daļu tilpumu attiecību, kurās šī plakne sadala kubu.

76.11.5. n taisnleņķa trijstūros dots pa katetei ar garumiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$, bet n pārējo katešu garumu summa ir b. Kādiem jābūt šo katešu garumiem, lai visu trijstūru hipotenūzu garumu summa būtu vismazākā iespējamā? Atrisināt uzdevumu, ja

a) $n = 2$,

b) $n = 3$,

c) vispārīgajā gadījumā.

1976. /77. mācību gads

8. klase

77.8.1. Vienkāršot izteiksmi

$$\left(\frac{1-x}{x^2+x^3-x^4}-\frac{x^3+x-2}{x^5-x^3-2x^2-x}\right):\left(\frac{1+x}{x^3+x^4+x^5}-\frac{1-x+x^2}{x^3}\right).$$

77.8.2. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=14 \\ x^2+y^2+xy=84 \end{cases}.$

77.8.3. Trīs veseli skaitļi veido ģeometrisko progresiju. Ja tās otro locekli palielina par 8, tad skaitļi veido aritmētisko progresiju, bet, ja vēl palielina trešo locekli par 64, tad atkal iegūst ģeometrisko progresiju. Atrast sākumā dotos skaitļus.

77.8.4.[k] Kalna nogāze beidzas ar līdzenumu un veido ar horizontālo līmeni leņķi α. Saules stari krīt nogāzes virzienā uz leju un ar nogāzi veido leņķi β, bet ar horizontālo virzienu leņķi $\alpha+\beta$. Uz nogāzes a metru attālumā no tās pamata aug koks, kura ēnas garums uz zemes ir b metri. Aprēķināt koka augstumu.

77.8.5. Riņķa līnijā, kuras rādiuss nav lielāks par 12 cm, ievilkts riņķis. Riņķa centrs zīmējumā nav atzīmēts. Skolēna rīcībā ir tikai viens uzstūris, kura hipotenūzas garums ir ne mazāks par 25 cm. Kā jārīkojas skolēnam, lai konstruētu ievilktā leņķa bisektrisi?

9. klase

77.9.1. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $11^x-8^y=1$.

77.9.2. Pierādīt nevienādību $\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\cdots+\sqrt{a_n}}}}<3$, ja $0<a_i\le 6$ katram naturālam i.

77.9.3. Trijstūrī ABC pareiza vienādība $m_a^2+m_b^2=5m_c^2$, kur m_a, m_b, m_c – trijstūra mediānas. Pierādīt, ka ABC ir taisnleņķa trijstūris.

77.9.4. Dots kubs $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Uz šķautnes AA_1 atzīmēts viduspunkts M, bet skaldnes $ABCD$ plaknē dota taisne t. Caur taisni t un punktu M novilkta plakne P. Konstruēt figūru, kas veidojas, plaknei P šķeļoties ar kubu, ja taisne t krusto šķautnes AB un BC iekšējos punktos. Noskaidrot, kāds malu skaits var būt šķēluma daudzstūrim atkarībā no t stāvokļa, ja t novietojums plaknē $ABCD$ ir patvaļīgs. Katru gadījumu ilustrēt ar zīmējumu.

77.9.5. Kādā pilsētā grupa māņticīgu cilvēku uzskata, ka autobusa biļete ir laimīga, ja tās numuru ciparu summa ir 18, bet otra grupa par laimīgu uzskata tādu biļeti, kurai pirmo trīs ciparu summa vienāda ar pēdējo trīs ciparu summu. Noskaidrot, cik ir tādu autobusa biļešu numuru, kurus abas māņticīgo cilvēku grupas reizē uzskata par laimīgām (numurā ir 6 cipari, pirmais cipars var būt arī 0).

10. klase

77.10.1. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $11^x-8^y=1$.

77.10.2. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x^2 + y^2 = x + y \\ x^4 + y^4 = \dfrac{1}{2}(x+y)^2 \end{cases}$.

77.10.3. Pierādīt, ka taisnleņķa trijstūrī pareiza nevienādība $\dfrac{r^2}{m_a^2 + m_b^2} \le \dfrac{3-\sqrt{8}}{5}$, kur m_a, m_b – trijstūra mediānas.

77.10.4. Dots kubs $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Uz šķautnes AA_1 atzīmēts viduspunkts M, bet skaldnes $ABCD$ plaknē dota taisne t. Caur taisni t un punktu M novilkta plakne P. Konstruēt figūru, kas veidojas, plaknei P šķeļoties ar kubu, ja taisne t krusto šķautnes AB un BC iekšējos punktos. Noskaidrot, kāds malu skaits var būt šķēluma daudzstūrim atkarībā no t stāvokļa, ja t novietojums plaknē $ABCD$ ir patvaļīgs. Katru gadījumu ilustrēt ar zīmējumu.

77.10.5. Pierādīt nevienādību $\dfrac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \dfrac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} \ge 1$, ja $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $n \in N$.

11. klase

77.11.1. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $11^x - 8^y = 1$.

77.11.2. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} \cos x + \dfrac{1}{\cos x} = 9 \operatorname{tg} y \\ \sin x + \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{2} \operatorname{ctg} y \end{cases}$.

77.11.3. Atrast tās parametra a vērtības, ar kurām funkcijas $f(x) = x^2 + (a+1)^2 + 2|x + a - 1|$ minimums lielāks nekā 4.

77.11.4. Vai vienādsānu taisnleņķa trijstūri var sagriezt galīgā skaitā šaurleņķa trijstūru? Atbildi pamatot.

77.11.5. Perpendikulāri plaknei krīt paralēlu staru kūlis. Jūsu rīcībā ir taisnstūra paralēlskaldnis, kura šķautņu garumi ir 3 cm, 4 cm un 5 cm. Atrast maksimālo ēnas laukumu, kādu var iegūt plaknē ar šo paralēlskaldni. Atbildi pamatot.

1977. /78. mācību gads

8. klase

78.8.1. Divu trijstūru laukumi ir 50 cm^2 katrs. Pirmā trijstūra pamats ir par 10 cm garāks nekā otrā trijstūra pamats. Kādās robežās atrodas pirmā trijstūra pamata garums, ja zināms, ka abu trijstūru augstumu garumu starpība nav mazāka kā $\frac{5}{6}$ cm?

78.8.2. Trīs skaitļi veido ģeometrisko progresiju. Ja otro skaitli palielina par divi, tad skaitļi veido aritmētisko progresiju, bet, ja vēl trešo skaitli palielina par deviņi, tad skaitļi veido ģeometrisko progresiju. Atrast sākuma dotos skaitļus.

78.8.3. Divas riņķa līnijas, kuru rādiusu garumi ir 13 cm un 14 cm, krustojas un attālums starp to centriem ir 15 cm. Aprēķināt abu riņķa līniju kopējās hordas garumu.

78.8.4. Dots, ka $a+b+c<0$ un vienādojumam $ax^2+bx+c=0$ nav sakņu. Noteikt c zīmi.

78.8.5. Vai kvadrātisku papīra loksni ar izmēriem 3×3 var salocīt tādā veidā, lai tā apsegtu visu virsmu kubam, kura šķautnes garums ir 1 (pieļaujot, ka dažās vietās papīrs gulstas vairākās kārtās)? Papīru nedrīkst ieplēst vai saplēst vairākās daļās.

9. klase

78.9.1. Pierādīt šādu apgalvojumu: ja n ir naturāls skaitlis, tad $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ dalās ar 9.

78.9.2. Pilsētā ielas iet ziemeļu – dienvidu un austrumu – rietumu virzienos. Cik dažādu īsāko ceļu pa pilsētas ielām savieno ielu krustojumu, kas atrodas 5 kvartālus uz ziemeļiem un 5 kvartālus uz rietumiem no dotā?

78.9.3. Skaitļu virkne (x_n) definēta ar vispārīgā locekļa formulu $x_n=\dfrac{2n^2+n+1}{n^2+3n+1}$.

Pierādīt, ka tās robeža ir 2, lietojot

a) teorēmas par summas, dalījuma utt. robežu,

b) robežas definīciju un nelietojot teorēmas par summas, dalījuma utt. robežu.

78.9.4. Trīs vienādas riņķa līnijas krustojas vienā punktā. Jebkuru divu riņķa līniju otrs krustpunkts un trešās riņķa līnijas centrs nosaka taisni. Pierādīt, ka šīs trīs taisnes krustojas vienā punktā.

78.9.5. Dotas divas plaknes P un Q, kas šķeļas pa taisni t. Plaknē P doti punkti A un C, plaknē Q – punkts B. Punkti A, B, C nepieder pie taisnes t. Ar cirkuļa un lineāla palīdzību konstruēt plaknē Q punktu D tā, lai četri punkti A, B, C, D būtu trapeces virsotnes $(AB\parallel CD)$. Konstrukcijas drīkst izdarīt tikai plaknēs P un Q un nekādās citās plaknēs. Konstrukcijās drīkst izmantot taisni t. Attālumus starp punktiem drīkst ar cirkuļa palīdzību pārnest no vienas no plaknēm P vai Q uz otru plakni.

10. klase

78.10.1. Atrast četrciparu skaitli, kas dalās ar 7 un ir izsakāms kā kāda naturāla skaitļa kvadrāta un kuba summa.

78.10.2. Pārveidot par reizinājumu izteiksmi $2+\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$.

78.10.3. Kādam jābūt skaitlim a, lai taisne $y = 4 - x$ būtu parabolas $y = ax - x^2$ pieskare?

78.10.4. Doti skaitļi a, b, c, d, e, f, g, h. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem $ac + bd$, $ae + bf$, $ag + bh$, $ce + df$, $cg + dh$, $eg + fh$ nav negatīvs.

78.10.5. Dotas divas plaknes P un Q, kas šķeļas pa taisni t. Plaknē P dots punkts A, bet plaknē Q – punkts D. Ne A, ne D nepieder pie taisnes t. Ar cirkuļa un lineāla palīdzību, konstruēt plaknē P punktu B, bet plaknē Q – punktu C tā, lai $ABCD$ būtu vienādsānu trapece, kurā var ievilkt riņķa līniju $(AB \parallel CD)$ (ar cirkuli un lineālu drīkst izdarīt konstrukcijas tikai plaknē P un plaknē Q un nekādās citās plaknēs. Bez tam drīkst ar cirkuli izmērīt attālumu starp jebkuriem diviem punktiem, kas pieder plaknei P vai Q (varbūt arī viens vienai, bet otrs otrai) un atlikt šo attālumu plaknē P vai plaknē Q. Konstrukcijās drīkst izmantot taisni t).

11. klase

78.11.1. Atrisināt nevienādību $8\sin^6 x + 3\cos 2x + 2\cos 4x + 1 > 0$.

78.11.2. Dotas divas koncentriskas riņķa līnijas. Iekšējā riņķa līnijā ievilkts kvadrāts. Uz ārējās riņķa līnijas ņemts punkts M un savienots ar visām kvadrāta virsotnēm. Pierādīt, ka iegūto četru nogriežņu garumu kvadrātu summa nav atkarīga no punkta M stāvokļa uz ārējās riņķa līnijas.

78.11.3. Dots, ka $n > 7$ ir naturāls skaitlis. Pierādīt, ka eksistē daudzskaldnis ar n šķautnēm. Noskaidrot, vai eksistē daudzskaldnis ar 7 šķautnēm.

78.11.4. Pierādīt nevienādību $2^{n-1} \cdot n! \leq n^n$, ja n – naturāls skaitlis.

78.11.5. A un B spēlē šādu spēli. B iedomājas 16 dažādus skaitļus $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{16}$. A uzdot viņam jautājumus: "Vai taisnība, ka $x_i < x_j$?" un pēc katra jautājuma saņem atbildi "jā" vai "nē".

a) Kāds ir mazākais jautājumu skaits, kas jāuzstāda spēlētājam A, lai noteikti uzzinātu, kurš no B iedomātajiem skaitļiem ir vislielākais? Kā to izdarīt?

b) Kāds ir mazākais jautājumu skaits, kas jāuzstāda spēlētājam A, lai noteikti varētu uzzināt gan to, kurš no B iedomātajiem skaitļiem ir vislielākais, gan to, kurš ir otrais lielākais? Kā to izdarīt?

IETEIKUMI

1975. /76. mācību gads

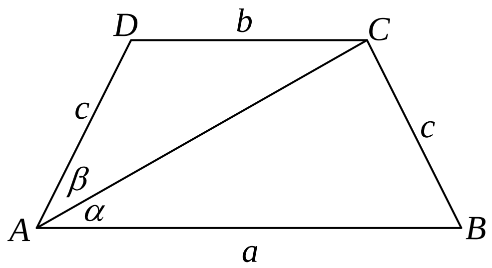
76.8.1. Dalībnieku skaitu apzīmējiet ar n un sastādiet lineāru vienādojumu.

76.8.2. Apzīmējiet doto divciparu skaitli ar $\overline{ba}=10b+a$ un apskatiet summu $\overline{ab}+\overline{ba}$.

76.8.3. Izmantojot ekvivalentus pārveidojumus, pierādiet, ka no vienādības $a^2+c^2=2b^2$ seko vienādība $\frac{1}{c+b}+\frac{1}{a+b}=2\frac{1}{c+a}$.

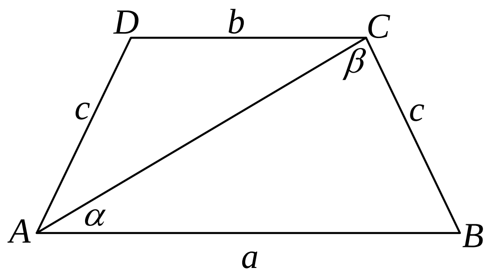
76.8.4. Izmantojiet sinusu teorēmu. Jāapskata divi gadījumi:

Pirmajā gadījumā apskatiet trapeci, ja $\beta=\angle DAC$ (sk. N1. zīm.).



N1. zīm.

Otrajā gadījumā, ja $\beta=\angle ACB$ (sk. N2. zīm.).



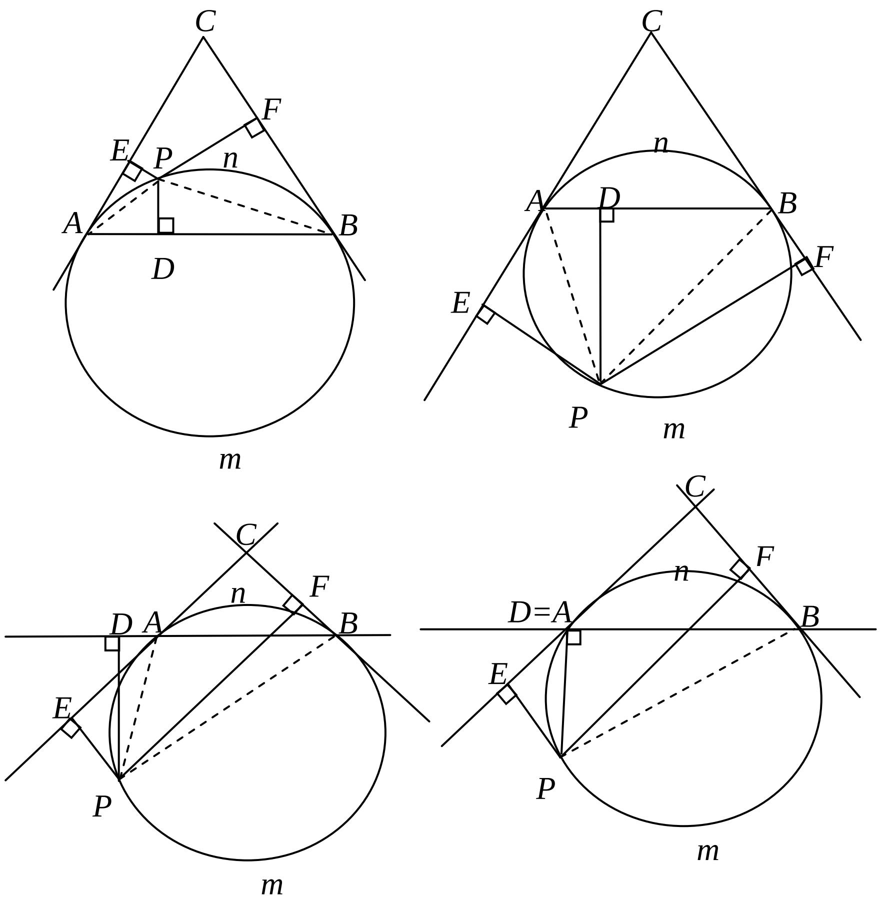
N2. zīm.

76.8.5. Caur abu riņķa līniju pieskaršanās punktu D novelciet pieskari, kas atšķeļ no leņķa $\angle ABC$ regulāru trijstūri A_1BC_1. Izmantojiet sakarības regulārā trijstūrī.

76.9.1. Izmantojot saīsinātās reizināšanas formulas un kvadrātsaknes īpašību, doto nevienādību pārveidojiet formā $|x+1|>3$. Atrisiniet to!

76.9.2. Uzrakstiet doto skaitļu virkni pēc moduļa 2. Ievērojiet, ka tā ir periodiska ar garumu 5 un dotie četri skaitļi pēc moduļa 2 veido fragmentu, kas dotajā skaitļu virknē nav sastopams.

76.9.3. Apskatiet četrus gadījumus atkarībā no punkta P novietojuma (sk. N3. zīm.).



N3. zīm.

Pierādījumā izmantojiet īpašības par ievilktiem leņķiem un leņķi starp hordu un pieskari, kā arī trijstūru līdzību.

76.9.4. Atrodiet diagonāļu krustpunktu un sānu malu pagarinājumu krustpunktu. Savienojot šos divus punktus, sadaliet trapeci divās vienlielās daļās. Pierādiet!

76.9.5. Aplūkojiet taisnstūra diagonāles garumu – tas ir iracionāls skaitlis. Tā kā diagonāles garumu raksturo iracionāls skaitlis, tad laika brīdis, kad pele ir kādā no virsotnēm, arī ir iracionāls skaitlis, bet kaķa ātrums, pārvietojoties tikai pa taisnstūra malām, ir racionāls skaitlis. Tātad – kaķis peli nenoķers.

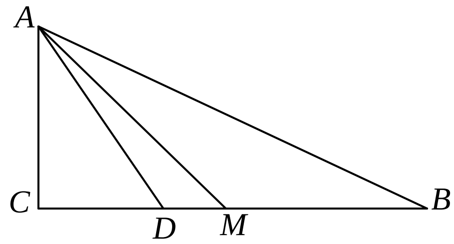
76.10.1. Sasummējot dotos vienādojumus, iegūstiet $\left(\sqrt{x+y^2}\right)^3 = 125 \quad \Rightarrow \quad x + y^2 = 25$.

Ievietojiet šo rezultātu vienā no dotajiem vienādojumiem, iegūstiet $y\sqrt{x} = -12$. Atrisiniet vienādojumu sistēmu!

76.10.2. Vienādojumu pārveidojiet formā $\sin 2x = \pm 2\sqrt{\dfrac{a-1}{2a-3}}$. Atrisiniet to!

76.10.3. Uzrakstiet virkni 8^n pēc moduļa 10. Tā ir periodiska ar perioda garumu 4.

76.10.4. Meklējamo leņķi $\angle DAM$ apzīmējiet ar x (sk. N4. zīm.).



N4. zīm.

Tad $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+x\right)=\frac{CM}{CA}$, kur AM – mediāna, AD – bisektrise dotajā trijstūrī ABC.

76.10.5. Aplūkojiet 2 no dotajām taisnēm a un b, to krustpunktu O un plakni π, kurai tās pieder. Jāapskata divas iespējas:

a) Visas pārējās taisnes pieder plaknei π;

b) Visas dotās taisnes krustojas vienā punktā.

76.11.1. Kāpiniet abus vienādojumus kvadrātā. Iegūtos vienādojumus saskaitiet un veiciet ekvivalentus pārveidojumus.

76.11.2. Pārveidojiet doto vienādojumu formā $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\cos 4x=0$.

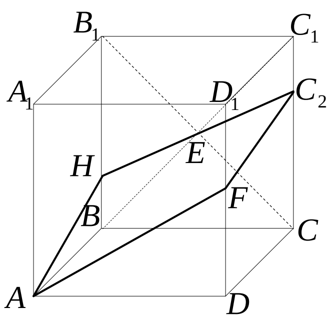
Izmantojot trigonometrisko pārveidojumu formulas, iegūstiet $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}+2\cos^2 2x-1=0.$

Atrisiniet iegūto vienādojumu!

76.11.3. Dotā nevienādība ekvivalenta nevienādībai $\log_x(x+2)\le 2$.

Analizējiet 2 gadījumus: $x>1$ un $0<x<1$.

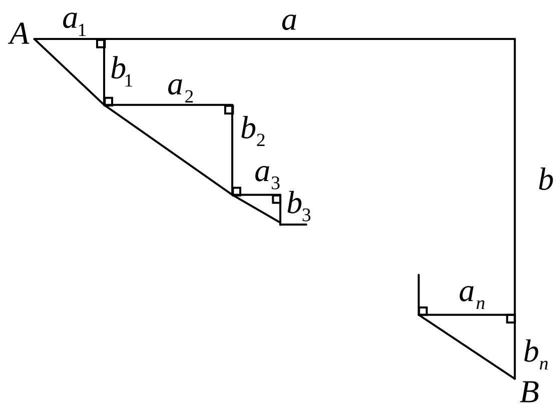
76.11.4. Šķautnes CC_1 krustpunktu ar novilkto plakni apzīmējiet ar C_2 (sk. N5. zīm.).



N5. zīm.

Viegli pierādīt, ka $CC_2 = \frac{3}{4}a$. Caur punktu C_2 novelciet plakni $A_2B_2C_2D_2$ paralēli kuba skaldnei *ABCD*. Pamatojiet, ka paralēlskaldņa $ABCDA_2B_2C_2D_2$ tilpums ir vienāds ar $\frac{3}{4}a^3$, atšķelto daļu tilpumi ir $\frac{3}{8}a^3$ un $\frac{5}{8}a^3$. Šo daļu tilpumu attiecība ir $\frac{3}{5}$.

76.11.5. Izvietojiet taisnleņķa trijstūrus tā, kā parādīts zīmējumā (N6. zīm.).



N6. zīm.

Ievērojiet, ka doto trijstūru hipotenūzas veido lauztu līniju, kas savieno punktus A un B. Tās garums būs vismazākais, ja šī līnija būs nogrieznis AB.

1976./ 77. mācību gads

77.8.1. Doto izteiksmi var pārveidot formā $\dfrac{x-1}{x^2-x-1}$.

77.8.2. Vienādojumu sistēmas pirmo vienādojumu pārveidojot formā $x=10-y$ un ievietojot otrajā vienādojumā, iegūstiet kvadrātvienādojumu, kura saknes ir 2 un 8.

77.8.3. Apzīmējiet ģeometriskās progresijas pirmo locekli ar x, otro – px un nākamo ar p^2x.

Izmantojot aritmētiskās un ģeometriskās progresijas īpašības, iegūstiet vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x(p^2x+64)=(px+8)^2 \\ x+p^2x=2(px+8) \end{cases}$. Atrisiniet to!

77.8.4. Aplūkojiet divus gadījumus: $a \ge b$ un $a < b$.

Ja $a \ge b$, tad koka garums ir vienāds ar $\dfrac{b\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$.

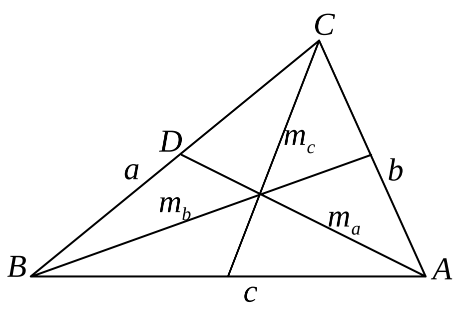
Otrajā gadījumā $(a<b)$, iegūstiet atbildi $(b-a)tg(\alpha+\beta)+a\dfrac{\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$.

77.8.5. Ar uzstūra palīdzību ievelciet riņķa līnijā divus taisnleņķa trijstūrus. To hipotenūzu krustpunkts O ir riņķa līnijas centrs.

77.9.1. Doto vienādojumu $11^x-8^y=1$ pārveidojiet formā: $11^x-1=8^y$. Apskatiet labās un kreisās puses skaitļu pēdējos ciparus.

77.9.2. Pierādiet, izmantojot matemātisko indukciju.

77.9.3. Apskatiet trijstūri ADC (sk. N7. zīm.).



N7. zīm.

No kosinusu teorēmas seko, ka $m_a^2=b^2+\dfrac{a^2}{4}-ab\cos C$.

Līdzīgi iegūstiet, ka $m_b^2=a^2+\dfrac{b^2}{4}-ab\cos C$, $m_c^2=\dfrac{a^2+b^2}{4}+\dfrac{1}{2}ab\cos C$.

Ievietojot iegūtās vienādības dotajā, iegūstiet, ka dotais trijstūris ir taisnleņķa.

77.9.4. Meklētie šķēlumi ir piecstūris un sešstūris. Uzkonstruējiet tos!

77.9.5. Apzīmējiet biļetes numuru ar $\overline{abcdef}$, kur a, b, c, d, e, f ir skaitļi no 0 līdz 9. Pēc uzdevuma nosacījumiem $a+b+c=d+e+f$. Tātad jānoskaidro, cik dažādos veidos skaitli 9 var izteikt kā 3 ciparu summu. Kopējais laimīgo biļešu skaits ir 3025.

77.10.1. Sk. 77.9.1. ieteikumu.

77.10.2. Pirmo vienādojumu ievietojiet otrajā vienādojumā un izmantojiet nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

77.10.3. Taisnleņķa trijstūrim izpildās vienādības $m_a^2+m_b^2=\frac{5}{4}c^2$, $r=\frac{a+b-c}{2}$ un nevienādība $a+b\le c\sqrt{2}$. Izmantojot šīs vienādības un nevienādību, pierādiet prasīto!

77.10.4. Sk. 77.9.4. ieteikumu.

77.10.5. Dotā nevienādība ir ekvivalenta nevienādībai $\frac{\sin^{n+2}x}{\cos^n x}+\frac{\cos^{n+2}x}{\sin^n x}\ge\sin^2 x+\cos^2 x$.

Veiciet trigonometriskus pārveidojumus.

77.11.1. Sk. 77.9.1. ieteikumu.

77.11.2. Sareizinot dotos vienādojumus un veicot algebriskus pārveidojumus, iegūstiet: $\sin x\cos x+\frac{2}{\sin x\cos x}=\frac{9}{2}$. Atrisiniet to!

77.11.3. Aplūkojiet divus gadījumus atkarībā no moduļa vērtības!

77.11.4. Jā, to var izdarīt! Pamatojiet, ka minimālais trijstūru skaits ir 7!

77.11.5. Pēc uzdevuma nosacījumiem, gaismas stari krīt perpendikulāri pret virsmu (plakni). Tas nozīmē, ka ēna būs tieši zem figūras. Apskatiet dažādus paralēlskaldņa novietojumus un pamatojiet, ka ēnas maksimālais laukums ir $\sqrt{769}$ cm^2.

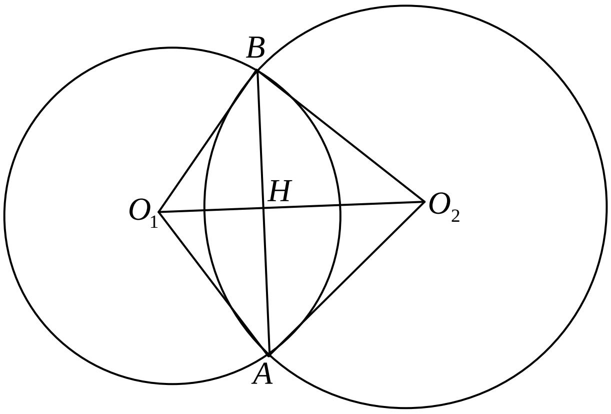
1977./ 78. mācību gads

78.8.1. Uzdevuma noteikumus var pierakstīt vienādojumu sistēmas veidā $\begin{cases} a_1 - a_2 = 10 \\ h_2 - h_1 \geq \dfrac{5}{6} \\ a_1 > 10 \end{cases}$.

Izmantojiet sakarības trīsstūrī un iegūstiet nevienādību $\dfrac{100}{a_1 - 10} - \dfrac{100}{a_1} \geq \dfrac{5}{6}$. Atrisiniet to!

78.8.2. Izmantojot sakarības ģeometriskajā un aritmētiskajā progresijā, iegūstiet vienādojumu sistēmu: $\begin{cases} x(p^2x+9) = (px+2)^2 \\ x + p^2x = 2(px+2) \end{cases}$. Atrisiniet to!

78.8.3. Riņķa līniju centrus apzīmējiet ar O_1 un O_2, riņķa līniju krustpunktus ar A un B (sk. N8. zīm.).

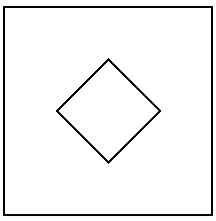


N8. zīm.

Riņķa līniju kopējā horda ir nogrieznis AB, kura garums ir divkāršots trijstūra O_1AO_2 augstums. Aprēķiniet to!

78.8.4. Apzīmējiet kvadrāttrinomu $ax^2 + bx + c$ ar $f(x)$. Tad $f(1) = a + b + c$ un $f(0) = c$. Izmantojot doto, pamatojiet, ka skaitlis c ir negatīvs.

78.8.5. Jā, var. Ja kubu uz papīra loksnes novieto tā, kā parādīts N9. zīmējumā.



N9. zīm.

Tālāk papīru aplokam ap kubu. Skaitliski aprēķini pierāda, ka tiks noklāta arī kuba augšējā skaldne.

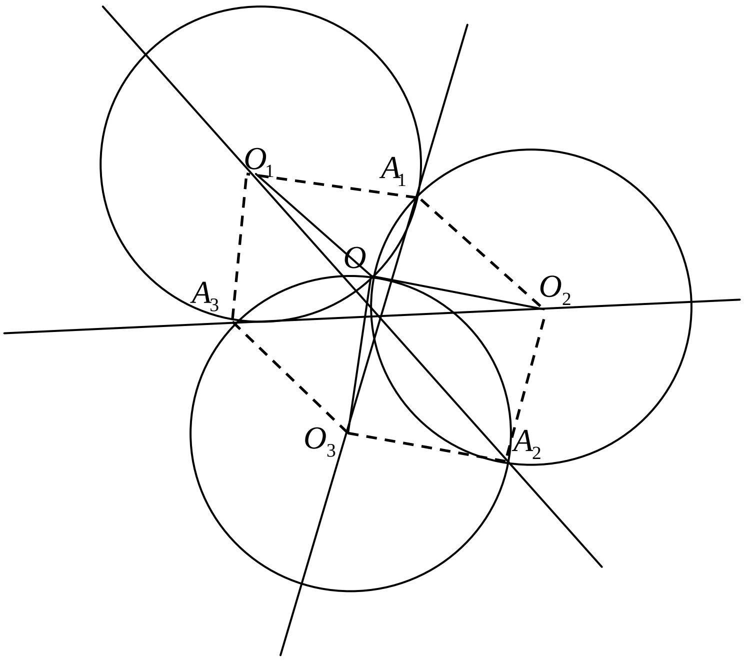
78.9.1. Apgalvojumu pierādiet ar matemātisko indukciju.

78.9.2. Aplūkojiet visas iespējamās kombinācijas (bez atkārtojumiem). Īsāko ceļu kopskaits ir 252.

78.9.3. a) Izdaliet x_n saucēju un skaitītāju ar n^2 un iegūstiet $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2+0+0}{1+0+0} = 2$.

b) Pēc virknes robežas definīcijas, ir spēkā nevienādība $|x_n - 2| < \varepsilon$, kur $x_n = \frac{2n^2+n+1}{n^2+3n+1}$. Pierādiet, ka $|x_n - 2| < \frac{5}{n}$.

78.9.4. Apzīmē riņķa līniju kopīgo krustpunktu ar O, to centrus ar O_1, O_2, O_3, bet otros krustpunktus ar A_1, A_2, A_3. Apskatiet sešstūri $O_1A_3O_2A_1O_3A_2$ (sk. N10. zīm.).



N10. zīm.

78.9.5. Punktu D konstruē izmantojot faktu, ka punkts D ir punkta C paralēlā projekcija plaknē, kuras virzienu nosaka taisne AB.

78.10.1. Tāds, piemēram, ir skaitlis $13^2 + 13^3 = 2366$.

78.10.2. Pārveidojiet summu $\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$ par $2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$. Izmantojiet trigonometrijas formulas un iegūstiet atbildi: $4\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

78.10.3. Parabolai un taisnei ir tikai viens kopīgs punkts. Atrisiniet vienādojumu $4 - x = ax - x^2$, ievērojot, ka vienādojumam var būt tikai viena sakne.

78.10.4. Aplūkojiet vektorus: $v_1 = (a, b), v_2 = (c, d), v_3 = (e, f), v_4 = (g, h)$ un to skalāros reizinājumus.

78.10.5. Punktus B un C atrod uz taisnēm, kas iet atbilstoši caur punktiem A un D paralēli taisnei t.

78.11.1. Pārveidojiet nevienādību uz trešās pakāpes nevienādību un iegūstiet atbildi: $x \in R \setminus \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in Z$.

78.11.2. Pierādījumā izmantojiet kosinusu teorēmu. Apzīmējiet mazās riņķa līnijas rādiusu ar r, lielās – ar R, riņķu kopīgo centru ar O, kvadrāta virsotnes ar A, B, C, D. Pierādiet, ka summa $MA^2 + MC^2 + MB^2 + MD^2 = 4R^2 + 4r^2$, kas nav atkarīga no punkta M izvietojuma uz lielās riņķa līnijas.

78.11.3. Pakāpeniski var iegūt daudzskaldni ar patvaļīgu šķautņu skaitu $n > 7$, bet daudzskaldnis ar 7 šķautnēm neeksistē.

78.11.4. Uzrakstiet nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko skaitļiem 1, 2, 3, ... , n: $\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \le \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n}$, kuru pārveidojot, iegūsiet prasīto.

78.11.5. a) Salīdziniet pirmo ar otro, tad lielāko no pirmajiem diviem ar trešo utt. Mazākais jautājumu skaits ir 15.

b) Sadaliet visus 16 skaitļus pa pāriem un veiciet salīdzināšanu. Mazākais jautājumu skaits ir 18.

ATRISINĀJUMI

1975./ 76. mācību gads

76.8.1. Dalībnieku skaitu simultānspēlē apzīmēsim ar n, kur $n \in N$. Tad pirmajās 2 stundās meistars spēlēja ar $0,6 \cdot n + 2$ dalībniekiem. Nākamajās 2 stundās viņš spēlēja ar $0,4 \cdot n - 2$ dalībniekiem, no kuriem 40% uzvarēja. Bija 5 neizšķirtas un 1 zaudēta partija.

Iegūstam lineāru vienādojumu $0,6 \cdot n + 2 + 0,4 \cdot (0,4 \cdot n - 2) + 6 = n$.

Pārveidojot, iegūstam $0,24 \cdot n = 7,2 \Rightarrow n = 30$.

Pārbaude.

Tā kā dalībnieku skaits var būt tikai un vienīgi naturāls skaitlis, jāveic pārbaude. Tātad jāpārbauda:

1) Vai pirmajās divās stundās meistara uzvarēto dalībnieku skaits ir naturāls skaitlis? Jā, jo pēc uzdevumā dotā, meistars pirmajās divās stundās uzvarēja 60% no 30 dalībniekiem (60% no 30 ir 18), kas ir naturāls skaitlis.
2) Vai nākamajās divās stundās uzvarēto dalībnieku skaits ir naturāls skaitlis? Jā, jo meistars pirmajās divās stundās spēlēja ar 18 dalībniekiem, kurus uzvarēja un vēl diviem, kuriem zaudēja. Tātad nākamajās divās stundās meistars spēlēja ar 10 dalībniekiem, no kuriem 40% uzvarēja, tas ir četrus.

Tā kā iegūtie skaitļi ir naturāli, tad iegūtais atrisinājums ir derīgs.

Tātad simultānspēlē piedalījās 30 dalībnieki.

76.8.2. Apzīmēsim meklējamo skaitli ar $\overline{ab}$.

Tad $\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b) = n^2$. Tā kā n^2 ir skaitļu 11 un $a + b$ reizinājums, tad n^2 dalās ar 11. Ņemot vērā, ka skaitlis 11 ir pirmskaitlis, tad arī n jādalās ar 11. Tāpēc $11(a + b)$ dalās ar 121. No tā seko, ka $a + b$ dalās ar 11. Tā kā a un b ir cipari, tad tiem jāapmierina nosacījums $1 \le a + b \le 18$. Tātad vienīga iespēja, lai $a + b$ dalītos ar 11, ir $a + b = 11$. Visi šādi skaitļi der, jo rezultātā iegūstam skaitli $121 = 11^2$.

Šie skaitļi ir 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

76.8.3. Izmantosim definīciju par aritmētisko progresiju: Par aritmētisko progresiju sauc skaitļu virkni, kurā katru nākamo locekli (sākot no otrā) iegūst no iepriekšējā, pieskaitot tam vienu un to pašu skaitli (diferenci, kuru apzīmē ar d).

Tā kā skaitļi a^2, b^2, c^2 pēc dotā veido aritmētisko progresiju, tad pēc aritmētiskās progresijas definīcijas seko, ka $|a|$, $|b|$, $|c|$ visi ir dažādi. Tāpēc daļu $\frac{1}{c+b}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ saucēji nav 0.

Izmantojot to, ka jebkuru triju secīgu locekļu a_{n-1}, a_n, a_{n+1} vidējais loceklis $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$,

iegūstam, ka $b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$. No šejienes seko, ka $a^2 + c^2 = 2b^2$.

Līdzīgi uzrakstīsim skaitļu $\frac{1}{c+b}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ vidējo locekli: $\frac{1}{c+a} = \frac{\frac{1}{c+b}+\frac{1}{a+b}}{2}$ un pārbaudīsim, vai iegūst patiesu vienādību. Izdarot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam

$$\frac{1}{c+b}+\frac{1}{a+b} = 2\cdot\frac{1}{c+a}$$

$$\frac{a+b+c+b}{(c+b)(a+b)} = 2\cdot\frac{1}{c+a}$$

$$(a+c+2b)(c+a) = 2(c+b)(a+b)$$

$$ac+a^2+c^2+ac+2bc+2ab-2ac-2bc-2ab-2b^2 = 0$$

$$a^2+c^2-2b^2 = 0$$

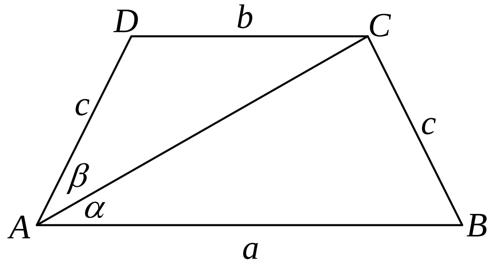
$$a^2+c^2 = 2b^2.$$

Ieguvām patiesu vienādību.

Aritmētiskās progresijas pazīme: Ja skaitļu virknē katrs loceklis ir vienāds ar divu tā blakuslocekļu vidējo aritmētisko, tad šāda virkne veido aritmētisko progresiju.

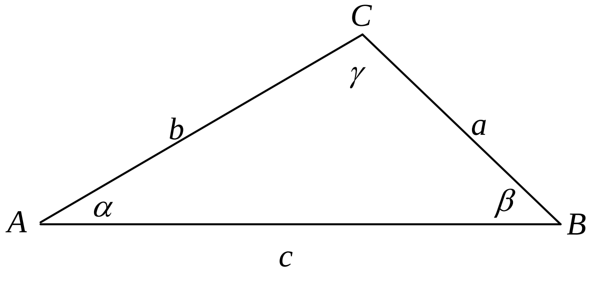
Pēc pazīmes, seko, ka arī skaitļi $\frac{1}{c+b}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ veido aritmētisko progresiju.

76.8.4. Viena iespēja ir, ka $\angle BAC = \alpha$ un $\angle DAC = \beta$, tad vienādsānu trapecē $\angle DAB = \angle ABC = \alpha+\beta$ (sk. A1. zīm.).



A1. zīm.

Izmantosim sinusu teorēmu: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ (sk. A2. zīm.).



A2. zīm.

Ja $\angle BAC = \alpha$, tad no sinusu teorēmas trijstūrī ABC seko, ka $\dfrac{a}{\sin\angle ACB} = \dfrac{c}{\sin\angle CAB}$.

$$\frac{a}{\sin(180° - \alpha - (\alpha + \beta))} = \frac{c}{\sin\alpha}$$

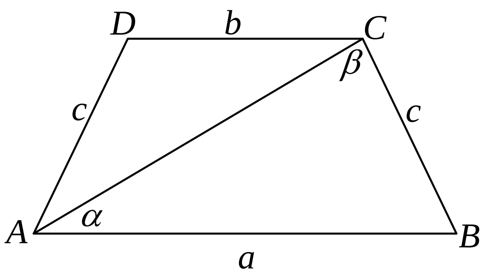
$$c = \frac{a\sin\alpha}{\sin(2\alpha + \beta)}.$$

Lietojot sinusu teorēmu trijstūrī ADC, iegūstam $\dfrac{b}{\sin\angle DAC} = \dfrac{c}{\sin\angle DCA}$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\alpha} = \frac{a\sin\alpha}{\sin(2\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(2\alpha+\beta)}$$

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}.$$

Aplūkosim otru gadījumu, ja $\angle BAC = \alpha$ un $\angle ACB = \beta$ (sk. A3. zīm.).



A3. zīm.

Ja $\angle BAC = \alpha$, tad no sinusu teorēmas trijstūrī ABC seko, ka $\dfrac{a}{\sin\angle ACB} = \dfrac{c}{\sin\angle CAB}$.

$$\frac{a}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\alpha} \text{ un } c = \frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

$\angle BAC = \angle ACD = \alpha$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm CD un AB, kuras krusto taisne AC. Tātad $\angle ADC = \angle DCB = \alpha + \beta$ un

$$\angle DAC = 180° - \angle ADC - \angle ACD = 180° - (\alpha+\beta) - \alpha = 180° - 2\alpha - \beta.$$

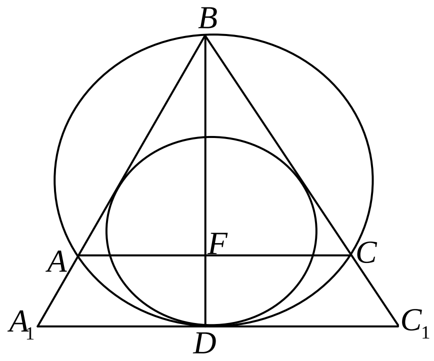
Trijstūrī ADC lietosim sinusu teorēmu: $\dfrac{b}{\sin\angle DAC} = \dfrac{c}{\sin\angle DCA}$.

$$\frac{b}{\sin(180° - (2\alpha+\beta))} = \frac{c}{\sin\alpha}$$

$$\frac{b}{\sin(2\alpha+\beta)} = \frac{\dfrac{a\sin\alpha}{\sin\beta}}{\sin\alpha}.$$

Tātad $b = \dfrac{a\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta}$.

76.8.5. Caur abu riņķa līniju pieskaršanās punktu D novelkam to kopējo pieskari. Simetrijas pēc tā paralēla AC, tāpēc atšķeļ no leņķa $\angle ABC$ regulāru trijstūri A_1BC_1 (sk. A4. zīm.).



A4. zīm.

Trijstūris ABC ir līdzīgs trijstūrim A_1BC_1, jo $AC \parallel A_1C_1$. Tātad trijstūris A_1BC_1 ir regulārs.

O_1 ir trijstūrī A_1BC_1 ievilktās riņķa līnijas centrs. Trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs ir trijstūra malu vidusperpendikulu krustpunkts un regulāram trijstūrim augstums sakrīt ar vidusperpendikulu, mediānu un bisektrisi. Tātad BD ir augstums. Simetrijas dēļ (regulārs trijstūris ir simetrisks pret trijstūra augstumu un riņķa līnija ir simetriska pret tās diametru) BD ir ap trijstūri ABC apvilktās riņķa līnijas diametrs, tāpēc BD ir vienāds ar $2R$.

Tā kā regulārā trijstūrī A_1BC_1 punkts O_1 ir arī mediānu krustpunkts, pēc mediānu īpašības seko, ka $O_1D = \frac{2R}{3}$.

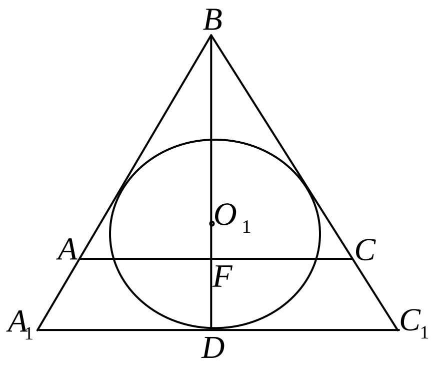
Vienādmalu trijstūra ABC malas garums ir $AB = R\sqrt{3}$. Pēc konstrukcijas $O_1D \perp A_1C_1$ un $BD \perp A_1C_1$ kā augstums. Regulārā trijstūrī BD ir leņķa A_1BC_1 bisektrise un BF ir leņķa ABC bisektrise. Tā kā $\angle A_1BC_1 = \angle ABC$, tad BD un BF atrodas uz vienas taisnes. Tātad punkti F, B, D, O_1 atrodas uz vienas taisnes.

Tālāk noskaidrosim, vai punkts O_1 atrodas trijstūra ABC iekšpusē vai ārpusē.

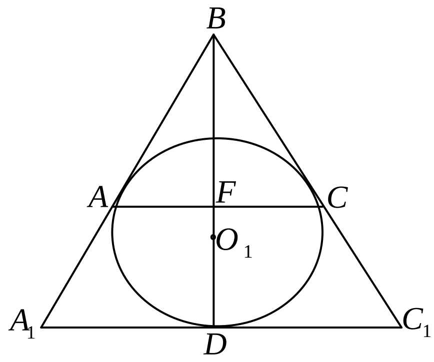
Tā kā trijstūris ABC ir regulārs un tā mala $AB = R\sqrt{3}$, tad trijstūra augstums $BF = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{2}$. Tālāk aprēķināsim $FD = BD - BF = 2R - \frac{3R}{2} = \frac{R}{2}$.

Ja $O_1D > FD$, tad punkts O_1 atrodas trijstūra ABC iekšpusē (sk. A5. zīm.).

Ja $O_1D < FD$, tad punkts O_1 atrodas trijstūra ABC ārpusē (sk. A6. zīm.).



A5. zīm.



A6. zīm.

Tā kā $O_1D = \frac{2R}{3} > \frac{R}{2} = FD$, tad O_1 atrodas trijstūra ABC iekšpusē.

Tālāk aprēķināsim O_1A garumu.

Tā kā O_1 atrodas trijstūra ABC iekšpusē, tad $O_1F = O_1D - FD = \frac{2R}{3} - \frac{R}{2} = \frac{R}{6}$.

Aplūkosim trijstūri AFO_1, $\angle F = 90°$ un $AF = \frac{1}{2}AB = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Pēc Pitagora teorēmas

$$AO_1 = \sqrt{O_1F^2 + AF^2} = \sqrt{\left(\frac{R}{6}\right)^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{36} + \frac{3R^2}{4}} = \sqrt{\frac{28R^2}{36}} = \frac{\sqrt{7}}{3}R.$$

Atbilde. $AO_1 = \frac{\sqrt{7}}{3}R$ un O_1 atrodas trijstūra ABC iekšpusē.

76.9.1. Doto nevienādību pārveidojam par $\sqrt{\frac{(x^2-3x-4)^2}{(x-4)^2}} > 3$. Izmantojam kvadrātsakņu īpašību $\sqrt{a^2} = |a|$, iegūstam $\frac{|x^2-3x-4|}{|x-4|} > 3$.

Sadalām nevienādības skaitītāju reizinātājos: $\frac{|x+1| \cdot |x-4|}{|x-4|} > 3$.

Saīsinot daļu, iegūstam $|x+1| > 3$.

Šķirojam divus gadījumus:

a) $x+1 > 3$ jeb $x > 2$ un ievērojam, ka $x \neq 4$;

b) $x+1 < -3$ jeb $x < -4$.

Apvienojot iegūtos intervālus, iegūstam atbildi $x \in (-\infty; -4) \cup (2; 4) \cup (4; \infty)$.

76.9.2. Uzrakstīsim doto skaitļu virkni pēc moduļa 2 (atlikumus, ko dod skaitļi, tos dalot ar 2): 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, ...

Atlikumu 0 iegūst, ja skaitlis ir pāra, bet atlikumu 1, ja nepāra. Tā kā ir jāsaskaita 4 skaitļi, tad pāra skaitli var iegūt, ja

1) Visi saskaitāmie ir pāra skaitļi;
2) Visi saskaitāmie ir nepāra skaitļi;
3) Divi saskaitāmie ir pāra un divi ir nepāra skaitļi.

Saskaitot 4 skaitļus, nepāra skaitli var iegūt, ja

1) viens ir pāra skaitlis, pārējie nepāra skaitļi;
2) viens ir nepāra skaitlis un pārējie pāra skaitļi.

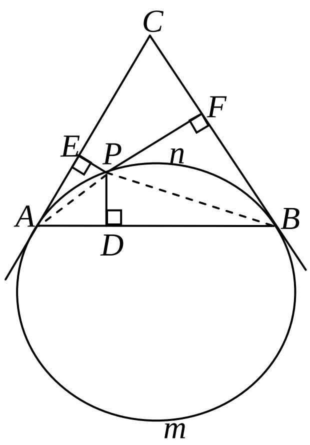
Tā kā skaitļu virknes pirmie trīs elementi ir nepāra skaitļi un ceturtais ir pāra skaitlis, tad nākamie 4 elementi būs nepāra skaitļi. Ir iegūti 4 pēc kārtas sekojoši nepāra skaitļi un nākamais elements būs pāra skaitlis. Tātad atkal virknē ir trīs nepāra skaitļi, kuriem seko pāra skaitlis, utt. Esam parādījuši, ka dotā skaitļu virkne ir periodiska ar perioda garumu 5.

Skaitļu virknē pēc kārtas nevar būt uzrakstīti cipari 1, 8, 7, 6, jo pēc moduļa 2 tie veido fragmentu 1, 0, 1, 0, kāds dotajā virknē nav sastopams.

76.9.3. Šķirosim četrus gadījumus:

a) Punkts P pieder lokam $\overset{\smile}{AnB}$.

Tā kā ievilkts leņķis ir vienāds ar pusi no loka lieluma, uz kura tas balstās, un leņķis starp hordu un pieskari ir vienāds ar pusi no tā loka lieluma, kuru šis leņķis ietver, tad seko, ka $\angle EAP = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AP} = \angle PBD$ (sk. A7. zīm.) [6].



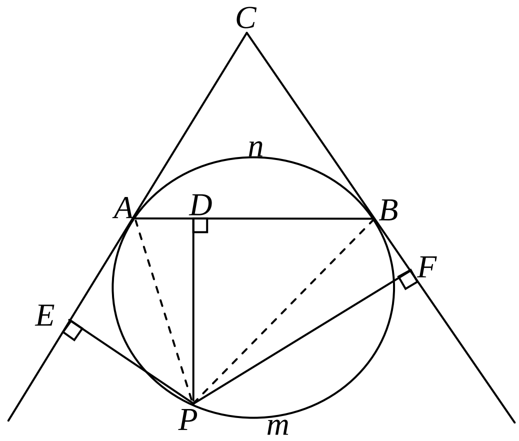
A7. zīm.

No tā seko taisnleņķa trijstūru PEA un PDB līdzība pēc pazīmes – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra divi leņķi ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra diviem leņķiem. Tātad $\frac{PE}{PD} = \frac{PA}{PB}$.

Apskatot līdzīgus trijstūrus PFB un PDA, iegūst, ka $\frac{PF}{PD} = \frac{PB}{PA}$.

Sareizinot šīs vienādības, iegūstam $\dfrac{PE \cdot PF}{PD^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad PD^2 = PE \cdot PF$.

b) Punkts P pieder lokam $A\breve{m}B$ un $D \in AB$ (sk. A8. zīm.).



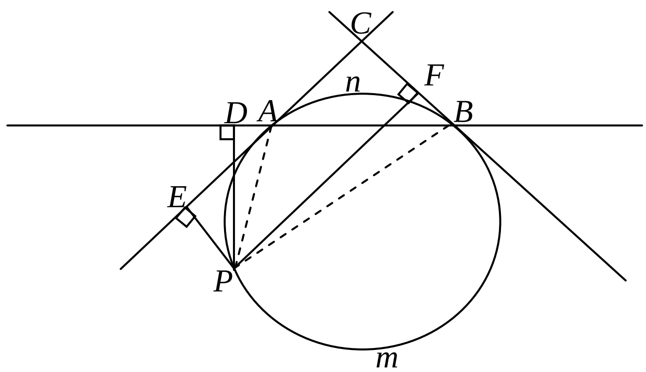
A8. zīm.

Taisnleņķa trijstūri AEP un BDP ir līdzīgi, jo $\angle EAP = \dfrac{1}{2}\overset{\cup}{AP} = \angle DBP$. Tātad $\dfrac{PE}{PD} = \dfrac{PA}{PB}$.

Apskatot līdzīgus trijstūrus BFP un ADP, iegūst, ka $\dfrac{PF}{PD} = \dfrac{PB}{PA}$.

Sareizinot šīs vienādības, iegūstam $\dfrac{PE \cdot PF}{PD^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad PD^2 = PE \cdot PF$.

c) Punkts P pieder lokam $A\breve{m}B$ un D atrodas uz hordas AB pagarinājuma (sk. A9. zīm.).



A9. zīm.

Taisnleņķa trijstūri PFB un PDA ir līdzīgi, jo $\angle FBP = \dfrac{1}{2}\overset{\cup}{BnP}$ un

$$\angle DAP = 180° - \angle PAB = 180° - \frac{1}{2}\left(360° - P\breve{n}B\right) = 180° - 180° + \frac{1}{2}P\breve{n}B = \frac{1}{2}P\breve{n}B \ .$$

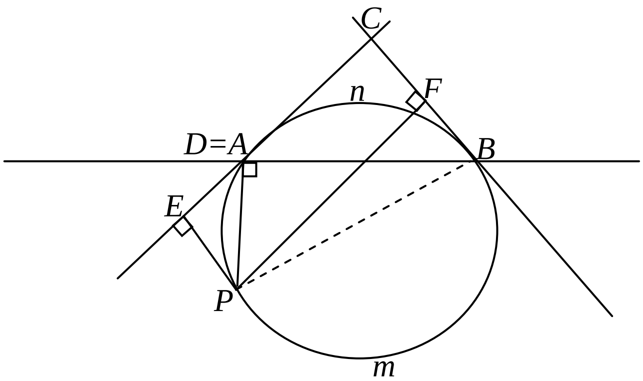
Tātad iegūst, ka $\dfrac{PF}{PD} = \dfrac{PB}{PA}$.

Aplūkojam līdzīgus taisnleņķa trijstūrus PEA un PDB ($\angle EAP = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AP} = \angle ABP$).

Tātad $\frac{PE}{PD} = \frac{PA}{PB}$.

Sareizinot šīs vienādības, iegūstam $\frac{PE \cdot PF}{PD^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad PD^2 = PE \cdot PF$.

d) Punkts P pieder lokam $A\breve{m}B$ un $D = A$ (sk. A10. zīm.).



A10. zīm.

Taisnleņķa trijstūri PED un PDB ir līdzīgi, jo $\angle DBP$ un $\angle DPE$ ir vienādi. $\angle DBP = \frac{1}{2}\breve{DP}$ kā ievilkts leņķis un $\angle DPE = \frac{1}{2}\breve{DP}$ kā hordas-pieskares leņķis. Tātad $\angle DBP = \angle DPE$.

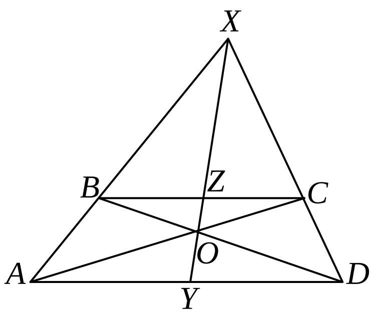
Tātad iegūst, ka $\frac{PE}{PD} = \frac{PD}{PB}$ un $PD^2 = PE \cdot PB$.

Jāpierāda, ka $PB = PF$.

Aplūkojam trijstūri PDB. Tā kā trijstūris ir taisnleņķa, tad hipotenūza PB ir riņķa līnijas diametrs. Punkts F sakrīt ar B, jo $PB \perp CB$ un $PF \perp CB$.

Tātad $PD^2 = PE \cdot PF$.

76.9.4. Dota trapece $ABCD$ (sk. A11. zīm.). Vispirms atrodam taišņu AB un DC krustpunktu X . Pēc tam atrodam nogriežņu AC un BD krustpunktu O.



A11. zīm.

Pierādīsim, ka taisne OX dala trapeces $ABCD$ laukumu uz pusēm, jo no trijstūru līdzībām $\Delta AOY \sim \Delta ZOC$, $\Delta BOC \sim \Delta DOA$, $\Delta ZOB \sim \Delta YOD$ seko, ka $\frac{AY}{ZC} = \frac{AO}{OC} = \frac{DO}{BO} = \frac{YD}{BZ}$.

No trijstūru līdzībām $\Delta XAY \sim \Delta XBZ$, $\Delta XYD \sim \Delta XZC$ seko, ka $\frac{AY}{BZ} = \frac{XY}{XZ} = \frac{YD}{ZC}$.

Sareizinot vienādības $\frac{AY}{ZC} = \frac{YD}{BZ}$ un $\frac{AY}{BZ} = \frac{YD}{ZC}$, iegūstam $\frac{AY^2}{ZC \cdot BZ} = \frac{YD^2}{BZ \cdot ZC}$.

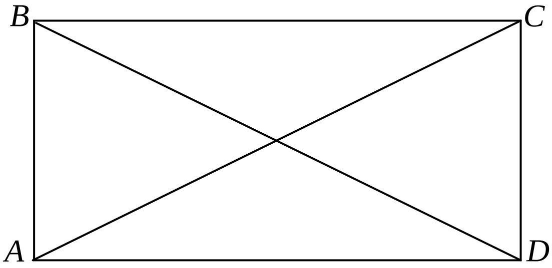
Tātad $AY^2 = YD^2 \quad \Rightarrow \quad AY = YD$.

Līdzīgi pierāda, ka $BZ = ZC$.

Tātad trapecēm $ABZY$ un $YZCD$ ir vienādi augstumi un pa pāriem vienādas pamatu malas, līdz ar to trapeču laukumi ir vienādi.

76.9.5. Atbilde. Jā, pele var paglābties.

Pierādījums: aprakstīsim, kā pele var rīkoties, lai tā paglābtos no kaķa. Pēc dotā pele atrodas taisnstūra diagonāļu krustpunktā O, bet kaķis vienā no taisnstūra virsotnēm (sk. A12. zīm.).



A12. zīm.

Aprēķināsim diagonāles garumu $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{11^2 + 17^2} = \sqrt{410}$ m. Peles ātrumu apzīmēsim ar x m/s un kaķa ātrumu ar $10x$ m/s. Lai kaķis nenoķertu peli, pelei jāpārvietojas pa diagonālēm šurpu – turpu. Vienīgā iespēja kaķim noķert peli ir tajā brīdī, kad pele atrodas kādā no virsotnēm. Lai pele nokļūtu no punkta O līdz kādai no virsotnēm, ir nepieciešamas $\frac{\sqrt{410}}{2x}$ sekundes. Tālāk pelei jāskrien atpakaļ uz punktu O, no turienes – atkal uz kādu no virsotnēm. Tā kā diagonāles garumu raksturo skaitlis $\sqrt{410}$, kas ir iracionāls skaitlis, tad laika brīdis, kad pele ir kādā no virsotnēm, arī ir iracionāls skaitlis. Savukārt kaķis pēc uzdevumā dotā, pārvietojas pa malām un laika brīdis, kad kaķis atrodas kādā no virsotnēm ir racionāls skaitlis. Tā kā laika brīdis, kad pele ir kādā no virsotnēm, ir iracionāls skaitlis, bet kaķis – racionālā laika brīdī, tad kaķis peli nenoķers. Dotā taisnstūra diagonāle $\sqrt{410}$ nav samērojama ar taisnstūra malām, bet kaķa un peles ātrumi ir samērojami. Tātad pele var paglābties no kaķa, ja tā skries tikai pa diagonālēm.

76.10.1.[k] Saskaitot dotos vienādojumus $\begin{cases} (x + y\sqrt{x} + y^2)\sqrt{x + y^2} = 65 \\ (x - y\sqrt{x} + y^2)\sqrt{x + y^2} = 185 \end{cases}$, iegūstam $(2x + 2y^2)\sqrt{x + y^2} = 250$.

Pārveidojam iegūto vienādojumu formā: $2\sqrt{(x+y^2)^2\cdot(x+y^2)}=250$. Vienādojuma abas puses izdalot ar divi, iegūstam: $\sqrt{(x+y^2)^3}=125$. Kāpinām kvadrātā vienādojuma abas puses:

$$\left(\sqrt{(x+y^2)^3}\right)^2=125^2 \quad\Rightarrow\quad (x+y^2)^3=15625 \quad\Rightarrow\quad x+y^2=25.$$

Ievietojot pirmajā vienādojumā $x+y^2=25$, iegūstam:

$$(x+y^2+y\sqrt{x})\sqrt{x+y^2}=65$$

$$(25+y\sqrt{x})\sqrt{25}=65$$

$$25+y\sqrt{x}=13$$

$$y\sqrt{x}=-12.$$

Aplūkojam abus iegūtos vienādojumus un atrisinām tos:

$$\begin{cases} y\sqrt{x}=-12 \\ x+y^2=25 \end{cases}$$

$$y=\frac{-12}{\sqrt{x}}$$

$$x+\left(\frac{-12}{\sqrt{x}}\right)^2=25$$

$$x^2-25x+144=0.$$

Pēc Vjeta teorēmas $x_1=9, x_2=16$.

Iegūstam atrisinājumus: $\begin{cases} x=16 \\ y=-3 \end{cases}$ un $\begin{cases} x=9 \\ y=-4 \end{cases}$.

Tā kā vienādojumus kāpinājām kvadrātā, jāveic pārbaude.

1) Dotajā vienādojumu sistēmā, ievietojam $x=16,\ y=-3$:

$$\begin{cases} (16-3\sqrt{16}+(-3)^2)\sqrt{16+(-3)^2}=65 \\ (16+3\sqrt{16}+(-3)^2)\sqrt{16+(-3)^2}=185 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13\cdot 5=65 \\ 37\cdot 5=185. \end{cases}$$

2) Dotajā vienādojumu sistēmā, ievietojam $x=9,\ y=-4$:

$$\begin{cases} (9-4\sqrt{9}+(-4)^2)\sqrt{9+(-4)^2}=65 \\ (9+4\sqrt{9}+(-4)^2)\sqrt{9+(-4)^2}=185 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13\cdot 5=65 \\ 37\cdot 5=185 \end{cases}.$$

Atbilde: $\begin{cases} x=16 \\ y=-3 \end{cases}$ un $\begin{cases} x=9 \\ y=-4 \end{cases}$.

76.10.2.[k] Vienādojumu $\sin^6 x+\cos^6 x=a(\sin^4 x+\cos^4 x)$ pārveido:

$$(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3=a((\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2).$$

Atdala summas kubu un summas kvadrātu, izmantojot saīsinātās reizināšanas formulas:

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^4 x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos^4 x=$$
$$=a\,(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2a\sin^2 x\cos^2 x$$

Tā kā $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, tad iegūst $1-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)=a-2a\sin^2 x\cos^2 x$.

Izmantojot divkāršā argumenta funkciju pārveidojumus, iegūst

$$1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=a-\frac{1}{2}a\sin^2 2x$$

$$\sin 2x=\pm 2\sqrt{\frac{a-1}{2a-3}}.$$

Lai vienādojumam eksistētu atrisinājums, tad $-1\le\pm 2\sqrt{\frac{a-1}{2a-3}}\le 1$. Tātad $0\le\sqrt{\frac{a-1}{2a-3}}\le\frac{1}{2}$.

Tā kā nevienādības visas puses ir nenegatīvas, tad var kāpināt kvadrātā: $0\le\frac{a-1}{2a-3}\le\frac{1}{4}$.

Nevienādību pārrakstām kā sistēmu: $\begin{cases} \frac{a-1}{2a-3}\le\frac{1}{4} \\ \frac{a-1}{2a-3}\ge 0 \end{cases}$.

Aiznesot visu uz kreiso pusi un vienādojot saucējus, iegūstam: $\begin{cases} \frac{2a-1}{(2a-3)\cdot 4}\le 0 \\ \frac{a-1}{2a-3}\ge 0 \end{cases}$.

Atrisinot nevienādības, iegūstam $\begin{cases} \frac{1}{2}\le a<\frac{3}{2} \\ a\in(-\infty;1]\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right) \end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}\le a\le 1$.

Atrisinājums eksistē, ja $\frac{1}{2}\le a\le 1$.

Atbilde: $x=\pm\frac{1}{2}\arcsin 2\sqrt{\frac{a-1}{2a-3}}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

76.10.3. Uzrakstīsim virkni 8^n pēc moduļa 10 (skaitļu atlikumus, dalot tos ar 10). Dalot skaitli ar 10, atlikumā iegūstam skaitļa pēdējo ciparu. Aplūkosim sīkāk, kā iegūstam pirmos virknes locekļus:

$$8^1=8=8\,(\mathrm{mod}\,10);\ \ 8^2=8\cdot 8=64=4(\mathrm{mod}\,10);\ 8^3=8^2\cdot 8=512=2(\mathrm{mod}\,10);$$

$$8^4=8^3\cdot 8=4096=6(\mathrm{mod}\,10);\ 8^5=8^4\cdot 8=32768=8(\mathrm{mod}\,10);$$

$$8^6=8^5\cdot 8=262144=4(\mathrm{mod}\,10).$$

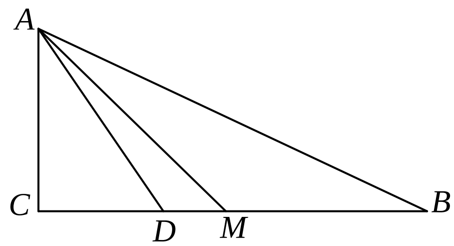
Esam ieguvuši skaitļu virkni: 8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, ...

Saskatot sakarību starp katru nākamo virknes locekli un iepriekšējo, redzam, ka tā ir periodiska ar perioda garumu 4, jo, lai iegūtu katru nākamo skaitli, iepriekšējo skaitli pēc moduļa 10 reizina ar 8 un virknē pieraksta reizinājumu, kas ņemts pēc moduļa 10. Tātad pirmais skaitlis ir 8, otrais skaitlis ir $8\cdot 8=64=4(\mathrm{mod}\,10)$, trešais skaitlis – $4\cdot 8=32=2(\mathrm{mod}\,10)$, ceturtais skaitlis – $2\cdot 8=16=6(\mathrm{mod}10)$, piektais skaitlis – $6\cdot 8=48=8(\mathrm{mod}\,10)$, sestais skaitlis – $8\cdot 8=64=4(\mathrm{mod}\,10)$ un redzam, ka virknē elementi atkal atkārtosies ar perioda garumu 4.

Tā kā $\overbrace{33\cdots 3}^{1976}71=\overbrace{33\cdots 3}^{1974}00+71=4k+3,\ k\in N$, tad $\underbrace{888\cdots 88}_{1976}{}^{\overbrace{333\cdots 3}^{1976}3371}\equiv 8^3\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,10)$.

Tātad dotā skaitļa pēdējais cipars ir 2.

76.10.4. Aplūkosim A13. zīmējumu (AM – mediāna, AD – bisektrise, $\angle CAB=\alpha$).



A13. zīm.

Pēc mediānas definīcijas: $\dfrac{CM}{MB}=1$.

Pēc bisektrises īpašības: $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CD}{DB}$.

Tā kā AB ir hipotenūza, tad $AC<AB$, tātad $\dfrac{CD}{DB}<1\ \Rightarrow\ CD<DB$. Tātad $D\in CM$.

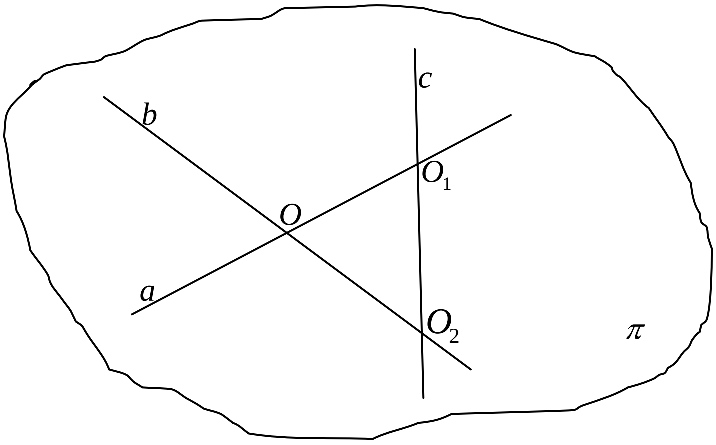
Meklējamo leņķi $\angle DAM$ apzīmēsim ar x. Tad $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}+x\right)=\dfrac{CM}{CA}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{CB}{CA}=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{2}$.

Tā kā $\angle CAM$ ir šaurs, tad $\dfrac{\alpha}{2}+x=\mathrm{arctg}\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{2}$ un izsakot $x=\mathrm{arctg}\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{2}-\dfrac{\alpha}{2}$.

76.10.5. Aplūkosim 2 no dotajām taisnēm a un b, to krustpunktu O un plakni π, kurai tās pieder. Pēc dotā $a\cap b=O,\ a\subset\pi,\ b\subset\pi,\ O\in\pi.$ Jāapskata divas iespējas:

a) Visas dotās taisnes atrodas vienā plaknē.

Pierādījums. Aplūkosim patvaļīgu taisni c. Pēc dotā c ir jākrusto gan $a \in \pi$, gan $b \in \pi$, jo jebkuras divas no n taisnēm krustojas (sk. A14. zīm.).



A14. zīm.

Tātad $a \cap c = O_1 \in \pi$, jo $a \subset \pi$ un $b \cap c = O_2 \in \pi$, jo $b \subset \pi$. Tā kā taisnes divi punkti O_1 un O_2 atrodas plaknē π, tad arī pati taisne c atrodas plaknē π.

Tā kā taisne c ir patvaļīga taisne, tad visas n taisnes pieder plaknei π.

b) Visas dotās taisnes krustojas vienā punktā.

Pierādījums. Kāda no taisnēm c nepieder plaknei π. Plaknei π un taisnei c var būt kopīgs viens punkts vai neviens. Tā kā taisnei c ir jākrusto gan taisne a, gan taisne b, tad c ir jāiet caur punktu O. Tā kā taisne c ir patvaļīga taisne, kas krusto gan a, gan b, tad jebkura no šādām taisnēm ies caur punktu O.

76.11.1. Kāpināsim abus vienādojumus kvadrātā:

$$\left(\frac{x(y^2+1)}{y^2+x^2}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{x^2(y^4+2y^2+1)}{(y^2+x^2)^2} = \frac{9}{25}$$

$$\left(\frac{y(x^2-1)}{x^2+y^2}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{y^2(x^4-2x^2+1)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{16}{25}.$$

Saskaitīsim iegūtos vienādojumus un veiksim ekvivalentus pārveidojumus:

$$\frac{x^2(y^4+2y^2+1)+y^2(x^4-2x^2+1)}{(x^2+y^2)^2} = 1$$

$$\frac{x^2y^4+2x^2y^2+x^2+y^2x^4-2x^2y^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = 1$$

$$\frac{x^2+y^2+x^2y^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 1$$

$$\frac{x^2+y^2+x^2y^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=1$$

$$\frac{1+x^2y^2}{x^2+y^2}=1$$

$$1+x^2y^2=x^2+y^2$$

$$(x^2-1)(y^2-1)=0.$$

Tātad $x^2-1=0$ vai $y^2-1=0$.

Ja $x^2-1=0$, tad neizpildās dotās sistēmas otrā vienādojuma nosacījums. Tātad $x^2-1\neq 0$ un $y^2-1=0$ jeb $y=\pm 1$. Ievietojot pirmajā vienādojumā, iegūst $\frac{2x}{x^2+1}=\frac{3}{5}$ jeb $3x^2-10x+3=0$. Atrisinot kvadrātvienādojumu, iegūst x vērtības 3 un $\frac{1}{3}$. Tātad $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ un $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-1 \end{cases}$.

Pārbaude.

1) Ievietojot vienādojumu sistēmā x = 3, y = 1, iegūstam

$$\begin{cases} \frac{3(1^2+1)}{3^2+1^2}=\frac{3\cdot 2}{10}=\frac{3}{5} \\ \frac{1(3^2-1)}{3^2+1^2}=\frac{1\cdot 8}{10}=\frac{4}{5} \end{cases};$$

2) Ievietojot vienādojumu sistēmā $x=\frac{1}{3}$, $y=-1$, iegūstam

$$\begin{cases} \frac{\frac{1}{3}\left((-1)^2+1\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+(-1)^2}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 2}{\frac{1}{9}+1}=\frac{2\cdot 9}{3\cdot 10}=\frac{3}{5} \\ \frac{(-1)\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2-1\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+(-1)^2}=\frac{(-1)\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)}{\frac{1}{9}+1}=\frac{8\cdot 9}{9\cdot 10}=\frac{4}{5}. \end{cases}$$

Atbilde: $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ un $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-1. \end{cases}$

76.11.2. Pārveidojot doto vienādojumu, iegūstam

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \cos 4x = 0$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} + 2\cos^2 2x - 1 = 0$$

$$\begin{cases} 2\cos^3 2x + 2\cos^2 2x - 2\cos 2x = 0 \\ \cos 2x \neq -1 \end{cases}$$

$\cos 2x = 0$ vai $\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$.

Atrisinot kvadrātvienādojumu, iegūst $\cos 2x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Kvadrātvienādojuma atrisinājuma negatīvā vērība neder, jo tā ir mazāka nekā -1.

Tātad $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} n,\ n \in Z \\ x = \pm \dfrac{1}{2} \arccos \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} + \pi n,\ n \in Z \end{array} \right.$.

76.11.3. Dotā nevienādība ekvivalenta nevienādībai $\log_x (x + 2) \leq 2$.

Aplūkosim nosacījumus, pie kādiem dotā nevienādība ir definēta:

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ \log_x (x + 2) > 0 \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} x \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \\ \log_x (x + 2) > 0 \end{cases}.$$

Aplūkosim 2 gadījumus: $x \in (0; 1)$ un $x \in (1; +\infty)$.

a) Ja $x \in (0; 1)$, tad iegūsim šādu nevienādību sistēmu:

$$\begin{cases} x \in (0; 1) \\ \log_x (x + 2) \leq 2 \\ \log_x (x + 2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (0; 1) \\ \log_x (x + 2) \leq \log_x x^2 \\ \log_x (x + 2) > \log_x 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (0; 1) \\ x + 2 \leq x^2 \\ x + 2 > 1 \end{cases}.$$

No sistēmas trešā nosacījuma seko, ka $x < -1$. Tātad šajā gadījuma sistēmai nav atrisinājuma.

b) Ja $x \in (1; +\infty)$, tad iegūsim šādu nevienādību sistēmu:

$$\begin{cases} x \in (1; +\infty) \\ \log_x (x + 2) \leq \log_x x^2 \\ \log_x (x + 2) > \log_x 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (1; +\infty) \\ x + 2 \leq x^2 \\ x + 2 > 1 \end{cases}.$$

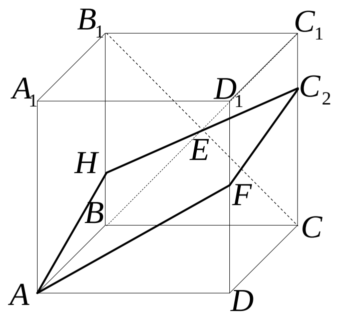
No sistēmas trešā nosacījuma seko, ka $x > -1$.

Tātad iegūstam $\begin{cases} x \in (1; +\infty) \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (1; +\infty) \\ x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty) \end{cases}$.

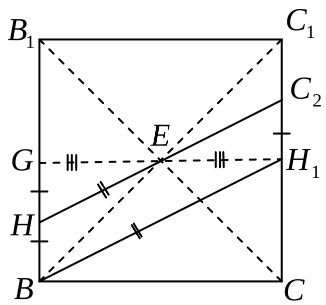
No šejienes seko, ka $x \in [2; +\infty)$.

Atbilde. $x \in [2; +\infty)$.

76.11.4. Šķautnes CC_1 krustpunktu ar novilkto plakni apzīmējam ar C_2 (sk. A15. zīm.). Aplūkojam skaldni BB_1C_1C (sk. A16. zīm.).



A15. zīm.



A16. zīm.

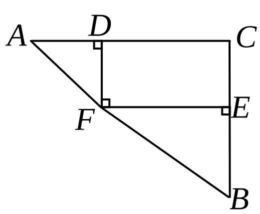
Skaldnē projicējam taisni AF. Šajā skaldnē $BH_1 \| AF \| HC_2$. Tā kā $BH_1 \| AF \| HC_2$, tad $HB = H_1C_2$, $HC_2 = BH_1$ un $H_1C_1 = H_1C$.

Aplūkojam trijstūrus HGE un C_2H_1E. Trijstūri ir vienādi pēc pazīmes *lml* ($\angle G = \angle H_1 = 90°$, $\angle C_2EH_1 = \angle HEG$, $GE = EH_1$). Tad $HG = H_1C_2$.

Tātad $HB = HG = H_1C_2 = \frac{1}{4}a$ un $CC_2 = CH_1 + H_1C_2 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a = \frac{3}{4}a$.

Caur punktu C_2 velkam plakni $A_2B_2C_2D_2$ paralēli kuba skaldnei $ABCD$. Tad paralēlskaldņa $ABCDA_2B_2C_2D_2$ tilpums ir vienāds ar $\frac{3}{4}a^3$. No simetrijas seko, ka vienas atšķeltās daļas tilpums ir puse no šā paralēlskaldņa tilpuma, tātad $\frac{3}{8}a^3$. Otras atšķeltās daļas tilpums ir $\frac{5}{8}a^3$, un šo daļu tilpumu attiecība ir $\frac{3}{5}$.

76.11.5. a) Aplūkosim gadījumu, kad $n = 2$. Dotos taisnleņķa trijstūrus ADF un FEB izvietosim tā, lai to katetes būtu pa pāriem paralēlas un blakus esošo trijstūru virsotne sakristu (sk. A17. zīm.), kur $AD = a_1, EF = a_2, AC = a$ un $DF = b_1, EB = b_2, BC = b$.



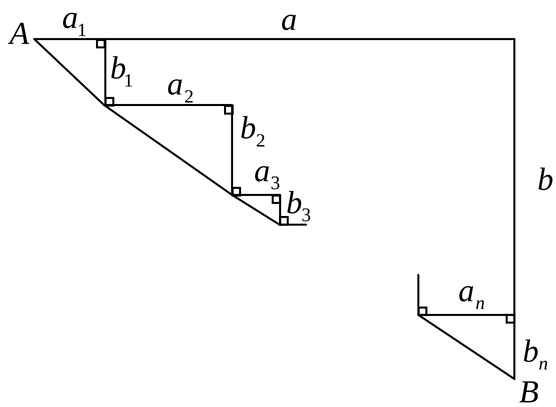
A17. zīm.

Doto taisnleņķa trijstūru hipotenūzas veido nogriezni vai lauztu līniju, kas savieno punktus A un B. Lai A un B savienojošās līnijas garums būtu vismazākais, šie punkti jāsavieno ar nogriezni. Tātad, lai taisnleņķa trijstūru hipotenūzu garumu summa būtu vismazākā, katešu

b_1, b_2 garumiem ir jābūt tādiem, lai, izvietojot tos tā, kā parādīts A15. zīmējumā, iegūtu taisnu līniju. Izveidojas taisnleņķa trijstūris ACB, kas ir līdzīgs mazajiem trijstūriem ADF un FEB. Līdzīgos trijstūros attiecīgās malas ir proporcionālas. Tātad $\frac{AD}{AC} = \frac{DF}{BC}$ un $DF = \frac{AD \cdot BC}{AC}$. Tā kā $AD = a_1, EF = a_2, AC = a$ un $DF = b_1, EB = b_2, BC = b$, tad iegūstam $b_1 = \frac{a_1 \cdot b}{a} = \frac{a_1 \cdot b}{a_1 + a_2}$. Analoģiski iegūstam $BE = b_2 = \frac{EF \cdot BC}{AC} = \frac{a_2 \cdot b}{a_1 + a_2}$.

b) Gadījumā, kad $n = 3$, rīkojas analoģiski.

c) Vispārīgā gadījumā dotos taisnleņķa trijstūrus izvietosim analoģiski kā gadījumā, kad $n = 2$ (sk. A18. zīm.).



A18. zīm.

Doto taisnleņķa trijstūru hipotenūzas veido nogriezni vai lauztu līniju, kas savieno punktus A un B. Lai A un B savienojošās līnijas garums būtu vismazākais, šie punkti jāsavieno ar nogriezni. Tad mazie trijstūrīši būs līdzīgi lielajam taisnleņķa trijstūrim un pārējo katešu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ garumi būs proporcionāli doto katešu garumiem. Tā kā $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ un $b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, tad, izmantojot trijstūru līdzību, uzrakstām malu attiecību $\frac{b_i}{a_i} = \frac{b}{a}$. Tātad $b_i = \frac{b \cdot a_i}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$.

1976./ 77. mācību gads

77.8.1. Doto izteiksmi apzīmējam ar

$$S=\left(\frac{1-x}{x^2+x^3-x^4}-\frac{x^3+x-2}{x^5-x^3-2x^2-x}\right):\left(\frac{1+x}{x^3+x^4+x^5}-\frac{1-x+x^2}{x^3}\right)$$ un pārveidojam

saucējus, iznesot kopīgos reizinātājus pirms iekavām:

$$S=\left(\frac{1-x}{x^2(1+x-x^2)}-\frac{x^3+x-2}{x(x^4-x^2-2x-1)}\right):\left(\frac{1+x}{x^3(1+x+x^2)}-\frac{1-x+x^2}{x^3}\right).$$

Aplūkojam saucēju x^4-x^2-2x-1. Sadalām to reizinātājos:

$$x^4-x^2-2x-1=x^4-\left(x^2+2x+1\right)=x^4-(x+1)^2=-\left((x+1)^2-x^4\right)=$$

$$=-\left(x+1-x^2\right)\left(x+1+x^2\right).$$

Mainot zīmi daļas priekšā, iegūstam:

$$S=\left(\frac{1-x}{x^2(1+x-x^2)}+\frac{x^3+x-2}{x(1+x-x^2)(1+x+x^2)}\right):\left(\frac{1+x}{x^3(1+x+x^2)}-\frac{1-x+x^2}{x^3}\right).$$

Vienādojam saucējus:

$$S=\left(\frac{(1-x)(1+x+x^2)+(x^3+x-2)x}{x^2(1+x-x^2)(1+x+x^2)}\right):\left(\frac{1+x-(1-x+x^2)(1+x+x^2)}{x^3(1+x+x^2)}\right)=$$

$$=\frac{(1+x+x^2-x-x^2-x^3+x^4+x^2-2x)x^3(1+x+x^2)}{x^2(1+x-x^2)(1+x+x^2)(x-x^2-x^4)}=$$

$$=\frac{(x^4-x^3+x^2-2x+1)x}{x(1+x-x^2)(1-x-x^3)}=\frac{(x-1)(x^3-x-1)}{(1+x-x^2)(1-x-x^3)}=\frac{x-1}{x^2-x-1}.$$

77.8.2. Vienādojumu sistēmas $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=14 \\ x^2+y^2+xy=84 \end{cases}$ pirmo vienādojumu pārveidojam formā

$x+y-14=\sqrt{xy}$.

Abas vienādojuma puses kāpinot kvadrātā, iegūstam

$$(x+y-14)^2=\left(\sqrt{xy}\right)^2$$

$$x^2+y^2+2xy+196-28(x+y)=xy$$

$$x^2+y^2+xy+196-28(x+y)=0$$

$$84+196-28(x+y)=0$$

$$x + y = 10.$$

Izsakām x un, ievietojot otrajā vienādojumā, iegūstam kvadrātvienādojumu

$$(10 - y)^2 + y^2 + (10 - y)y = 84$$

$$100 - 20y + y^2 + y^2 + 10y - y^2 = 84$$

$$y^2 - 10y + 16 = 0.$$

Lai atrastu vienādojuma saknes, pielietosim Vjeta teorēmu.

Tātad $\begin{cases} y_1 + y_2 = 10 \\ y_1 \cdot y_2 = 16 \end{cases}$ un $y_1 = 2$, $y_2 = 8$.

Tā kā $x + y = 10 \Rightarrow x_1 = 10 - 2 = 8;\ x_2 = 10 - 8 = 2$.

Veicam pārbaudi, ievietojot vienādojumu sistēmā iegūtās saknes:

$$\begin{cases} 8 + 2 + \sqrt{8 \cdot 2} = 14 \\ 8^2 + 2^2 + 8 \cdot 2 = 84 \end{cases} \text{ un } \begin{cases} 2 + 8 + \sqrt{2 \cdot 8} = 14 \\ 2^2 + 8^2 + 2 \cdot 8 = 84 \end{cases}.$$

Iegūstam patiesas vienādības. Tātad vienādojumu sistēmas atrisinājums ir $\begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}$ vai $\begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$.

77.8.3.[k] Ģeometriskās progresijas definīcija: Par ģeometrisko progresiju sauc skaitļu virkni, kurā katrs nākamais loceklis, sākot ar otro, ir vienāds ar iepriekšējo locekli, kas pareizināts ar vienu un to pašu skaitli, kuru sauc par kvocientu un apzīmē ar q.

Apzīmēsim pirmo locekli ar x, un nākamo ar px, tad trešais loceklis ir $p \cdot p \cdot x = p^2 x$.

Pēc dotā skaitļi x, $px + 8$ un $p^2 x$ veido aritmētisko progresiju, bet skaitļi x, $px + 8$ un $p^2 x + 64$ veido atkal ģeometrisko progresiju.

Izmantojot ģeometriskās progresijas īpašību $x_2^2 = x_1 x_3$ un aritmētiskās progresijas vidējā locekļa aprēķina formulu $2x_2 = x_1 + x_3$, iegūstam vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x(p^2 x + 64) = (px + 8)^2 \\ x + p^2 x = 2(px + 8) \end{cases}.$$

Veicot aritmētiskus pārveidojumus, iegūstam

$$\begin{cases} p^2 x^2 + 64x = p^2 x^2 + 16px + 64 \\ x + p^2 x = 2px + 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = px + 4 \\ x + p^2 x = 2px + 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - px = 4 \\ x + p^2 x - 2px = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(4-p)=4 \\ x(1+p^2-2p)=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{4}{4-p} \\ x=\dfrac{16}{1+p^2-2p} \end{cases}.$$

Tā kā vienādojumu sistēmas kreisās puses ir vienādas, tad arī labajam pusēm jābūt vienādām. Tātad $\dfrac{4}{4-p}=\dfrac{16}{1+p^2-2p}$.

Vienādojot saucējus, iegūstam $\dfrac{4(1+p^2-2p)}{(4-p)(1+p^2-2p)}=\dfrac{16(4-p)}{(1+p^2-2p)(4-p)}$.

Saucējs nedrīkst būt vienāds ar nulli, tāpēc $p \neq 4$ un $p \neq 1$.

$$1-2p+p^2=16-4p$$
$$p^2+2p-15=0 \; .$$

Atrisinot kvadrātvienādojumu, iegūstam saknes $p=3$ un $p=-5$.

Ievietojam aprēķinātās p vērtības vienādojumu sistēmā $\begin{cases} x=\dfrac{4}{4-p} \\ x=\dfrac{16}{1+p^2-2p} \end{cases}$, iegūstam:

1) ja $p=3$, tad $x=\dfrac{4}{4-3}=4.$

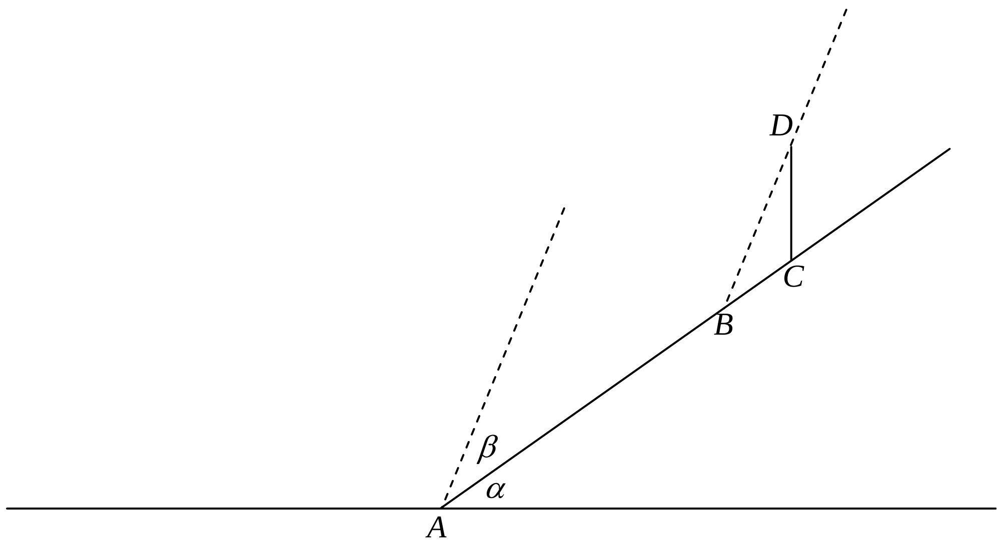
2) ja $p=-5$, tad $x=\dfrac{4}{4-(-5)}=\dfrac{4}{9}.$

Tā kā uzdevuma nosacījumos ir dots, ka skaitļi ir veseli, tad vērtība $p=-5$ neder.

Tātad iegūstam atbildi: 4, 12 un 36.

77.8.4.$^{\mathbf{k}}$ Jāaplūko divi gadījumi: $a \geq b$ un $a < b$.

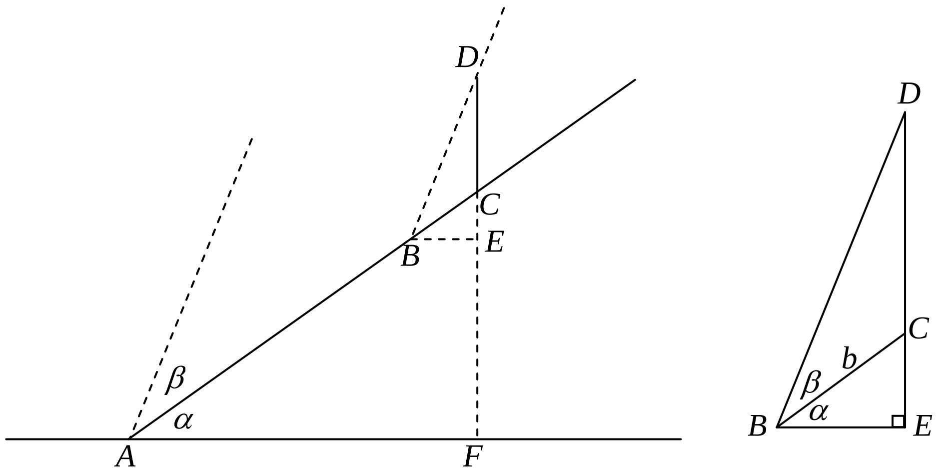
Aplūkosim pirmo gadījumu, kad $a \geq b$ (sk. A19. zīm.), kur CD – koks.



A19. zīm.

Pēc uzdevuma nosacījumiem $BC = b,\ AC = a$.

$AF \| BE$ un $AF \perp DF$ $(BE \perp DE)$ (sk. A20. zīm.).



A20. zīm.

Trijstūrī $BEC,\ \angle E = 90°$.

$$\frac{CE}{BC} = \sin\alpha \Rightarrow CE = BC \cdot \sin\alpha = b\sin\alpha ,$$

$$\frac{BE}{BC} = \cos\alpha \Rightarrow BE = BC \cdot \cos\alpha = b\cos\alpha .$$

Trijstūrī $BED,\ \angle E = 90°,\ \angle DBE = \alpha + \beta$.

$$\frac{DE}{BE} = tg(\alpha + \beta) \Rightarrow DE = BE \cdot tg(\alpha + \beta) = b\cos\alpha \cdot tg(\alpha + \beta).$$

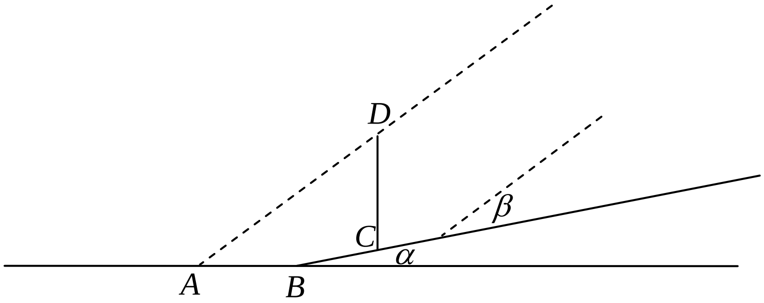
No šejienes seko, ka $DC = b\cos\alpha \cdot tg(\alpha + \beta) - b\sin\alpha$.

Veiksim trigonometriskus pārveidojumus:

$$DC = b\cos\alpha \cdot tg(\alpha + \beta) - b\sin\alpha = b \cdot \left(\frac{\cos\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} - \sin\alpha \right) =$$

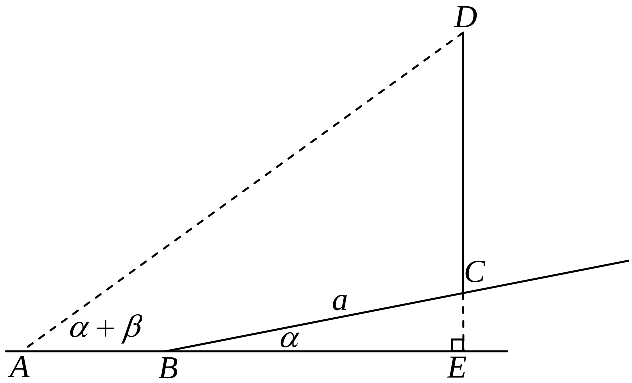
$$= b \cdot \left(\frac{\cos\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \right) = \frac{b\sin(\alpha + \beta - \alpha)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{b\sin\beta}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Otrajā gadījumā $a < b$ (sk. A21. zīm.).



A21. zīm.

Pēc uzdevuma nosacījumiem $BC = a,\ AB + BC = b$, tātad $AB = b - a$ (sk. A22. zīm.).



A22. zīm.

Trijstūrī $BEC, \angle E = 90°$.

$$\frac{CE}{BC} = \sin\alpha \Rightarrow CE = BC \cdot \sin\alpha = a\sin\alpha,$$

$$\frac{BE}{BC} = \cos\alpha \Rightarrow BE = BC \cdot \cos\alpha = a\cos\alpha.$$

Tātad $AE = b - a + a\cos\alpha$.

Trijstūrī AED, $\angle E = 90°$, $\angle DAE = \alpha + \beta$.

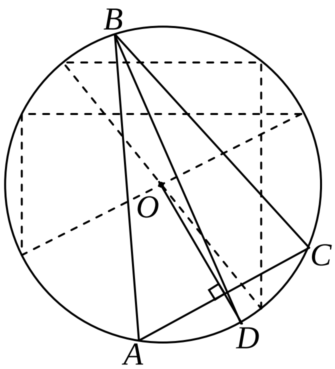
$$\frac{DE}{AE} = tg(\alpha+\beta) \Rightarrow DE = AE \cdot tg(\alpha+\beta) = (b - a + a\cos\alpha)\cos\alpha \cdot tg(\alpha+\beta).$$

No šejienes seko, ka $DC = (b - a + a\cos\alpha)\cdot tg(\alpha+\beta) - a\sin\alpha$.

Atbilde: Ja $b \le a$, tad $DC = \dfrac{b\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$.

Ja $b > a$, tad $DC = (b - a + a\cos\alpha)\cdot tg(\alpha+\beta) - a\sin\alpha$.

77.8.5. Ar uzstūra palīdzību ievelk riņķa līnijā divus taisnleņķa trijstūrus. To hipotenūzu krustpunkts O ir riņķa līnijas centrs (sk. A23. zīm.).



A23. zīm.

Novelk hordu AC, uz kuras balstās dotais ievilktais leņķis un rādiusu OD, kas perpendikulārs šai hordai. Tas dala hordas savilkto loku uz pusēm. Stars, kas vilkts no ievilktā leņķa virsotnes caur loka viduspunktu, ir ievilktā leņķa bisektrise.

77.9.1. Doto vienādojumu $11^x - 8^y = 1$ pārveidosim šādi: $11^x - 1 = 8^y$.

Kāpinot skaitli 11 jebkurā naturālā pakāpē, iegūtā skaitļa pēdējais cipars būs 1. Tātad vienādības kreisās puses pēdējais cipars ir 0. Savukārt kāpinot skaitli 8 jebkurā naturālā pakāpē, pēdējais cipars nevar būt nulle (sk. 76.10.3. uzdevumu).

Tātad vienādojumam nav atrisinājumu naturālos skaitļos.

77.9.2. No nevienādības $a_i \le 6$ seko nevienādība

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \ldots + \sqrt{a_n}}}} \le \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots + \sqrt{6}}}}}_{n\ \sqrt{\ }\ \text{zimes}} = x_n.$$

Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka $x_n < 3$.

Matemātiskā indukcija – Apgalvojuma $A(n)$ pierādīšanas metode naturālam argumentam n, konstatējot, ka $A(1)$ ir patiess (indukcijas bāze) un no $A(n-1)$ patiesuma izriet $A(n)$ patiesums (indukcijas solis).

Bāze: $x_1 = \sqrt{6} < 3$.

Induktīvā pāreja: pieņemsim, ka $x_k < 3$ un pierādīsim, ka izpildās $x_{k+1} < 3$. Tad, izmantojot induktīvo pieņēmumu, iegūstam $x_{k+1} = \sqrt{6 + x_k} < \sqrt{6+3} = 3$.

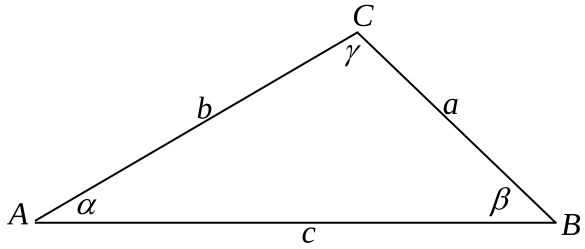
Apgalvojums pierādīts pēc matemātiskās indukcijas principa.

77.9.3. Pierādījumā izmantosim Kosinusu teorēmu (sk. A24. zīm.):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

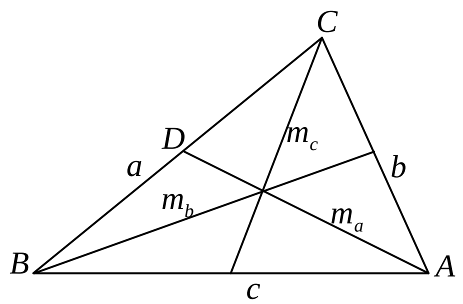
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\ .$$



A24. zīm.

Pēc definīcijas, mediāna ir taisnes nogrieznis, kas savieno trijstūra virsotni ar pretējās malas viduspunktu un tās garumu var aprēķināt pēc formulas: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$.

Aplūkojam trijstūri ADC (sk. A25. zīm.).



A25. zīm.

No kosinusu teorēmas seko, ka $m_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot b\cdot\cos C = b^2 + \frac{a^2}{4} - ab\cos C$.

Līdzīgi iegūstam, ka $m_b^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} - ab\cos C$.

Malas c un mediānas m_c garumu izsakām ar malu a un b garumiem un leņķi C :

$$AB^2 = c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C\ .$$

Tā kā $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}$, tad

$$m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} = \frac{2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos C}{4} =$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{1}{2}ab\cos C.$$

Ievietojot iegūtās vienādības $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$, iegūstam

$$b^2 + \frac{a^2}{4} - ab\cos C + a^2 + \frac{b^2}{4} - ab\cos C = 5\cdot\left(\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{1}{2}ab\cos C\right)$$

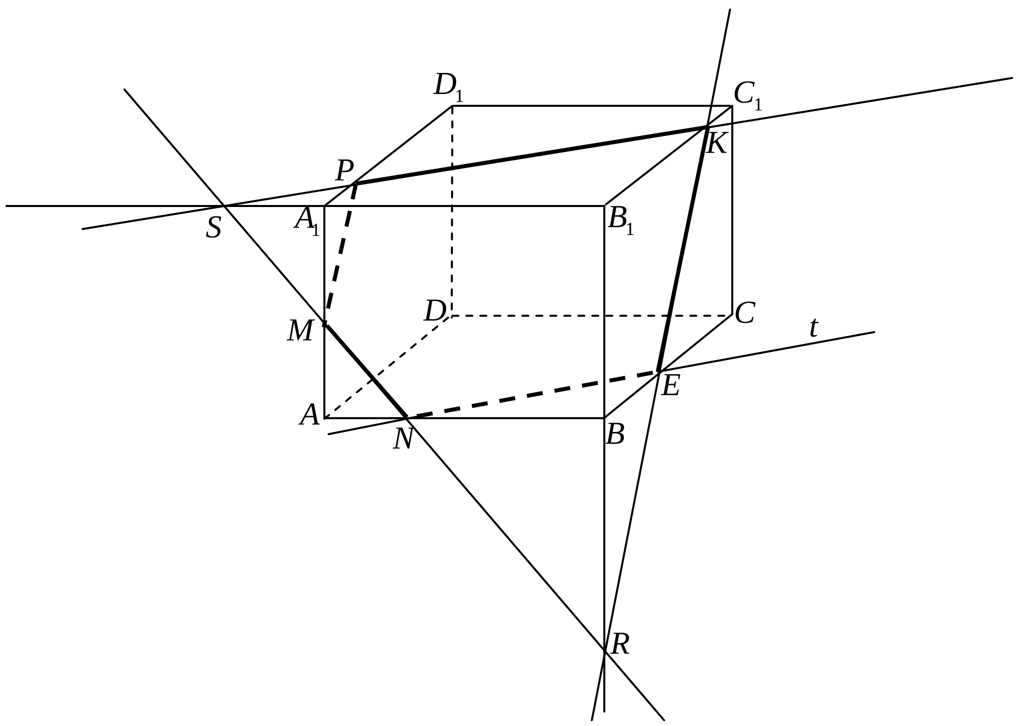
$$b^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{5b^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{5a^2}{4} - 2ab\cos C = \frac{5}{2}ab\cos C$$

$$-2ab\cos C = \frac{5}{2}ab\cos C.$$

Tā kā $a > 0$ un $b > 0$, jo a un b ir trijstūra malu garumi, tad iegūstam, ka $\cos\angle C = 0$ un $\angle C = 90°.$ Tātad dotais trijstūris ir taisnleņķa, kas arī bija jāpierāda.

77.9.4. Atkarībā no taisnes t novietojuma, iespējami divi varianti:

a) Šķēlums ir piecstūris (sk. A26. zīm.).



A26. zīm.

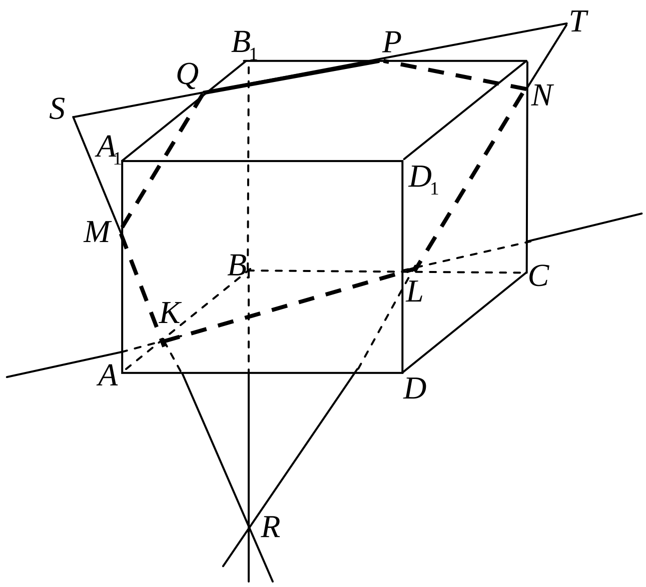
Konstrukcijas gaita ir šāda: Punkti M un N pieder plaknei AA_1B_1B. Novelkam taisni caur šiem punktiem un pagarinām B_1B, $MN \cap BB_1 = R$. Punkts R pieder gan plaknei AA_1B_1B, gan BB_1C_1C.

Caur punktiem R un E velkot taisni, iegūstam $RE \cap B_1C_1 = K$. Punkts K pieder šķēluma plaknei un plaknei $A_1B_1C_1D_1$.

$MN \cap A_1B_1 = S$. Punkts S pieder šķēluma plaknei un plaknei $A_1B_1C_1D_1$. Savienojot punktus S un K, iegūstam $SK \cap A_1D_1 = P$.

Meklējamais šķēlums ir piecstūris $MNEKP$.

b) šķēlums ir sešstūris (sk. A27. zīm.).



A27. zīm.

Konstrukcijas gaita: Punkti M un K pieder plaknei AA_1B_1B. Novelkam taisni caur šiem punktiem un pagarinām B_1B, $MK \cap BB_1 = R$. Punkts R pieder gan plaknei AA_1B_1B, gan BB_1C_1C.

Caur punktiem R un L velkot taisni, iegūstam $RL \cap CC_1 = N$ un $RL \cap B_1C_1 = T$. Punkts T pieder šķēluma plaknei un plaknei $A_1B_1C_1D_1$.

$MK \cap A_1B_1 = S$. Punkts S pieder šķēluma plaknei un plaknei $A_1B_1C_1D_1$. Savienojot punktus S un T, iegūstam $ST \cap A_1B_1 = Q$ un $ST \cap B_1C_1 = P$.

Meklējamais šķēlums ir sešstūris $KMQPNL$.

Kubu šķeļot ar plakni, šķēluma daudzstūrim nevar būt vairāk kā sešas malas, jo kubam ir sešas skaldnes.

77.9.5. Apzīmēsim biļetes numuru ar $\overline{abcdef}$, kur a, b, c, d, e, f ir skaitļi no 0 līdz 9. Pēc uzdevuma nosacījumiem $a+b+c=d+e+f=\frac{18}{2}=9$. Tātad jānoskaidro, cik dažādos veidos skaitli 9 var izteikt kā 3 ciparu summu. Uzrakstīsim virknē 11 vieniniekus un divus no tiem aizstāsim ar "*": 111*1*11111.

Šim sadalījumam viennozīmīgi atbilst ciparu summa (piemēram, konkrētajā gadījumā summa $3+1+5$). Izvēlēties divas zvaigznītes no 11 elementiem var $C_{11}^2 = \frac{11!}{2!(11-2)!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9!}{2\cdot 1\cdot 9!} = 55$ veidos. Tā kā katrā no trīs ciparu grupām mēs neatkarīgi varam izvēlēties trīs ciparus, kas summā dod 9, tad kopējais laimīgo biļešu skaits ir $55\cdot 55 = 3025$.

77.10.1. Sk. 77.9.1. uzdevumu.

77.10.2.[k] No vienādojumu sistēmas $\begin{cases} x^2+y^2 = x+y \\ x^4+y^4 = \frac{1}{2}(x+y)^2 \end{cases}$ iegūstam

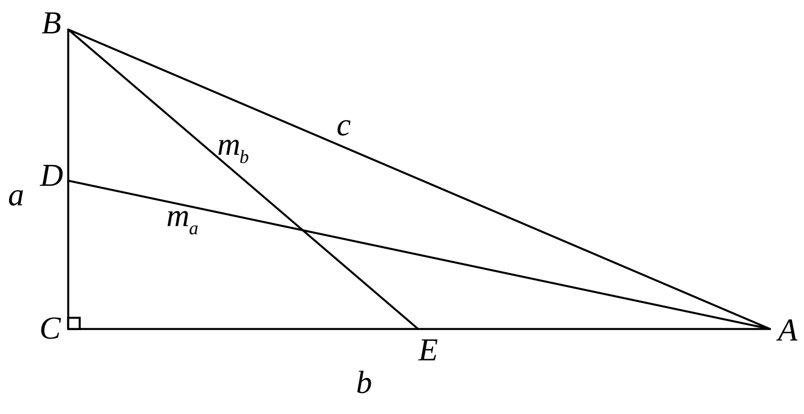
$$x^4+y^4 = \frac{1}{2}(x+y)^2 = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2 = \frac{1}{2}x^4 + x^2y^2 + \frac{1}{2}y^4.$$

No sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko $\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n}$ seko, ka $x^4+y^4 \geq 2\sqrt{x^4y^4} = 2x^2y^2$, turklāt vienādība izpildās tikai tad, kad skaitļi x^4 un y^4 ir vienādi.

a) Ja $x=-y$, tad $x^2+y^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=y=0$.

b) Ja $x=y$, tad no pirmā vienādojuma iegūstam $2x^2=2x \quad \Rightarrow \quad x=y=0$ vai $x=y=1$.

77.10.3. Taisnleņķa trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiuss $r=\frac{a+b-c}{2}$. Aplūkosim summu $m_a^2+m_b^2$ (sk. A28. zīm.).



A28. zīm.

Trijstūrī BE un AD ir mediānas, tāpēc $CE=EA=\frac{b}{2}$ un $CD=DB=\frac{a}{2}$.

Pēc Pitagora teorēmas aprēķināsim mediānu m_a un m_b garumus:

1) Trijstūrī BCE, $\angle C = 90°$.

$$m_b = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 + b^2}{4}}.$$

2) Trijstūrī DCA, $\angle C = 90°$.

$$m_a = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4b^2 + a^2}{4}}.$$

Tātad $m_a^2 + m_b^2 = \left(\sqrt{\frac{4b^2 + a^2}{4}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4a^2 + b^2}{4}}\right)^2 = \frac{4b^2 + a^2}{4} + \frac{4a^2 + b^2}{4} = \frac{5a^2 + 5b^2}{4}$.

Tā kā $a^2 + b^2 = c^2$, tad $m_a^2 + m_b^2 = \frac{5}{4}c^2$.

Taisnleņķa trijstūrī ir spēkā nevienādība $a + b \le c\sqrt{2}$.

Tātad $\frac{r^2}{m_a^2 + m_b^2} = \frac{(a + b - c)^2}{5c^2} \le \frac{(c\sqrt{2} - c)^2}{5c^2} = \frac{c^2(\sqrt{2} - 1)^2}{5c^2} = \frac{2 - 2\sqrt{2} + 1}{5} = \frac{3 - \sqrt{8}}{5}$.

77.10.4. Sk. 77.9.4. uzdevumu.

77.10.5. Izmantosim trigonometrisko identitāti: $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

Dotā nevienādība ir ekvivalenta nevienādībai $\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} \ge \sin^2 x + \cos^2 x$.

Vienādojot saucējus, iegūstam:

$$\frac{\sin^{n+2} x \cdot \sin^n x}{\cos^n x \cdot \sin^n x} + \frac{\cos^{n+2} x \cdot \cos^n x}{\cos^n x \cdot \sin^n x} \ge \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot \cos^n x \cdot \sin^n x}{\cos^n x \cdot \sin^n x}$$

$$\frac{\sin^{n+2} x \cdot \sin^n x + \cos^{n+2} x \cdot \cos^n x - \sin^2 x \cdot \sin^n x \cdot \cos^n x - \cos^2 x \cdot \cos^n x \cdot \sin^n x}{\cos^n x \cdot \sin^n x} \ge 0$$

$$\frac{\sin^{n+2} x \cdot \sin^n x + \cos^{n+2} x \cdot \cos^n x - \sin^{n+2} x \cdot \cos^n x - \cos^{n+2} x \cdot \sin^n x}{\cos^n x \cdot \sin^n x} \ge 0$$

$$\frac{\sin^{n+2} x(\sin^n x - \cos^n x) - \cos^{n+2} x(\sin^n x - \cos^n x)}{\cos^n x \cdot \sin^n x} \ge 0$$

$$\frac{(\sin^{n+2} x - \cos^{n+2} x) \cdot (\sin^n x - \cos^n x)}{\cos^n x \cdot \sin^n x} \ge 0$$

$$\cos^n x \cdot \sin^n x \ne 0$$

$$(\sin^{n+2} x - \cos^{n+2} x) \cdot (\sin^n x - \cos^n x) \ge 0.$$

Ja $\sin x \ge \cos x$, tad abi reizinātāji ir nenegatīvi, un reizinājums ir nenegatīvs. Ja $\sin x < \cos x$, tad abi reizinātāji ir negatīvi, un reizinājums ir nenegatīvs. Tātad dotā nevienādība ir patiesa.

77.11.1. Sk. 77.9.1. uzdevumu.

77.11.2. Sareizināsim dotos vienādojumus:

$$\left(\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)\cdot\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{9}{2}$$

$$\frac{(\cos^2 x+1)(\sin^2 x+1)}{\cos x\sin x}=\frac{9}{2}$$

$$\frac{\cos^2 x\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x+1}{\cos x\sin x}=\frac{9}{2}.$$

Izmantojot trigonometrisko identitāti: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, iegūstam

$$\frac{\cos^2 x\sin^2 x+2}{\cos x\sin x}=\frac{9}{2}\quad\Rightarrow\quad \sin x\cos x+\frac{2}{\sin x\cos x}=\frac{9}{2}\ .$$

Tā kā $\sin 2x=2\sin x\cos x$, tad $\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{4}{\sin 2x}=\frac{9}{2}.$

Apzīmēsim $t=\sin 2x\Rightarrow\frac{t}{2}+\frac{4}{t}=\frac{9}{2}$. Vienādojot saucējus, iegūstam $\frac{t^2+8}{2t}=\frac{18t}{2t}$.

Tā kā saucējs nevar būt nulle, tad $2t\neq 0$ un $t\neq 0$. Tātad $t^2+8=18t$.

Vienādojuma saknes ir $t_1=1$ un $t_2=8$ (neder).

Tātad $\sin 2x=1$ un $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad y=\operatorname{arctg}\frac{1}{9}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi n\quad k,n\in Z$.

77.11.3.[k] Lūk, kādu risinājumu ir piedāvājis A. Cibulis.

Atbilde. Der tikai šādas a vērtības: $a\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(1;+\infty)$.

1. Ja $a>1$, tad $a+1>2$, $(a+1)^2>4$ un $f(x)=(a+1)^2+x^2+2|x+a-1|>4$.

2. Ja $a<-\sqrt{2}$, tad $a^2>2$ un

$$f(x)\geq x^2+(a+1)^2-2(x+a-1)=x^2+a^2+2a+1-2x-2a+2=(x-1)^2+a^2+2>4.$$

3. Ja $a\in[-\sqrt{2};1]$, tad $a^2\leq 2$. Negatīviem a ir spēkā: $a+|a|=0$. Tagad atliek ievērot, ka

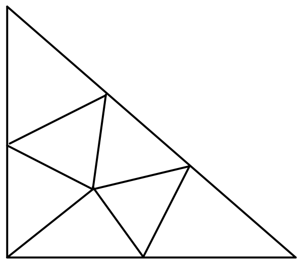
$$f(1)=(a+1)^2+1+2\,|\,a\,|=a^2+2a+2\,|\,a\,|+2=a^2+2\leq 2+2=4.$$

Savukārt, ja $a\in[0,1]$, tad $a^2\leq 1$ un

$$f(0)=(a+1)^2+2|a-1|=a^2+2a+1+2(1-a)=a^2+3\leq 4.$$

Tātad $a\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(1;+\infty)$.

77.11.4.[k] Jā, to var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts A29. zīmējumā.

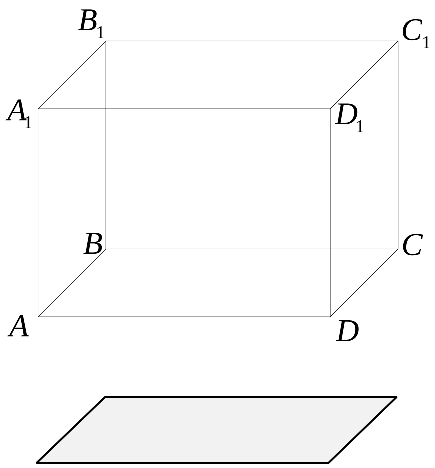


A29. zīm.

Tā kā taisns leņķis nav ne šaurs, ne plats, tad tas ir jāsadala divās daļās tā, lai izveidotos divi šauri leņķi. Ja velkam taisni līdz leņķa pretējai malai, tad iegūsim vai nu divus taisnus leņķus vai arī vienu šauru, otru platu. Acīmredzami, šāds sadalīšanas princips nedos maksimāli vēlamo rezultātu. Tāpēc šo nogriezni velkam līdz trijstūra vidum. Tā kā šī nogriežņa galapunkts ir virsotne trijstūriem, tad acīmredzami, ka no šī punkta jānovelk vēl vismaz 5 nogriežņi, tā, lai neveidotos taisns vai plats leņķis (ja novilks mazāk par četriem nogriežņiem, tad iegūs vismaz vienu platu vai taisnu leņķi, jo ir jāsadala $360°$). Savienojam iegūtos punktus uz trijstūra malām ar nogriežņiem. Tātad minimālais šaurleņķa trijstūru skaits ir 7.

77.11.5. Pēc uzdevuma nosacījumiem, gaismas stari krīt perpendikulāri pret virsmu (plakni). Tas nozīmē, ka ēna būs tieši zem figūras. Aplūkosim dažādus paralēlskaldņa novietojumus.

a) Taisnstūra paralēlskaldnis novietots tā, ka kāda no skaldnēm ir paralēli virsmai (sk. A30. zīm.).



A30. zīm.

Šādā gadījumā ēnas laukums būs vienāds ar tās skaldnes laukumu, kura būs paralēli virsmai. Tā kā šķautņu garumi ir 3 cm, 4 cm un 5 cm, tad attiecīgi iegūstam laukumus 12 cm^2, 15 cm^2 un 20 cm^2.

b) Paralēlskaldnis novietots tā, ka tas balstās uz vienas no šķautnēm un diagonālšķēlums ir paralēls plaknei (skat. 31. zīm.).

Šādā gadījumā paralēlskaldņa radītās ēnas laukums būs vienāds ar skaldnes diagonāles un trešās šķautnes garumu reizinājumu. Aprēķināsim katras diagonāles garumus pēc Pitagora teorēmas. Aplūkojam trijstūrus A_1D_1D, $A_1C_1D_1$, D_1C_1D un atbilstošās malas: A_1D, A_1C_1, C_1D (sk. A30. zīm.):

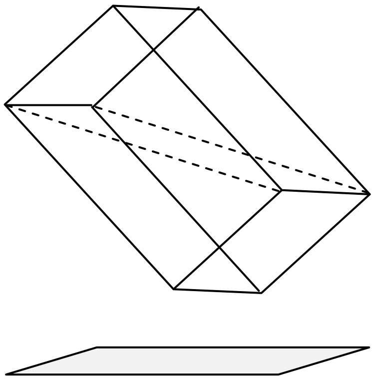
$$A_1D = \sqrt{A_1D_1^{\ 2} + D_1D^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,$$

$$A_1C_1 = \sqrt{A_1D_1^{\ 2} + D_1C_1^{\ 2}} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34},$$

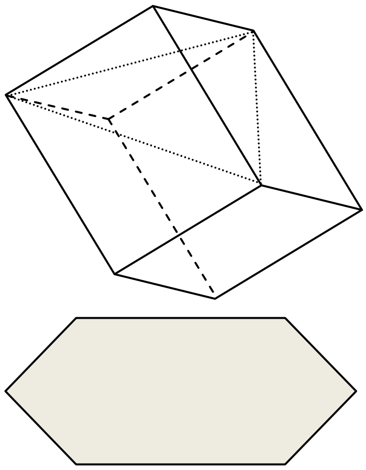
$$C_1D = \sqrt{C_1D_1^{\ 2} + D_1D^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}.$$

Tātad ēnas radītais laukums ir vienāds ar $3\sqrt{41} \approx 19{,}2$ cm^2, $4\sqrt{34} \approx 23{,}3$ cm^2 un 25 cm^2. Ēnas laukums ir taisnstūris. Ja paralēlskaldnis būs novietots uz vienas no šķautnēm un diagonālšķēlums nebūs paralēls dotajai plaknei, tad ēnas laukums būs mazāks.

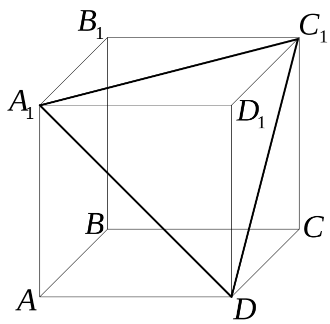
c) Aplūkosim gadījumu, kad taisnstūra paralēlskaldnis novietots tā, kā parādīts A32. zīmējumā, t. i., paralēlskaldnis balstās uz vienas virsotnes.



A31. zīm.



A32. zīm.



A33. zīm.

Taisnstūra paralēlskaldņa radīto ēnu veido $AA_1B_1C_1CD$ (sk. A33. zīm.).

Tā kā $S_{A_1D_1D} = \dfrac{1}{2}S_{A_1D_1DA}$, $S_{D_1A_1C_1} = \dfrac{1}{2}S_{A_1B_1C_1D_1}$, $S_{DD_1C_1} = \dfrac{1}{2}S_{DD_1C_1C}$, tad taisnstūra paralēlskaldņa ēnas radītais laukums būs vienāds ar divkāršotu trijstūra A_1C_1D laukumu, jo gaisma krīt tieši perpendikulāri pret plakni. Aprēķināsim laukumu pēc Hērona formulas (trijstūra laukums $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, kur $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, a, b un c – trijstūra malas).

Trijstūra A_1C_1D pusperimetrs ir $p_{A_1C_1D} = \dfrac{5+\sqrt{34}+\sqrt{41}}{2}$.

Laukums – $S_{A_1C_1D} = \sqrt{p\cdot(p - A_1D)\cdot(p - A_1C_1)\cdot(p - C_1D)} =$

$$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{34}+\sqrt{41}}{2}\cdot\left(\frac{5+\sqrt{34}+\sqrt{41}}{2} - 5\right)\cdot\left(\frac{5+\sqrt{34}+\sqrt{41}}{2} - \sqrt{34}\right)\cdot\left(\frac{5+\sqrt{34}+\sqrt{41}}{2} - \sqrt{41}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{34}+\sqrt{41}}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{34}+\sqrt{41}-10}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{34}+\sqrt{41}-2\sqrt{34}}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{34}+\sqrt{41}-2\sqrt{41}}{2}} =$$

$$=\sqrt{\frac{5+\sqrt{34}+\sqrt{41}}{2}\cdot\frac{\sqrt{34}+\sqrt{41}-5}{2}\cdot\frac{5-\sqrt{34}+\sqrt{41}}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{34}-\sqrt{41}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{((\sqrt{34}+\sqrt{41})^2-5^2)\cdot(25+5\sqrt{34}-5\sqrt{41}-5\sqrt{34}-34+\sqrt{34}\cdot\sqrt{41}+5\sqrt{41}+\sqrt{34}\cdot\sqrt{41}-41)}{16}}=$$

$$=\sqrt{\frac{((\sqrt{34}+\sqrt{41})^2-5^2)\cdot(2\sqrt{34}\cdot\sqrt{41}-50)}{16}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(34+2\sqrt{34}\cdot\sqrt{41}+41-25)\cdot(2\sqrt{34}\cdot\sqrt{41}-50)}{16}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(2\sqrt{34}\cdot\sqrt{41}+50)\cdot(2\sqrt{34}\cdot\sqrt{41}-50)}{16}}=\sqrt{\frac{4\cdot 34\cdot 41-2500}{16}}=\sqrt{\frac{3076}{16}}.$$

Iegūstam, ka paralēlskaldņa mestās ēnas laukums ir $2\cdot\sqrt{\frac{3076}{16}}=\sqrt{769}\approx 27{,}7\ \text{cm}^2$.

Tātad maksimālais ēnas laukums ir $\sqrt{769}\ \text{cm}^2$.

1977./ 78. mācību gads

78.8.1.[k] Uzdevuma norādījumus varam pierakstīt vienādojumu sistēmas veidā $\begin{cases} a_1 - a_2 = 10 \\ h_2 - h_1 \geq \dfrac{5}{6} \\ a_1 > 10 \end{cases}$,

kur a_1, a_2 – trijstūra pamati, bet h_1, h_2 – augstumi.

Trijstūra laukumu aprēķina pēc formulas: $S = \dfrac{a \cdot h}{2}$.

Tātad $h_1 = \dfrac{50 \cdot 2}{a_1} = \dfrac{100}{a_1}$ un $h_2 = \dfrac{50 \cdot 2}{a_2} = \dfrac{100}{a_2}$. Ievietojot vienādojumu sistēmas otrajā vienādojumā izsacītās h_1 un h_2 izteiksmes, iegūstam nevienādību $\dfrac{100}{a_2} - \dfrac{100}{a_1} \geq \dfrac{5}{6}$.

Tā kā $a_2 = a_1 - 10$, tad nevienādību varam pārrakstīt formā: $\dfrac{100}{a_1 - 10} - \dfrac{100}{a_1} \geq \dfrac{5}{6}$.

Vienādojot saucējus, iegūstam

$$\frac{6 \cdot 100 \cdot a_1 - 6 \cdot 100 \cdot (a_1 - 10)}{6 \cdot (a_1 - 10) \cdot a_1} \geq \frac{5 \cdot a_1 \cdot (a_1 - 10)}{6 \cdot a_1 \cdot (a_1 - 10)}$$

$$\frac{600a_1 - 600a_1 + 6000}{6 \cdot (a_1 - 10) \cdot a_1} \geq \frac{5a_1^2 - 50a_1}{6 \cdot a_1 \cdot (a_1 - 10)}.$$

Daļas saucējs nav vienāds ar nulli, tāpēc $6 \cdot a_1 \cdot \left(a_1 - 10\right) \neq 0$. No šejienes seko, ka $a_1 \neq 0$ un $a_1 \neq 10$.

Tātad $600a_1 - 600a_1 + 6000 \geq 5a_1^2 - 50a_1$.

$$6000 \geq 5a_1^2 - 50a_1$$

$$5a_1^2 - 50a_1 - 6000 \leq 0$$

$$a_1^2 - 10a_1 - 1200 \leq 0.$$

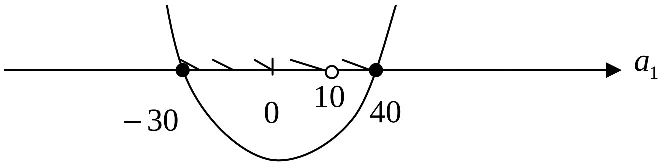
Atrisinām kvadrātnevienādību.

$$a_1^2 - 10a_1 - 1200 = 0$$

Pēc Vjeta teorēmas:

$$a_1 = 40 \quad \text{un} \quad a_1 = -30.$$

Dotās nevienādības grafiks ir parabola, kuras zari ir vērsti uz augšu (sk. A34. zīm.).



A34. zīm.

Tātad nevienādības atrisinājums $a_1 \in [-30; 40]$. Tā kā a_1 ir pozitīvs skaitlis un $a_1 > 10$, tad pirmā trijstūra augstums ir $a_1 \in (10; 40]$.

78.8.2.[k] Apzīmēsim pirmo locekli ar x, un nākamo ar px, tad trešais loceklis ir $p \cdot p \cdot x = p^2 x$.

Pēc dotā skaitļi x, $px+2$ un $p^2 x$ veido aritmētisko progresiju, bet skaitļi x, $px+2$ un $p^2 x + 9$ veido atkal ģeometrisko progresiju.

Izmantojot ģeometriskās progresijas īpašību $x_2^2 = x_1 x_3$ un aritmētiskās progresijas vidējā locekļa aprēķina formulu $2x_2 = x_1 + x_3$, iegūstam vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x\left(p^2 x + 9\right) = (px+2)^2 \\ x + p^2 x = 2(px+2) \end{cases}.$$

Veicot aritmētiskas darbības, iegūst

$$\begin{cases} p^2 x^2 + 9x = p^2 x^2 + 4px + 4 \\ x + p^2 x = 2px + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x = 4px + 4 \\ x + p^2 x = 2px + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x - 4px = 4 \\ x + p^2 x - 2px = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(9-4p) = 4 \\ x\left(1 + p^2 - 2p\right) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{9-4p} \\ x = \dfrac{4}{1+p^2-2p} \end{cases}.$$

Tā kā vienādojumu sistēmas kreisās puses ir vienādas, tad arī labajam pusēm jābūt vienādām. Tātad $\dfrac{4}{9-4p} = \dfrac{4}{1+p^2-2p}$.

Vienādojot saucējus, iegūstam $\frac{4\cdot(1+p^2-2p)}{(9-4p)\cdot(1+p^2-2p)}=\frac{4\cdot(9-4p)}{(9-4p)\cdot(1+p^2-2p)}$.

Saucējs nedrīkst būt vienāds ar nulli, tāpēc $p\neq\frac{9}{4}$ un $p\neq 1$.

$$1-2p+p^2=9-4p$$

$$p^2+2p-8=0.$$

Atrisinot kvadrātvienādojumu ar Vjeta teorēmu, iegūst saknes $p=2$ un $p=-4$.

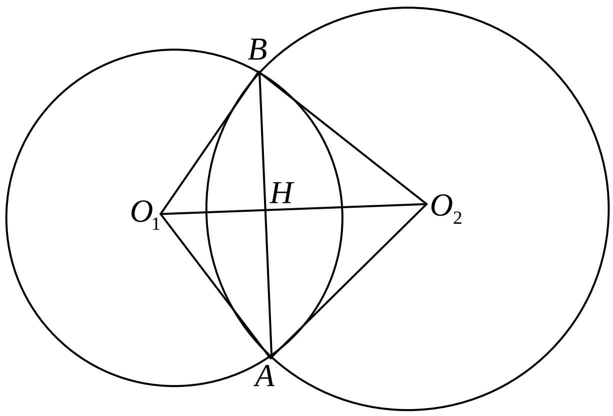
Ievietojam aprēķinātās p vērtības vienādojumu sistēmā $\begin{cases} x=\frac{4}{9-4p} \\ x=\frac{4}{1+p^2-2p} \end{cases}$, iegūstam:

1) ja $p=2$, tad $x=\frac{4}{9-8}=4.$

2) ja $p=-4$, tad $x=\frac{4}{9+16}=\frac{4}{25}.$

Tātad iegūstam atbildi: 4, 8 un 16 vai $\frac{4}{25}, -\frac{16}{25}, \frac{64}{25}$.

78.8.3.[k] Riņķa līniju centrus apzīmēsim ar O_1 un O_2, riņķa līniju krustpunktus ar A un B (sk. A35. zīm.).



A35. zīm.

Veidojas četrstūris AO_2BO_1. Riņķa līniju kopējā horda ir nogrieznis AB, kura garums ir divkāršots trijstūra O_1AO_2 augstums. Trijstūra laukumu aprēķina pēc Hērona formulas: $p=\frac{13+14+14}{2}=21\,\text{cm}$, $S=\sqrt{21\cdot(21-13)\cdot(21-14)\cdot(21-15)}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84\,\text{cm}^2$.

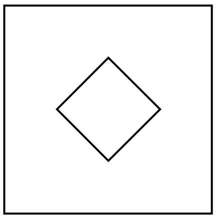
Trijstūra laukumu var aprēķināt arī pēc formulas $S=\frac{1}{2}O_1O_2\cdot AH$ un $AH=\frac{2S}{O_1O_2}$.

Tātad $AB = 2AH = \dfrac{4S}{O_1O_2} = \dfrac{4 \cdot 84}{15} = 22{,}4$ cm.

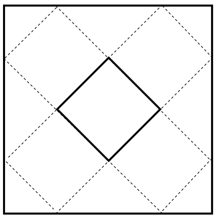
78.8.4. Apzīmēsim kvadrāttrinomu $ax^2 + bx + c$ ar $f(x)$. Tad $f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$ un $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$.

Tā kā punktā $x = 1$ parabolas vērtība ir mazāka nekā nulle un parabola x asi nekrusto, tad pie visām x vērtībām $f(x)$ vērtības ir negatīvas. Līdz ar to $c = f(0) < 0$.

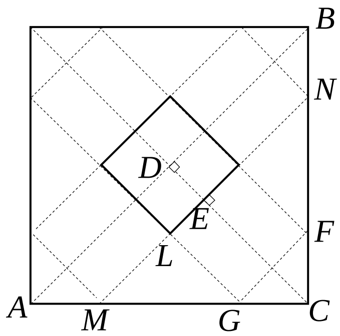
78.8.5. Jā, var. Ja kubu uz papīra loksnes novieto tā, kā parādīts A36. zīmējumā. Tālāk papīru aplokam ap kubu. Locījuma vietas parādītas ar raustītu līniju (sk. A37. zīm.). Jānoskaidro, vai šādi nolokot, tiek pārklātas visas četras sānu skaldnes pilnībā. Veiksim aprēķinus, pārbaudot vai MN garums ir lielāks nekā 3 (sk. A38.zīm.).



A36. zīm.



A37. zīm.



A38. zīm.

Tā kā dotā kvadrāta malas garums ir vienāds ar 3, tad pēc Pitagora teorēmas aprēķinām diagonāles AB garumu: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$. Kvadrāta diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras un krustpunktā dalās uz pusēm. Tātad $AB \perp CD$ un $AD = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Aplūkosim divus trijstūrus: ADC un MEC. Trijstūri ir līdzīgi un attiecīgās malas ir proporcionālas. Tātad $\dfrac{ME}{AD} = \dfrac{EC}{DC}$. No šejienes seko, ka

$$ME = \frac{AD \cdot EC}{DC} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right)}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 1}{2} \approx 1{,}62 .$$

Tātad $MN \approx 3{,}24$.

Pamatosim, ka virsējo kuba skaldni var noklāt ar četriem stūrīšiem. Jāpierāda, ka trijstūra GFC laukums ir lielāks nekā $\dfrac{1}{4}$ no kuba skaldnes laukuma.

Tā kā kuba šķautnes garums ir vienu vienību garš, tad kuba skaldnes laukums ir vienāds ar 1.

Trijstūrī MLG, malas MG garums ir $\sqrt{2}$. Tātad $GC = \dfrac{3 - \sqrt{2}}{2}$.

$$S_{GFC} = \frac{GC \cdot FC}{2} = \frac{\frac{3-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{9-6\sqrt{2}+2}{8} = \frac{11-6\sqrt{2}}{8} \approx 0{,}31 .$$

Skaitliski aprēķini pierāda, ka tiks noklāta arī kuba augšējā skaldne.

78.9.1.[k] Apgalvojumu pierāda ar matemātisko indukciju.

Matemātiskā indukcija – Apgalvojuma $A(n)$ pierādīšanas metode naturālam argumentam n, konstatējot, ka $A(1)$ ir patiess (indukcijas bāze) un no $A(n-1)$ patiesuma izriet $A(n)$ patiesums (indukcijas solis).

Apzīmēsim doto izteiksmi ar $f(n)$.

Bāze. Ja $n=1$, tad $f(1)=36$ dalās ar 9.

Induktīvā pāreja. Pieņemam, ka $f(n)$ dalās ar 9. Tad

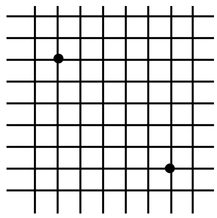
$$f(n+1) = (n+1)^3 + ((n+1)+1)^3 + ((n+1)+2)^3 =$$
$$= (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = f(n) + (n+3)^3 - n^3.$$

Jāpierāda, ka $(n+3)^3 - n^3$ dalās ar 9.

$$(n+3)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 \cdot 3 + 3n \cdot 3^2 + 3^3 - n^3 = 9n^2 + 27n^3 + 27 = 9(n^2 + 3n) + 27 .$$

Tātad $(n+3)^3 - n^3$ dalās ar 9.

78.9.2. Katrs īsākais ceļš sastāv no 5 vertikāliem un 5 horizontāliem posmiem (no krustojuma līdz krustojumam) (sk. A39. zīm.).



A39. zīm.

Tātad jāaplūko visas iespējamās kombinācijas (bez atkārtojumiem) – $C_{10}^{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$ veidi.

Atbilde. Īsāko ceļu skaits ir 252.

78.9.3. a) Izpildot pārveidojumus, iegūst $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1}{n^2+3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$.

Tā kā $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ un $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, tad $\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{2+0+0}{1+0+0} = 2$.

b) Lietojot virknes robežas definīciju, pierādīsim, ka robeža ir vienāda ar 2.

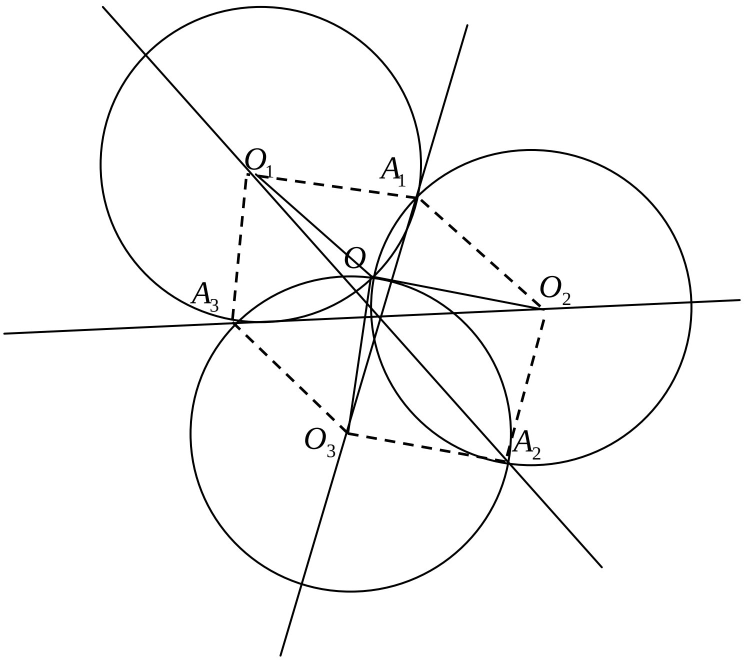
Definīcija. Skaitli a sauc par virknes (x_n) robežu, ja katram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds naturāls skaitlis n_0, ka visiem $n > n_0$ ir spēkā nevienādība $|x_n - a| < \varepsilon$.

Novērtējam starpību:

$$|x_n - 2| = \left|\frac{2n^2 + n + 1}{n^2 + 3n + 1} - 2\right| = \left|\frac{5n + 1}{n^2 + 3n + 1}\right| = \frac{5n + 1}{n^2 + 3n + 1} < \frac{5}{n}.$$

Atrisinot nevienādību $\frac{5}{n} < \varepsilon$ attiecībā pret n, iegūstam: $n > \frac{5}{\varepsilon}$. Tas nozīmē, ka eksistē definīcijā prasītais n_0, proti, varam ņemt $n_0 = \left\lceil \frac{5}{\varepsilon} \right\rceil$. Līdz ar to ir pierādīts, ka $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

78.9.4. Apzīmēsim riņķa līniju kopīgo krustpunktu ar O, to centrus ar O_1, O_2, O_3, bet otros krustpunktus ar A_1, A_2, A_3 (sk. A40.zīm.).

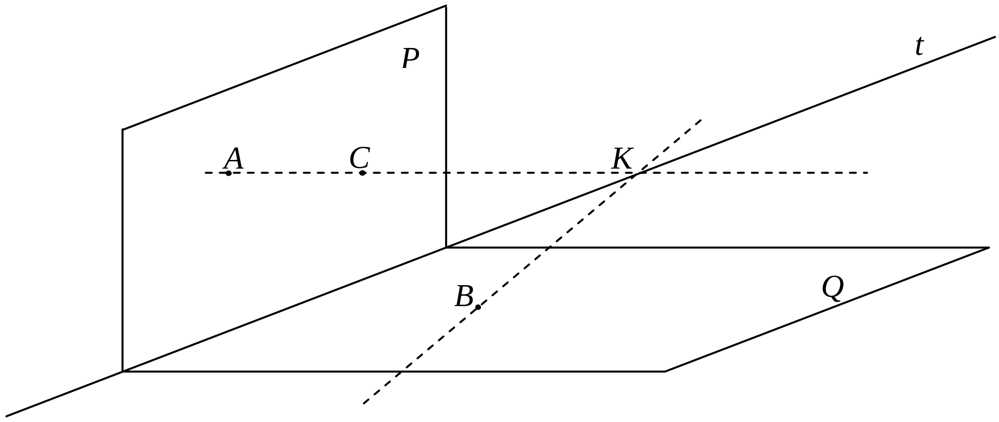


A40. zīm.

Veidojas sešstūris $A_1O_2A_2O_3A_3O_1$, kas sadalās trīs rombos, ar vienāda garuma malām (malas ir rādiusi). No šejienes seko, ka $A_1A_3O_3O_2$ ir paralelograms (O_3A_3 vienāds un paralēls O_2A_1) un O_3A_1 un O_2A_3 krustojoties dalās uz pusēm kā paralelograma diagonāles. To pašu var teikt arī par abiem pārējiem aplūkojamo nogriežņu pāriem.

Tātad visi aplūkojamie nogriežņi krustojas punktā, kas ir visu šo nogriežņu viduspunkts.

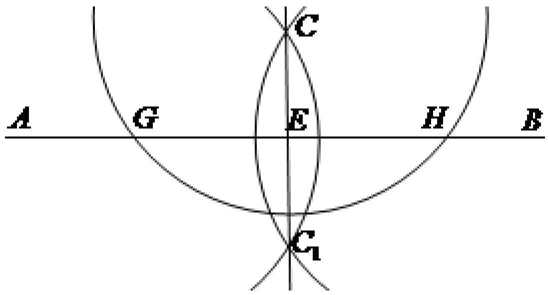
78.9.5. Uzzīmējam divas plaknes P un Q, kas šķeļas pa taisni t (sk. A41. zīm.).



A41. zīm.

Taisne t atrodas gan plaknē P, gan Q. Taisne AC krusto taisni t punktā K. Savienojam K un B. Punkti A, C, K, B atrodas vienā plaknē.

Konstruējam perpendikulu pret taisni AB caur punktu C. Ar centru punktā C novilksim riņķa līniju, kas krusto taisni AB (sk. A42. zīm.).

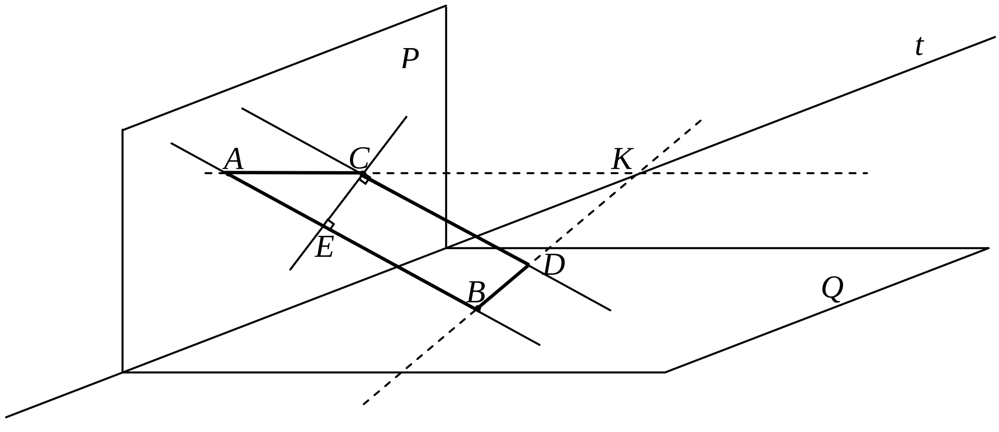


A42. zīm.

Punkti G un H ir riņķa līnijas krustpunkti ar taisni AB. Nemainot rādiusu, novilksim vēl divas riņķa līnijas ar centriem punktos G un H. Punkts C_1 ir šo riņķa līniju krustpunkts, kas atrodas pusplaknē, kura nesakrīt ar to pusplakni, pie kuras pieder punkts C. Meklētā taisne iet caur punktiem C un C_1.

Tālāk uzkonstruēsim taisnei CC_1 perpendikulāru taisni caur punktu C. Rīkojamies līdzīgi kā iepriekšējā gadījumā: Ar centru punktā C un brīvi izraudzītu rādiusu novilksim riņķa līniju. Tā krusto taisni CC_1 divos punktos M un N. Ar centriem punktos M, N un rādiusu MN novilksim divas riņķa līnijas. Pieņemsim, ka R ir šo riņķa līniju krustpunkts. Meklētā taisne iet caur punktiem C un R, krustojot taisni BK punktā D.

Esam ieguvuši punktu D un trapeci, kuras pamati ir AB un CD ($AB \| CD$) (sk. A43. zīm.).



A43. zīm.

78.10.1. Atradīsim visus šādus četrciparu skaitļus. Tā kā $\overline{abcd} = m^2 + m^3 = m^2(1+m)$,

un pēc dotā skaitlis dalās ar 7, tad pastāv divas iespējas: 1) $m = 7k$; 2) $m + 1 = 7k$, kur k ir naturāls skaitlis. Ar vienkāršu pārbaudi secinām, ka der tikai $k = 2$ un $k = 3$, kas attiecīgi dod: $m = 13, 14, 20, 21$.

Tātad $13^2 + 13^3 = 2366$, $14^2 + 14^3 = 2940$, $20^2 + 20^3 = 8400$, $21^2 + 21^3 = 9702$.

78.10.2.[k] Izmantojot trigonometrijas formulas, pārveidosim doto izteiksmi par reizinājumu:

$$2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) = 2 + 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right) =$$

$$= 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\right) = 2\cdot 2\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) = 4\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

78.10.3. Ja taisne pieskaras parabolai, tad tām ir tieši viens kopīgs punkts. Tas nozīmē, ka vienādojumam $4 - x = ax - x^2$ jābūt tieši vienai saknei. Lai kvadrātvienādojumam būtu viena sakne, diskriminantam ir jābūt vienādam ar nulli. Pārveidosim vienādojumu un pielīdzināsim diskriminanta vērtību nullei:

$$x^2 - ax - x + 4 = 0$$

$$x^2 - (a+1)x + 4 = 0$$

$$D = (-(a+1))^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 0$$

$$D = a^2 + 2a + 1 - 16 = 0$$

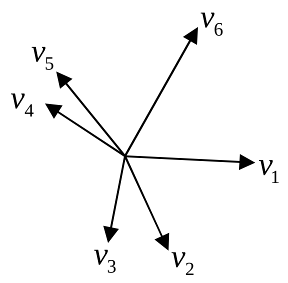
$$D = a^2 + 2a - 15 = 0$$

Jāatrisina vienādojums $a^2 + 2a - 15 = 0$. Pēc Vjeta teorēmas, kvadrātvienādojuma saknes ir -5 un 3.

78.10.4. Aplūkosim 4 vektorus: $v_1 = (a,b)$, $v_2 = (c,d)$, $v_3 = (e,f)$, $v_4 = (g,h)$ un ievērosim, ka dotie 6 skaitļi ir šo četru vektoru skalārie reizinājumi:

$$v_1 \cdot v_2 = ac + bd,\ v_1 \cdot v_3 = ae + bf,\ \ v_1 \cdot v_4 = ag + bh,$$
$$v_2 v_3 = ce + df,\ v_2 v_4 = cg + dh,\ v_3 \cdot v_4 = eg + fh.$$

Var uzskatīt, ka visi četri vektori iziet no viena un tā paša punkta (sk. A44. zīm.).

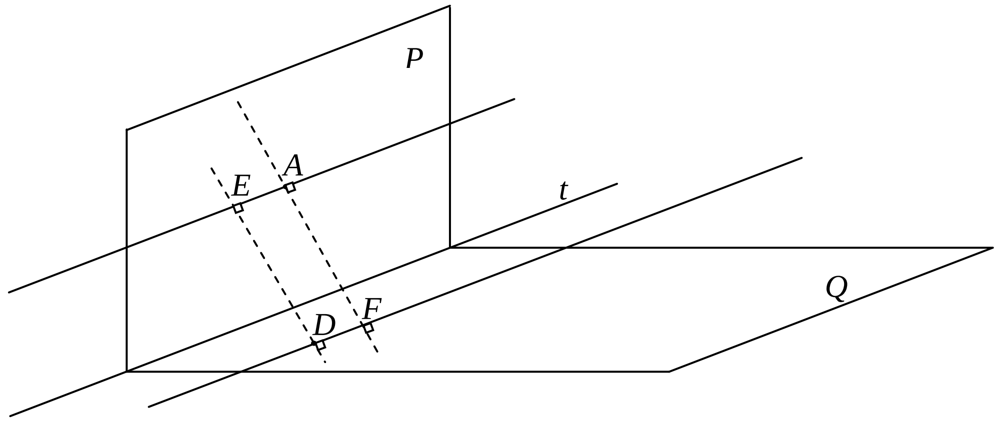


A44. zīm.

Tā kā četru leņķu summa ir $360°$, tad vismaz viens no leņķiem starp šiem četriem vektoriem nepārsniedz $90°$.

Pieņemsim, ka šo leņķi β veido vektori v_j, v_k. Tad $v_j \cdot v_k = |v_j| \cdot |v_k| \cdot \cos\beta \geq 0,$ kas nozīmē, ka viens no sešiem skaitļiem ir nenegatīvs, kas arī bija jāpierāda.

78.10.5. Uzzīmējam divas plaknes P un Q, kas šķeļas pa taisni t (sk. A45. zīm.).



A45. zīm.

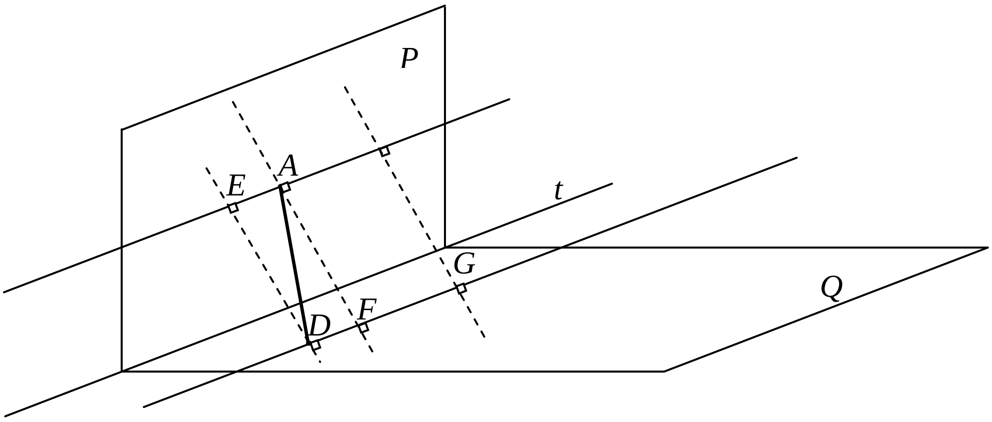
Plaknē P uzkonstruēsim taisnei t paralēlu taisni EA, savukārt plaknē Q – taisni DF (konstrukcijas gaita līdzīga kā 77.9.5. uzdevumā). Tālāk uz šīm taisnēm AE un FD jāatrod punkti B un C tā, lai veidotos vienādsānu trapece, kurā var ievilkt riņķa līniju.

Izmantosim teorēmu par četrstūrī ievilktu riņķa līniju: Ja četrstūra pretējo malu summas ir vienādas, tad tajā var ievilkt riņķa līniju.

Tātad punktus B un C atliek tā, lai $AB + CD = AD + BC$ un $AD = BC$.

Rīkojamies sekojoši: Savienojam punktus A un D.

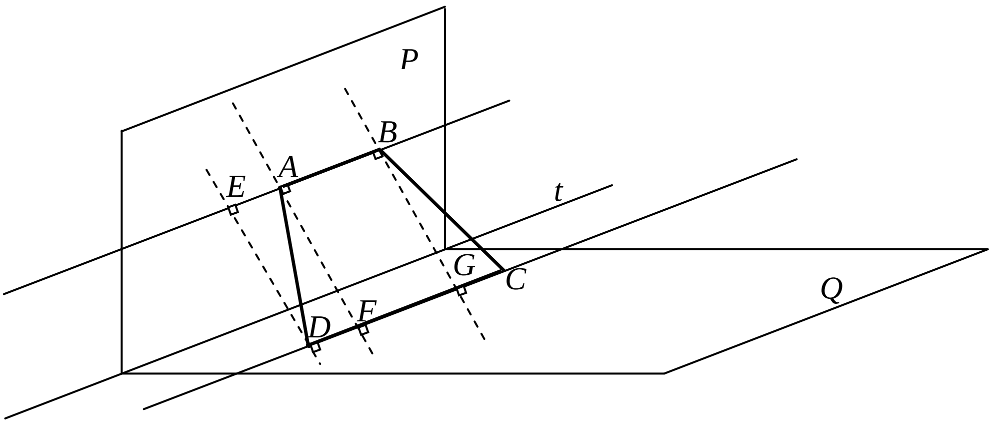
Atliekam uz taisnes DF punktu G tā, lai $AD = DG$ (sk. A46. zīm.).



A46. zīm.

Punktā G uzkonstruē taisnei DG perpendikulāru taisni. Krustpunktu ar taisni EA apzīmēsim ar B, kas ir meklētais punkts.

Tālāk uz taisnes DF atliekam punktu C tā, lai $AD = FC$ ($AF \perp FC$) (sk. A47. zīm.).



A47. zīm.

Savienojot šos punktus, iegūstam vienādsānu trapeci $ABCD$, kurā var ievilkt riņķa līniju, jo $AB \| CD$, $AD = BC$ un $AD + BC = AB + CD$.

78.11.1.[k] $8\sin^6 x + 3\cos 2x + 2\cos 4x + 1 > 0.$

$$8 \cdot \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3 + 3\cos 2x + 2\left(2\cos^2 2x - 1\right) + 1 > 0.$$

Tālāk apzīmējot $\cos 2x = a$, iegūst trešās pakāpes nevienādību

$$8 \cdot \left(\frac{1 - a}{2} \right)^3 + 3a + 2\left(2a^2 - 1\right) + 1 > 0.$$

$$8 \cdot \frac{1 - 3a + 3a^2 - a^3}{8} + 3a + 4a^2 - 2 + 1 > 0$$

$$1-3a+3a^2-a^3+3a+4a^2-2+1>0$$

$$-a^3+7a^2>0$$

$$a^2(a-7)<0.$$

No šejienes seko, ka $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 7)$.

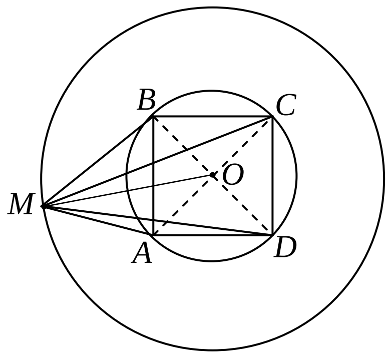
Tā kā $\cos 2x = a$ vienmēr mazāks par 7, tad vienīgais gadījums $\cos 2x \neq 0$.

Tātad $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$.

Atbilde: $x \in R \setminus \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2} \right), n \in Z.$

78.11.2. Riņķa līnijas ar kopēju centru, bet dažādiem rādiusiem sauc par koncentriskām riņķa līnijām.

Iekšējā riņķa līnijā ievelkam kvadrātu $ABCD$. Pēc kvadrāta īpašībām $BD \perp AC$. Riņķa līniju kopīgo centru apzīmējam ar O (sk. A48. zīm.).



A48. zīm.

Aplūkosim trijstūrus MOC, MOB, MOD un MOA. Šajos trijstūros MO ir lielās riņķa līnijas rādiuss, ko apzīmēsim ar R, bet $OA = OB = OC = OD = r$ – mazās riņķa līnijas rādiusi. Pēc kosinusu teorēmas aprēķināsim malu MA, MB, MC un MD garumu kvadrātus (apzīmēsim $\angle MOB = \alpha$, tad iegūstam $\angle MOC = 90° + \alpha$, $\angle MOA = 90° - \alpha$ un $\angle MOD = 90° - \alpha + 90° = 180° - \alpha$):

$$MB^2 = MO^2 + BO^2 - 2MO \cdot BO \cdot \cos MOB = R^2 + r^2 - 2R \cdot r \cdot \cos\alpha,$$

$$MC^2 = MO^2 + CO^2 - 2MO \cdot CO \cdot \cos MOC = R^2 + r^2 - 2R \cdot r \cdot \cos(90° + \alpha),$$

$$MA^2 = MO^2 + AO^2 - 2MO \cdot AO \cdot \cos MOA = R^2 + r^2 - 2R \cdot r \cdot \cos(90° - \alpha),$$

$$MD^2 = MO^2 + DO^2 - 2MO \cdot DO \cdot \cos MOD = R^2 + r^2 - 2R \cdot r \cdot \cos(180° - \alpha).$$

Izmantojot redukcijas formulas $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, iegūstam:

$$MB^2 = R^2 + r^2 - 2R \cdot r \cdot \cos\alpha,\; MC^2 = R^2 + r^2 + 2R \cdot r \cdot \sin\alpha,$$
$$MA^2 = R^2 + r^2 - 2R \cdot r \cdot \sin\alpha,\; MD^2 = R^2 + r^2 + 2R \cdot r \cdot \cos\alpha.$$

Tātad $MA^2 + MC^2 + MB^2 + MD^2 = R^2 + r^2 - 2R \cdot r \cdot \sin\alpha + R^2 + r^2 + 2R \cdot r \cdot \sin\alpha +$
$$+ R^2 + r^2 - 2R \cdot r \cdot \cos\alpha + R^2 + r^2 + 2R \cdot r \cdot \cos\alpha = 4R^2 + 4r^2.$$

Redzam, ka šis lielums nav atkarīgs no punkta M izvietojuma uz lielās riņķa līnijas.

78.11.3. Četrstūra piramīdai ir 8 šķautnes, bet piecstūra piramīdai ir 10 šķautnes. Savienojot ar pamatiem divas trijstūra piramīdas, iegūstam daudzskaldni ar 9 šķautnēm.

Parādīsim, kā daudzskaldnim, kam ir vismaz viena skaldne ir trijstūris, šķautņu skaitu var palielināt par 3. Lai to izdarītu, pievienosim daudzskaldnim trijstūra piramīdu, kuras pamats sakrīt ar dotā daudzskaldņa skaldni – trijstūri.

Skaidrs, ka tādā veidā no sākotnējiem daudzskaldņiem ar 8, 9, 10 šķautnēm pakāpeniski varam iegūt daudzskaldni ar patvaļīgu šķautņu skaitu $n > 7$.

Daudzskaldnis ar 7 šķautnēm neeksistē. Ja daudzskaldnim ir 4 virsotnes, tā ir trijstūra piramīda, kurai ir 6 šķautnes. Ja tam ir vismaz 5 virsotnes, tad, ņemot vērā, ka no katras virsotnes iziet vismaz 3 šķautnes, tā kopējais šķautņu skaits ir ne mazāks par $\frac{5 \cdot 3}{2} > 7$.

78.11.4. Uzrakstīsim nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko skaitļiem $1, 2, 3, ..., n$: $\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n} \le \frac{1 + 2 + ... + n}{n}$. Tā kā $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$, tad $\sqrt[n]{n!} \le \frac{n \cdot (n+1)}{2n}$.

Pārveidojot, iegūstam $\sqrt[n]{n!} \le \frac{n+1}{2}$. Kāpinot abas nevienādības puses n-tajā pakāpē, iegūstam $2^n n! \le (n+1)^n$ un pārveidojot $2^n (n+1)! \le (n+1)^{n+1}$. Tagad atliek ievietot n vietā $(n-1)$, un prasītā nevienādība iegūta:

$$2^{n-1}(n-1+1)! \le (n-1+1)^{n-1+1} \;\Rightarrow\; 2^{n-1} n! \le n^n.$$

78.11.5. a) Lai no 16 skaitļiem atrastu lielāko, rīkojamies sekojoši. Pajautājam par x_1 un x_2. Pēc tam lielāko no šiem skaitļiem salīdzinām ar x_3. Pēc tam lielāko salīdzinām ar x_4 utt. līdz tiek salīdzināts lielākais no pirmajiem 15 skaitļiem ar x_{16}. Skaitlis, kas pēdējā salīdzināšanā izrādīsies lielākais, būs arī vislielākais starp B iedomātajiem 16 skaitļiem. Tātad lielākā starp skaitļiem atrašanai ir nepieciešami 15 jautājumi.

Ja ir nepieciešams noskaidrot vienu lielāko skaitli, tad tā noskaidrošanai nepieciešami un pietiekami $(n-1)$ jautājumi, kur n – skaitļu skaits.

b) Lielāko un otro lielāko skaitli no 16 skaitļiem viegli var atrast, rīkojoties pēc olimpiskās shēmas: sadalīsim visus 16 skaitļus pa pāriem, piemēram x_1 un x_2, ..., x_{15} un x_{16} un par katru pāri jautāsim: "Vai tiesa, ka $x_i < x_j$?" Lielākos skaitļus atkal sadalīsim pa pāriem un atkal par katru pāri pajautāsim pēc uzdevumā noteiktās formas. Tā kā $2^4 = 16$, tad četros šādos etapos noskaidrosim pašu lielāko skaitli. Tā kā otrais lielākais skaitlis var būt tikai starp tiem skaitļiem, kas salīdzināti ar lielāko (tādi skaitļi ir 4, jo lielāko skaitli atrada ar 4 etapu palīdzību), tad vēl ar 3 jautājumiem mēs uzzināsim otro lielāko skaitli. Tātad nepieciešami 18 jautājumi [7].

KOMENTĀRI

1975./76. mācību gads

76.10.1. Uzdevumu var atrisināt arī veicot apzīmēšanu: $\sqrt{x+y^2}=u$ un $y\sqrt{x}=v$. Tad

$$\begin{cases}(u^2+v)\cdot u=65\\(u^2-v)\cdot u=185\end{cases} \Rightarrow 2u^3=250 \Rightarrow u^3=125 \Rightarrow u=5,$$

$$(u^2+v)\cdot u=65 \Rightarrow (25+v)\cdot 5=65 \Rightarrow v=-12.$$

Tā kā $\sqrt{x+y^2}=u$ un $y\sqrt{x}=v$, tad

$$\begin{cases}\sqrt{x+y^2}=5\\y\sqrt{x}=-12\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y^2=25\\y\sqrt{x}=-12\end{cases} \Rightarrow y=\frac{-12}{\sqrt{x}} \Rightarrow x+\left(\frac{-12}{\sqrt{x}}\right)^2=25$$

$$x+\frac{144}{x}=25 \Rightarrow x^2-25x+144=0 \Rightarrow x_1=9;\ x_2=16 \Rightarrow y_1=-4;\ y_2=-3.$$

Atbilde: $\begin{cases}x_1=9\\y_1=-4\end{cases}$ un $\begin{cases}x_2=16\\y_2=-3\end{cases}$.

76.10.2. Apzīmēsim $\sin^2 x=p$ un $\cos^2 x=q$, tad iegūstam vienādojumu

$$p^3+q^3=a(p^2+q^2) \Rightarrow (p+q)(p^2-pq+q^2)=a(p^2+q^2).$$

Tā kā $p=\sin^2 x$ un $q=\cos^2 x$, tad $p+q=\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

$$p^2-pq+q^2=a(p^2+q^2) \Rightarrow a=\frac{p^2-pq+q^2}{p^2+q^2}=1-\frac{pq}{p^2+q^2}\in\left[\frac{1}{2};1\right].$$

Pārveidojam iegūto vienādību: $\dfrac{pq}{p^2+2pq+q^2-2pq}=1-a$.

$$\frac{pq}{1-2pq}=1-a \Rightarrow (1-a)(1-2pq)=pq \Rightarrow pq=\frac{1-a}{3-2a}.$$

Tā kā $pq=\sin^2 x\cos^2 x=\dfrac{1}{4}\sin^2 2x$, tad $\dfrac{1}{4}\sin^2 2x=\dfrac{1-a}{3-2a}$.

No šejienes seko, ka $\sin^2 2x=\dfrac{4(1-a)}{3-2a}$.

Tātad $\sin 2x=\pm 2\sqrt{\dfrac{1-a}{3-2a}}$ un $x=\pm\dfrac{1}{2}\arcsin 2\sqrt{\dfrac{1-a}{3-2a}}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

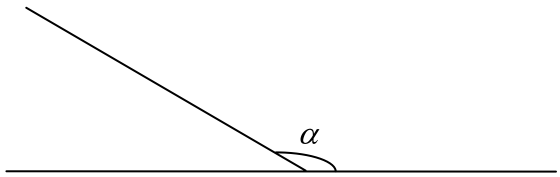
1976./77. mācību gads

77.8.3. Uzdevumu var atrisināt, apzīmējot dotos skaitļus ar x, y un z. Tad iegūst vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} xz = y^2 \\ x + z = 2(y+8) \\ x(z+64) = (y+8)^2 \end{cases}.$$

Atrisinot šo vienādojumu sistēmu, iegūstam atbildi $x = 4,\ \ y = 12,\ \ z = 36$.

77.8.4. Uzdevuma formulējums rada divdomības gan skolēniem un skolotājiem, gan matemātikas pasniedzējiem. Izlasot uzdevuma nosacījumus ir ļoti jādomā, kur atrodas katrs no uzdevumā dotajiem leņķiem, kā krīt saules stari. Lai šāda veida uzdevums skolēniem būtu vieglāk saprotams, ieteicams uzdevuma nosacījumiem pievienot zīmējumu. Apskatot skolēnu darbus, redzams, ka viņiem ir skaidrs, kur var atrasties koks ($a \geq b$ vai $a < b$). Lielākās problēmas rada tieši leņķu α un β atlikšana. Lielākā daļa skolēnu leņķi α atliek tā, kā parādīts K1. zīmējumā.



K1. zīm.

Atliekot šādi leņķi α, nav izprotams, kur būs leņķis β, tādējādi nonākot strupceļā.

77.10.2. Šobrīd skolās nemāca vairs nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, bet olimpiādēs dažu uzdevumu risinājumos tiek lietota šī nevienādība.

77.11.3. Atrast tās parametra a vērtības, ar kurām funkcijas $f(x) = x^2 + (a+1)^2 + 2|x + a - 1|$ minimums lielāks nekā 4.

Zemāk piedāvāts viens no pirmajiem autores neveiksmīgajiem risinājumiem. Tas noformēts sofisma veidā, kurā ne tik viegli saskatīt kļūdu.

Anniņa. Aplūkojam moduli $|x + a - 1|$. Pielīdzinām nullei un iegūstam x vērtību, kurā šī izteiksme maina zīmi: $x + a - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 - a$.

Šķirosim divus gadījumus:

$$\begin{cases} x < 1 - a \\ f(x) = x^2 + (a+1)^2 - 2(x + a - 1) \end{cases} \text{ un } \begin{cases} x > 1 - a \\ f(x) = x^2 + (a+1)^2 + 2(x + a - 1) \end{cases}.$$

Pirmajā gadījumā: $\begin{cases} x < 1 - a \\ f(x) = x^2 - 2x + (a+1)^2 - 2a + 2 \end{cases}.$

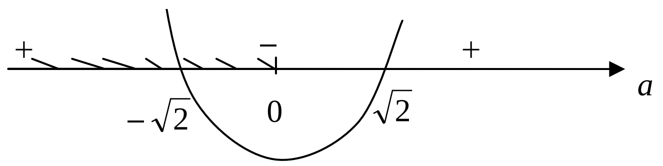
Tā kā $y = ax^2 + bx + c$ un $x_0 = \dfrac{-b}{2a}, y_0 = ax_0{}^2 + bx_0 + c$, iegūstam

$$x_0 = \frac{-(-2)}{2\cdot 1} = 1$$

$$f(1) = 1^2 - 2\cdot 1 + a^2 + 2a + 1 - 2a + 2 = a^2 + 2\,.$$

Pēc uzdevuma nosacījumiem $f(1) = a^2 + 2 > 4$. Iegūstam $a^2 > 2$.

Tā kā $x < 1 - a$ un $x_0 < 1 - a$, tad iegūstam $a < 0$ (sk. K2. zīm.).



K2. zīm.

Tātad $a \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right)$.

Otrajā gadījumā: $\begin{cases} x > 1 - a \\ f(x) = x^2 + 2x + (a+1)^2 + 2a - 2 \end{cases}$.

$$x_0 = \frac{-2}{2} = -1$$

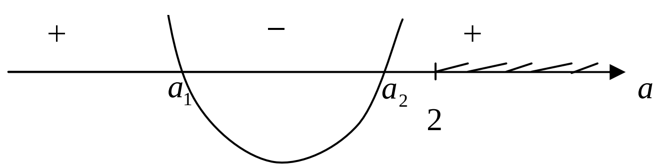
$$f(-1) = (-1)^2 + 2\cdot(-1) + a^2 + 2a + 1 + 2a - 2 = a^2 + 4a - 2\,.$$

Pēc uzdevuma nosacījumiem $f(-1) = a^2 + 4a - 2 > 4$. Iegūstam $a^2 + 4a - 6 > 0$.

$$D = 4^2 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 16 + 24 = 40$$

$$a_1 = \frac{-4 - \sqrt{40}}{2},\ a_2 = \frac{-4 + \sqrt{40}}{2}\,.$$

Tā kā $x > 1 - a$ un $x_0 > 1 - a$, tad iegūstam $a > 2$ (sk. K3. zīm.).



K3. zīm.

$$a \in (2; +\infty)\,.$$

Tātad $a \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

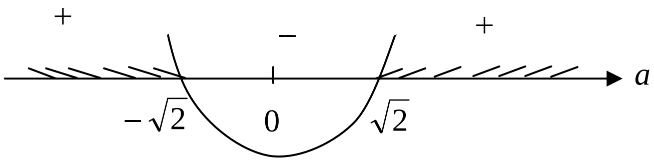
Jānītis. Apskatam izteiksmi $x + a - 1$ un pielīdzinām nullei. Iegūstam x vērtību, kurā šī izteiksme maina zīmi: $x + a - 1 = 0 \ \Rightarrow\ x = 1 - a$.

Šķirosim divus gadījumus:

1) $\begin{cases} x < 1-a \\ f(x) = x^2 + (a+1)^2 - 2(x+a-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1-a \\ f(x) = x^2 - 2x + (a+1)^2 - 2a + 2 \end{cases}.$

$$x_0 = \frac{-(-2)}{2\cdot 1} = 1,\ f(1) = 1^2 - 2\cdot 1 + a^2 + 2a + 1 - 2a + 2 = a^2 + 2.$$

Lai izpildītos uzdevuma nosacījumi $f(1) = a^2 + 2 > 4$, $a^2 > 2$, $a_1 = -\sqrt{2} \approx -1{,}41$, $a_2 = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ (sk. K4. zīm.).



K4. zīm.

Tātad $a \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$.

2) $\begin{cases} x \ge 1-a \\ f(x) = x^2 + (a+1)^2 + 2(x+a-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1-a \\ f(x) = x^2 + 2x + (a+1)^2 + 2a - 2 \end{cases}$

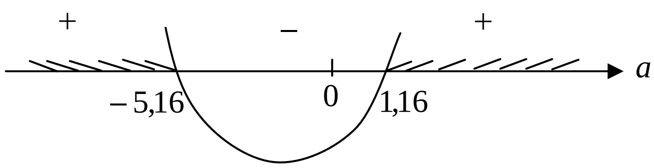
$$x_0 = \frac{-2}{2} = -1,\ f(-1) = (-1)^2 + 2\cdot(-1) + a^2 + 2a + 1 + 2a - 2 = a^2 + 4a - 2.$$

Pēc uzdevuma nosacījumiem $f(-1) = a^2 + 4a - 2 > 4$. Iegūstam $a^2 + 4a - 6 > 0$.

$$D = 4^2 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 16 + 24 = 40$$

$$a_1 = \frac{-4-\sqrt{40}}{2} = -2 - \sqrt{10} \approx -5{,}16,$$

$$a_2 = \frac{-4+\sqrt{40}}{2} = -2 + \sqrt{10} \approx 1{,}16 \text{ (sk. K5. zīm.).}$$



K5. zīm.

$a \in (-\infty; -5{,}16) \cup (1{,}16; +\infty)$.

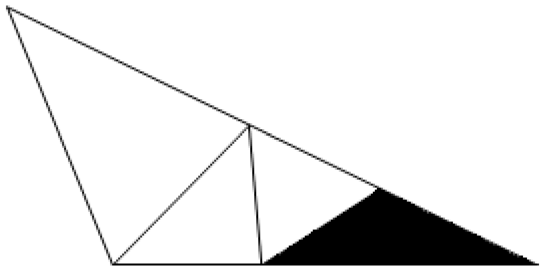
Apvienojot abus iegūtos rezultātus, iegūstam $a \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(-2 + \sqrt{10}; +\infty\right)$.

Atbilde: $a \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(-2 + \sqrt{10}; +\infty\right)$.

Jautrīte. Arī Jānītis ir ieguvis nepareizu atbildi. Piemēram, uzdevuma nosacījumus apmierina vērtība a = 1,15, bet tā nav iekļauta atbildē.

Kāda ir pareizā atbilde? Vai to spējat noskaidrot patstāvīgi?

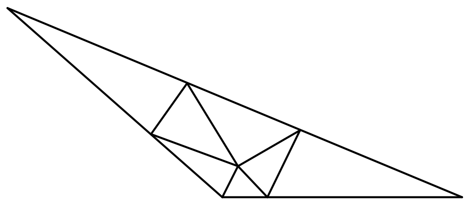
77.11.4. Varam aplūkot šādu uzdevumu: Vai ir iespējams sadalīt platleņķa trijstūri (viens leņķis ir plats) mazākos trijstūros, tā, lai tie visi būtu šaurleņķa [8]? Ja šāda sadalīšana ir iespējama, tad kāds ir mazākais šaurleņķa trijstūru skaits? Sadalīsim plato leņķi ar taisni. Iegūstam vai nu divus taisnus leņķus, vai arī atkal plato leņķi. Atkārtojot šādu sadalīšanas principu, iegūstam arvien jaunu – mazāku platleņķa trijstūri (sk. K6. zīm.).



K6. zīm.

Tātad veicot šādu sadalījumu, nav iespējams izpildīt uzdevuma nosacījumus.

Aplūkosim citu iespēju. Plato leņķi sadalīsim ar taisni (nogriezni) tā, ka tas leņķa pretējo malu nekrusto (sk. K7. zīm.).



K7. zīm.

Tātad šī taisne beidzas trijstūra iekšpusē. Mazākais iespējamais līniju skaits no šīs virsotnes ir 5, citādāk atkal veidosies plats leņķis. Kā rezultātā mazākais šaurleņķa trijstūru skaits ir 7.

1977./78. mācību gads

78.8.1. Nevienādību $\frac{100}{a_2}-\frac{100}{a_1}\geq\frac{5}{6}$ var pārveidot arī šādi:

$$\frac{100(a_1-a_2)}{a_1a_2}\geq\frac{5}{6}\Rightarrow 100\cdot 10\cdot 6\geq 5a_1a_2\Rightarrow 0\geq(a_1-10)a_1-1200\Rightarrow$$

$$a_1^2-10a_1-1200\leq 0.$$

NMS mājas lapā http://nms.lu.lv arhīvā atrodamā uzdevuma atbilde ir nepareiza. Uzdevuma risinātāji nav ņēmuši vērā, ka $a_1>10$ [9].

78.8.2. Apzīmēsim dotos skaitļus ar x, y un z. Uzdevuma nosacījumus pierakstām vienādojumu sistēmas veidā

$$\begin{cases} xz=y^2 \\ x+z=2(y+2) \\ x(z+9)=(y+2)^2 \end{cases}.$$

Atrisinot šo vienādojumu sistēmu, iegūstam atbildi $x=4,\ y=8,\ z=16$ vai $x=\frac{4}{25},\ y=-\frac{16}{25},\ z=\frac{64}{25}$.

78.8.3. NMS mājas lapā http://nms.lu.lv arhīvā atrodama uzdevuma atbilde ir $AB=\frac{S}{O_1O_2}=\frac{84}{15}$. Kļūda radusies, nepareizi izsakot hordas garumu, izmantojot laukuma aprēķināšanas formulu.

Pareizais risinājums: Trijstūra laukumu aprēķina pēc formulas $S=\frac{1}{2}O_1O_2\cdot AH$ un $AH=\frac{2S}{O_1O_2}$. Tātad $AB=2AH=\frac{4S}{O_1O_2}=\frac{4\cdot 84}{15}=22{,}4$ cm. Pilnīgāku risinājumu, skatieties atrisinājumu nodaļā.

78.9.1. NMS mājas lapā http://nms.lu.lv arhīvā atrodamais uzdevuma risinājums ir neprecīzs. Uzrakstot $f(n+1)$ ir ieviesusies kļūda.

78.10.2. nms.lu.lv arhīvā atrodama atbilde: $\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$. Atbilde nav pareiza, kas skaidrs, piemēram, ņemot $\alpha=0$.

78.11.1. NMS mājas lapā http://nms.lu.lv arhīvā atrodama tikai atbilde: „nevienādībai nav atrisinājuma”. No šādas atbildes, nevaram secināt, kāpēc uzdevuma risinātājs ir pieļāvis kļūdu.

NOBEIGUMS

Rakstot maģistra darbu, mans galvenais uzdevums bija izveidot metodisku materiālu skolēniem un skolotājiem, kas gatavojas matemātikas olimpiādēm. Rezultātā ir izveidots noderīgs palīglīdzeklis Word dokumenta veidā, kas apkopo vienus no pirmajiem rajona olimpiāžu uzdevumiem, t. i., 1975./76., 1976./77. un 1977./78. mācību gada.

Rakstot šo darbu, nācās atkārtot dažas jau piemirstas lietas, kas galu galā tikai padziļināja manas zināšanas. Kopumā ar padarīto esmu ļoti apmierināta un ceru, ka kādam skolēnam vai skolotājam tas būs labs materiāls, ko izmantot gatavojoties olimpiādei.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA

1. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Rācene, B. Johannessons, Matemātikas sacensības 4. – 9. klasēm uzdevumi un atrisinājumi 2007./2008. mācību gadā, Latvijas Universitāte, 2008, 125 lpp.

2. E. Riekstiņš, J. Tomsons, N. Dūma, A. Grava, O. Treilībs, A. Šķļeņņiks, Konkursa uzdevumu krājums algebrā, ģeometrijā un trigonometrijā, Rīga, 1960.

3. A. Andžāns, T. Ziļicka, O. Treilībs, Uzdevumi matemātikas olimpiādēs, Rīga, Zvaigzne, 1977.

4. A. Andžāns, A. Bērziņš, M. Stupāne, Matemātikas olimpiāžu un konkursu uzdevumi, Zvaigzne, 1992, 239 lpp.

5. A. Andžāns, I. Kondratjeva, B. Johannessons, Matemātikas sacensības 9. – 12. klasēm 2007./2008. mācību gadā, Biznesa augstskola Turība, 2009, 72 lpp.

6. B. Siliņa, K. Šteiners, Rokasgrāmata matemātikā, Zvaigzne ABC, 2006, 367 lpp.

7. A. Gailītis, A. Andžāns, Kārtošanas un meklēšanas uzdevumi, Krauklītis, Aizkraukle, 1995, 102 lpp.

8. http://www.puzzles.com/PuzzlePlayground/AcuteDissection/AcuteDissectionPrintPlay.pdf

9. http://nms.lu.lv.

Maģistra darbs „Latvijas matemātikas rajonu olimpiāžu uzdevumi un to risinājumi” izstrādāts LU Fizikas un matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Inese Ozoliņa

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai.

Vadītājs: asoc. prof. Andrejs Cibulis

Recenzents:

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā ____.06.2010.

Metodiķe:

Darbs aizstāvēts maģistra gala pārbaudījuma komisijas sēdē

____________________ prot. Nr. ____________, vērtējums _______________________

Komisijas sekretāre: