

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
DATORIKAS FAKULTĀTE

**ULTRAMETRISKI ALGORITMI
DAŽĀDIEM AUTOMĀTU TIPIEM**

BAKALaura DARBS

Autors: **Maksims Dimitrijevs**

Studenta apliecības Nr.: md09032

Darba vadītājs: Dr.habil.math., prof. Rūsiņš Mārtiņš Freivalds

RĪGA 2013

ANOTĀCIJA

Bakalaura darbā tiek apskatīti p -adiski skaitļi un to izmantošana automātos par parametriem, kas ļauj veidot ultrametriskus automātus. Ultrametriski automāti ir līdzīgi varbūtiskiem automātiem, tikai varbūtību vietā tiek izmantotas amplitūdas, kas ir p -adiski skaitļi. Darbā tiek apskatītas ultrametrisku algoritmu izmantošanas iespējas atpazīstamo valodu klases paplašināšanai, nepieciešamo stāvokļu skaita samazināšanai un sarežģītības samazināšanai. Tiek apskatīti ultrametriski algoritmi galīgiem vienvirziena un divvirzienu automātiem, automātiem ar magazīnas atmiņu, automātiem ar vairākām galviņām un Tjūringa mašīnām. Darbā ir parādīts, ka determinētas Tjūringa mašīnas uzdevumus var reducēt uz ultrametriskiem galīgiem automātiem, kā arī pierādītas vairākas teorēmas par dažādiem automātu tipiem.

Atslēgvārdi: p -adiski skaitļi, valodas, ultrametriski automāti, Tjūringa mašīnas, sarežģītība

ABSTRACT

The bachelor work explores p -adic numbers and their usage in automata as parameters. The use of p -adic numbers allows to make ultrametric automata. Ultrametric automata is similar to probabilistic automata, except that p -adic numbers – amplitudes are being used instead of probabilities. The work explores the abilities of ultrametric algorithms in the expansion of recognizable languages and reduction of the state count and complexity. Ultrametric algorithms for one-way and two-way automata, pushdown automata, multi-head automata and Turing machines are explored. The work shows that tasks for deterministic Turing machine may be reduced to ultrametric finite automata. Several theorems about various types of automata are proven.

Keywords: p -adic numbers, languages, ultrametric automata, Turing machines, complexity

SATURS

APZĪMĒJUMU SARAKSTS.....	4
IEVADS	5
1. P-ADISKI SKAITĻI	7
1.1. Jēdziens un matemātiskās operācijas	7
1.2. Metrikas	9
2. GALĪGI AUTOMĀTI	11
3. ULTRAMETRISKI GALĪGI AUTOMĀTI.....	13
3.1. Atpazīstamo valodu klases paplašināšana.....	13
3.2. Nepieciešamo stāvokļu skaita samazināšana	16
4. DAŽĀDU TIPU ULTRAMETRISKI AUTOMĀTI.....	24
4.1. Vienvirziena galīgi automāti ar vairākām galviņām	24
4.2. Ultrametriski divvirzienu galīgi automāti	28
4.3. Ultrametriski magazīnas automāti.....	36
5. TJŪRINGA MAŠĪNAS.....	39
5.1. Laika sarežģītība	39
5.2. Telpas sarežģītība.....	39
5.3. Pagriezīnu skaita sarežģītība	41
SECINĀJUMI	44
IZMANTOTĀ LITERATŪRA UN AVOTI.....	45

APZĪMĒJUMU SARAKSTS

FANO plakne – otrās pakāpes projektīva plakne, kas sastāv no 7 punktiem un 7 taisnēm un uz katras taisnes atrodas tieši 3 punkti.

L_n – valodas apzīmējums. n ir pozitīvs vesels skaitlis.

p -adisks skaitlis – bezgalīga p -adisku ciparu virkne, kurai var sekot peldošais punkts, pēc kura ir galīgs p -adisku ciparu skaits. p -adisks cipars ir naturāls skaitlis robežās no 0 līdz $p - 1$, kur p ir pirmskaitlis.

Skaitļa p -norma – skaitļa p -adiskā absolūtā vērtība, kas ir vienāda ar 0, ja skaitlis ir 0. Citādi skaitļa a p -norma ir vienāda $\frac{1}{p^{\text{ord}_p a}}$, kur $\text{ord}_p a$ ir maksimālā skaitļa p pakāpe, ar kuru dalās skaitlis a .

Ultrametrisks automāts – automāts, kam tiek izmantoti p -adiski skaitļi kā amplitūdas pārejām starp stāvokļiem.

□ – teorēmas pierādījuma beigas.

IEVADS

Reālus skaitļus starp 0 un 1 izmanto notikumu nedeterminisma aprakstīšanai, un tas tiek saukts par varbūtību. Alternatīva ir p -adisku skaitļu izmantošana, kuri jau plaši tiek izmantoti varbūtības mērīšanai ķīmijā [1], fizikā [2] un bioloģijā [3].

Varbūtiski algoritmi un galīgi automāti plaši tiek pētīti, bet alternatīvu, p -adisku skaitļu izmantošanu datorzinātnē pagaidām tikai sāk apskatīt. Rūsiņš Freivalds ir apskatījis p -adiskus skaitļus kā amplitūdas pārejām starp stāvokļiem, iegūstot alternatīvu varbūtiskajiem automātiem un Tjūringa mašīnām [4]. Algoritmus, kuros tiek izmantoti p -adiski skaitļi, sauc par ultrametriskiem algoritmiem, attiecīgi, automātus un Tjūringa mašīnas ar p -adiskiem skaitļiem sauc par ultrametriskiem automātiem un Tjūringa mašīnām.

Bakalaura darbā tiek pētīti ultrametriski algoritmi dažādiem automātu tipiem – galīgiem vienvirziena un divvirzienu automātiem, automātiem ar magazīnas atmiņu, automātiem ar vairākām galviņām un Tjūringa mašīnām. Darba mērķis ir izpētīt ultrametrisku algoritmu izmantošanas iespējas dažādiem automātu tipiem un izpētīt to izmantošanas priekšrocības, salīdzinot ar determinētu un varbūtisku algoritmu analogiem. Pētījumam tiek apskatītas vairākas valodas, kā arī zinātniskajos rakstos aprakstītie agrāk iegūtie rezultāti.

Darbs satur piecas nodaļas. Katra nodaļa satur savus bakalaura darba uzdevumus un to risināšanu. Galvenais darba mērķis ir apskatīt dažāda tipa ultrametriskus automātus un izpētīt to iespējas.

Darba pirmajā nodaļā tiek aprakstīti p -adiski skaitļi, kā arī pamatoperācijas ar tiem un to absolūtas vērtības rēķināšana.

Otrajā nodaļā tiek definēti ultrametriski galīgi automāti, kuri izmanto p -adiskus parametrus. Definīcija kļūst par pamatu pārējo automātu tipu definēšanai.

Trešajā nodaļā tiek apskatīti ultrametriski galīgi automāti, un ieguvumi nepieciešamo stāvokļu skaita samazināšanā un atpazīstamo valodu kopas paplašināšanā. Nodaļā notiek salīdzināšana starp ultrametriskiem, determinētiem un varbūtiskiem galīgiem automātiem.

Darba ceturtajā nodaļā tiek apskatīti citi ultrametrisku automātu tipi – automāti ar vairākām galviņām, divvirzienu galīgi automāti, automāti ar magazīnas atmiņu. Notiek salīdzināšana gan starp dažādu tipu ultrametriskiem automātiem, gan starp konkrētā tipa ultrametrisku automātu un tā paša tipa determinētu automātu. Ultrametriskiem divvirzienu automātiem tiek arī apskatītas valodas, kas reprezentē galīgas projektīvas plaknes, sākot ar FANO plakni.

Piektajā nodaļā tiek apskatītas Tjūringa mašīnas. Tiek salīdzinātas ultrametrisku un determinētu Tjūringa mašīnu rēķināšanas sarežģītības – laika, telpas un pagriezīenu skaita

sarežģītība. Pētot dažādas valodas tiek parādīts, kā var reducēt determinētas Tjūringa mašīnas uzdevumu uz ultrametrisku galīgu automātu.

Darba gaitā tiek izveidotas un apskatītas vairākas valodas, un pierādītas vairākas teorēmas par valodu atpazīšanas iespējām un nepieciešamo stāvokļu skaitu dažāda tipa ultrametriskiem galīgiem automātiem.

1. P-ADISKI SKAITĻI

1.1. Jēdziens un matemātiskās operācijas

Par p -adisku ciparu sauc naturālu skaitli robežās no 0 līdz $p - 1$, kur p ir pirmskaitlis. Pēc definīcijas p -adisks vesels skaitlis ir p -adisku ciparu virkne $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, kur a_i ir p -adisks cipars. Parasti to var pierakstīt kā decimālo skaitli $\dots a_i \dots a_2 a_1 a_0$ [5].

Katru naturālu skaitli n var reprezentēt kā $\overline{a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0}$, kur $n = \sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i$, un šim naturālam skaitlim atbilst p -adisks vesels skaitlis (a_i) , kuram $a_i = 0$ visiem $i \geq k$. Tātad, katram naturālam skaitlim atbilst p -adisks vesels skaitlis ar bezgalīgu nulļu skaitu, un šāda p -adiska vesela skaitļa nenulles daļa atbilst naturāla skaitļa pierakstam bāzē p . Piemēram, naturālam skaitlim 498 atbilst 7-adisks vesels skaitlis $\dots 0 \dots 001311$, jo $498 = 1 * 7^3 + 3 * 7^2 + 1 * 7^1 + 1 * 7^0$. Savukārt, skaitlim nulle atbilst p -adisks vesels skaitlis, kuram visi cipari ir nulles.

p -adiskiem skaitļiem ir definēta saskaitīšanas operācija, kas ir līdzīga naturālo skaitļu saskaitīšanai bāzē p . Piemēram, 5-adiskajiem skaitļiem $\dots 13241$ un $\dots 31123$ summa tiek rēķināta šādi:

$$\begin{array}{r} + \dots 1\ 3\ 2\ 4\ 1 \\ \dots 3\ 1\ 1\ 2\ 3 \\ \hline \dots 4\ 4\ 4\ 1\ 4 \end{array}$$

Saskaitīšanas operācija ir komutatīva, asociatīva un $x + 0 = x$ viesiem p -adiskiem veseliem skaitļiem x . Ja divi p -adiski veseli skaitļi x un y ir naturāli skaitļi, tad to summa ir vienāda ar to skaitļu summu naturālajos skaitļos [5]. Piemēram, $5 + 7 = 12$, 3-adiskajos skaitļos $5 = \dots 0 \dots 012$ un $7 = \dots 0 \dots 021$. $\dots 0 \dots 012 + \dots 0 \dots 021 = \dots 0 \dots 110$, kas atbilst naturālam skaitlim 12.

Atņemšanas operācija ir līdzīga saskaitīšanai, tikai jāņem vērā, ka p -adiska skaitļa pieraksts ir bezgalīga virkne. Piemēram, 5-adiskajos skaitļos atņemot 1 no nulles, mēs iegūsim 5-adisku skaitli -1.

$$\begin{array}{r} _ \dots 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \dots 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \hline \dots 4\ 4\ 4\ 4\ 4 \end{array}$$

Negatīviem veseliem skaitļiem p -adiskajā pierakstā atbilst p -adisku ciparu virknes, kam kreisajā pusē ir bezgalīgs skaits ciparu $p - 1$. No $p - 1$ atšķirīgo ciparu skaits ir galīgs [5].

Reizināšana p -adiskajiem skaitļiem ir līdzīga naturālo skaitļu reizināšanai, kas atbilst skaitļa atkārtotai saskaitīšanai. p -adiska skaitļa x reizināšana ar naturālo skaitli n nozīmē saskaitīt n reizes skaitli x [5]. Apskatīsim 5-adisku skaitļu ...0...0213 un ...0...0423 reizināšanu kā piemēru:

$$\begin{array}{r}
 * \quad \quad \quad \dots 0\ 2\ 1\ 3 \\
 \quad \quad \quad \dots 0\ 4\ 2\ 3 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \dots 0\ 1\ 1\ 4\ 4 \\
 + \quad \quad \quad \dots 0\ 4\ 3\ 1 \\
 \quad \quad \quad \dots 0\ 1\ 4\ 1\ 2 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \dots 0\ 2\ 0\ 2\ 2\ 0\ 4
 \end{array}$$

p -adisku skaitļu dalīšana nenotiek līdzīgi veselo vai reālo skaitļu dalīšanai. Vienīgā dalīšana, kura nevar tikt veikta p -adiskajos veselos skaitļos, ir dalīšana ar p (ja skaitlis nedalās ar p bez atlikuma). Piemēram, lai $\frac{1}{p}$ būtu vesels p -adisks skaitlis, vienādojumam $p * x = 1$ jābūt atrisinājumam, bet reizināšana ar p -adisku veselu skaitli p vienmēr dod nulli pēdējā ciparā.

Tomēr dalīšanas rezultātam p -adiskajos skaitļos īpašība ir līdzīga naturālajiem skaitļiem. Viena puse ir tāds skaitlis α , kuru reizinot ar 2 tiek iegūts skaitlis 1. Tātad, ja p ir nepāra pirmskaitlis, tad p -adisks skaitlis $\frac{1}{2}$ ir tāds p -adisks vesels skaitlis, kuram visi cipari, izņemot pēdējo, ir $\frac{p-1}{2}$, un pēdējais cipars ir $\frac{p+1}{2}$ [5]. Piemēram, 11-adisks skaitlis $\frac{1}{2}$ ir ...55556:

$$\begin{array}{r}
 + \dots 5\ 5\ 5\ 5\ 6 \\
 \quad \dots 5\ 5\ 5\ 5\ 6 \\
 \hline
 \quad \dots 0\ 0\ 0\ 0\ 1
 \end{array}$$

Līdzīgi spriežot, 11-adiskajos veselos skaitļos „viena trešdaļa” ir ...(37)37374, „viena ceturtdaļa” ir ...(28)28283, „viena sestdaļa” ir ...(19)19192, „viena devītdaļa” ir ...(498612)4986125. Savukārt, skaitļi $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{22}$ 11-adiskajos veselos skaitļos neeksistē.

Apskatītajos piemēros bija runa par p -adiskajiem veseliem skaitļiem. Vispārīgi, p -adiskiem skaitļiem var būt peldošais punkts, aiz kura seko galīgs p -adisku ciparu skaits, kas ir atšķirīgi no nulles. Šeit jau parādās iespēja veidot tādus skaitļus, kas ir skaitļa, kas nedalās ar p , dalīšanas ar p rezultāts. Piemēram, 5-adiskajos skaitļos $\frac{1}{5}$ ir ...000,1, $\frac{1}{125}$ ir ...000,001, $\frac{3}{25}$ ir ...000,03.

Ar iracionāliem skaitļiem ir vēl sarežģītāk. Ir iespējams uzrakstīt naturāla skaitļa a kvadrātsakni p -adiskajos veselos skaitļos, ja skaitlis a ir kvadrātisks prezīdijs pēc moduļa p . Tad iegūtajam skaitlim ir īpašība, kas ir līdzīga daļskaitļiem – p -adiska kvadrātsakne, reizināta paša ar sevi, rezultātā dod naturālu skaitli, kas atrodas zem radikāļa. Piemēram, $\sqrt{2}$ 7-adiskajos skaitļos ir ...6421216213, savukārt, $\sqrt{2}$ 5-adiskajos skaitļos neeksistē, jo 2 nav kvadrātisks prezīdijs pēc moduļa 5 [6].

1.2. Metrikas

Par attālumu vai metriku netukšā kopā X sauc funkciju d no kopas X elementu pāriem uz nenegatīviem reālajiem skaitļiem. Funkcijai d izpildās sekojošās īpašības:

1. $d(x, y) = 0$ tad un tikai tad, ja $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ visiem $z \in X$ [7].

Par metrisku telpu tiek saukta kopa X kopā ar metriku d . Viena un tā pati kopa X var rādīt daudzas dažādas metriskās telpas (X, d) . Par elementa normu vai absolūto vērtību tiek saukts attālums no elementa līdz nullei $d(x, 0)$, kur $x \in X$. Elementa x normas apzīmējums ir $\|x\|$, un elementa normai jāapmierina sekojošās īpašības:

1. $\|x\| = 0$ tad un tikai tad, ja $x = 0$;
2. $\|x * y\| = \|x\| * \|y\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ [7].

Ja trešā īpašība tiek aizvietota ar stiprāku nevienādību $\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$, tad norma tiek saukta par ultrametrisku.

Par nenulles vesela skaitļa a p -adisko ordinalitāti $ord_p a$ sauc augstāko p pakāpi, ar kuru dalās skaitlis a . Racionālā skaitļa $\frac{a}{b}$ ordinalitāte ir $ord_p a - ord_p b$, bet veselo skaitļu reizinājuma $a * b$ ordinalitāte ir $ord_p a + ord_p b$. Savukārt, $ord_p a = \infty$ tad un tikai tad, ja $a = 0$ [7].

Par racionālā skaitļa a p -normu sauc skaitli

$$\|a\|_p \begin{cases} \frac{1}{p^{ord_p a}} & , ja x \neq 0, \\ 0, & ja x = 0 \end{cases} [7].$$

Kā piemēru varam apskatīt skaitli $\frac{3087}{6655} = 3^2 * 5^{-1} * 7^3 * 11^{-3}$. Skaitļa $\frac{3087}{6655}$ p -normas

dažādiem p būs sekojošas:

$$\left\| \frac{3087}{6655} \right\|_2 = \frac{1}{2^0} = 1;$$

$$\left\| \frac{3087}{6655} \right\|_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9};$$

$$\left\| \frac{3087}{6655} \right\|_5 = \frac{1}{5^{-1}} = 5;$$

$$\left\| \frac{3087}{6655} \right\|_7 = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343};$$

$$\left\| \frac{3087}{6655} \right\|_{11} = \frac{1}{11^{-3}} = 1331.$$

Citiem pirmskaitļiem p skaitļa $\frac{3087}{6655}$ p -norma būs vienāda ar 1.

2. GALĪGI AUTOMĀTI

Par galīgu determinētu automātu sauc piecinieku (Q, Σ, f, Q_A, q_0) , kur:

- Q – galīga stāvokļu kopa;
- Σ - galīgs ieejas alfabēts;
- $f: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ - pārejas funkcija;
- Q_A - akceptējošo stāvokļu kopa, kas ir stāvokļu kopas Q apakškopa;
- q_0 - sākuma stāvoklis, kas ir kopas Q elements.

Automāts saņem ieejas vārdu, un pēc katra nolasīta simbola stāvoklis tiek mainīts saskaņā ar pārejas funkciju. Vārds tiek akceptēts, ja pēc vārda nolasīšanas automāts nonāk kādā no akceptējošiem stāvokļiem.

Galīgs varbūtisks automāts ir līdzīgs galīgam determinētam automātam. Sākuma stāvokļa vietā ir vektors, kura elementi nosaka varbūtības stāvokļiem būt par sākuma stāvokļiem. Vektors ir stohastisks, tātad, katrs elements ir nenegatīvs reāls skaitlis, un visu elementu summa ir 1. Savukārt, automāta pārejas funkcija kļūst par stohastisko matricu kopu. Stohastiskajai matricai katrs elements ir nenegatīvs reāls skaitlis, un katras rindiņas visu elementu summa ir 1. Katram ieejas alfabēta simbolam atbilst viena matrica $|Q| \times |Q|$, kura nosaka varbūtības, nolasot attiecīgo simbolu, nonākt no jebkura automāta stāvokļa jebkurā stāvoklī. Varbūtiskajam automātam parādās vēl viens elements – sliksnis λ , kas ir reāls skaitlis intervālā no 0 līdz 1. Pēc katra saņemtā ieejas vārda simbola tiek aprēķinātas varbūtības atrasties katrā stāvoklī, un ja pēc visa vārda nolasīšanas varbūtība atrasties akceptējošā stāvoklī (ja tāds ir viens) pārsniedz sliksni λ , tad ieejas vārds tiek akceptēts. Ja akceptējošie stāvokļi ir vairāki, tad vārds tiek akceptēts, ja visu akceptējošo stāvokļu varbūtību summa pārsniedz sliksni λ [4].

Varbūtības aprēķināšanai var veikt matricu reizināšanu. Kā piemēru apskatīsim trīs stāvokļu varbūtisku automātu, kuram akceptējošie stāvokļi ir otrais un trešais. Ieejas alfabēts sastāv no diviem simboliem – „0” un „1”. Sākuma stāvokļu vektors ir $\left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0\right)$, kas nozīmē, ka automāts sākumā atradīsies pirmajā stāvoklī ar varbūtību $\frac{1}{2}$, otrajā ar varbūtību $\frac{1}{2}$, un trešajā

ar varbūtību 0. Pārejas matrica ieejas simbolam „0” ir $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, un ieejas simbola „1”

pārejas matrica ir $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Ja ieejā tika saņemts vārds „10”, tad pēc vārda nolasīšanas

varbūtības atrasties konkrētajos stāvokļos būs sekojošas:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{36} & \frac{1}{18} & \frac{17}{36} \end{pmatrix}.$$

Tas nozīmē, ka automāts atradīsies kādā no akceptējošiem stāvokļiem ar varbūtību $\frac{1}{18} + \frac{17}{36} = \frac{19}{36}$, un tas nozīmē, ka vārds tiktu akceptēts ar varbūtību $\frac{19}{36}$. Piemēram, ja sliekšnis λ būtu vienāds ar $\frac{1}{2}$, tad vārds tiktu akceptēts.

1969. gadā Paavo Turakainen pierādīja, ka ja varbūtiskajos automātos stohastisko matricu un vektoru vietā izmantot matricas un vektorus ar jebkādiem reālajiem skaitļiem, un noņemot no sliekšņa ierobežojumu atrasties intervālā starp 0 un 1, tad atpazīstamo valodu klase šādiem varbūtiskajiem automātiem nemainīsies. Šādiem automātiem pāreju varbūtības kļūst par amplitūdām [8].

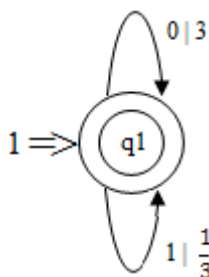
Ultrametriski galīgi automāti ir līdzīgi varbūtiskiem galīgiem automātiem, tikai definīcijā parādās vēl viens elements – pirmskaitlis p , un sākuma stāvokļu un pāreju varbūtību vietā ir p -adiski skaitļi, kas tiek saukti par amplitūdām. Vārda akceptēšanas nosacījumā akceptēšanas sliekšņa λ vietā ir divu reālo skaitļu intervāls $[\alpha, \beta]$. Pēc ieejas vārda nolasīšanas katram stāvoklim amplitūda tiek aprēķināta tāpat, kā varbūtiskiem automātiem, un tad stāvokļu amplitūdas tiek pārveidotas par p -normām. Ja akceptējošā stāvokļa (ja tāds ir viens) amplitūdas p -norma atrodas intervālā $[\alpha, \beta]$, tad ieejas vārds tiek akceptēts. Ja akceptējošie stāvokļi ir vairāki, tad vārds tiek akceptēts, ja katra akceptējošā stāvokļa amplitūdu p -normu summa atrodas intervālā $[\alpha, \beta]$ [4].

3. ULTRAMETRISKI GALĪGI AUTOMĀTI

3.1. Atpazīstamo valodu klases paplašināšana

Rūsiņš Freivalds pierādīja, ka eksistē kontinuums valodu, ko atpazīst galīgs ultrametrisks automāts [4]. Patiesībā ultrametriski galīgi automāti paplašina atpazīstamo valodu klasi, piemērām, salīdzinot ar galīgiem determinētiem automātiem. Kā piemēru apskatīsim valodu L_1 , kuras vārdi sastāv no nullēm un vieniniekiem, un nulļu un vieninieku skaits ir vienāds.

Valoda L_1 nav regulāra valoda, un to nevar atpazīt ar galīgu determinētu automātu. Patiesībā, galīgs varbūtisks vienvirziena automāts arī nevar atpazīt valodu L_1 . Atpazīšanas problēma rodas tāpēc, ka ir nepieciešams skaitīt nulļu un vieninieku skaitu starpību, un tā nav ierobežota pēc ieejas vārda attiecīgā simbolu skaita nolasīšanas. Ultrametriskiem automātiem var izmantot stāvokļa amplitūdu kā skaitītāju. Valodas L_1 atpazīšanai var uzkonstruēt 3-adisku automātu, kas ir parādīts 3.1. attēlā.



3.1. attēls. 3-adisks automāts valodas L_1 atpazīšanai

Nodemonstrētajā ultrametriskajā automātā un tālākajos piemēros apzīmējumi būs vienādi. Ieejas bultiņa ar skaitli norāda stāvokļa sākuma amplitūdu, un ja bultiņas nav pie attiecīgā stāvokļa, tad stāvoklim sākuma amplitūda ir vienāda ar 0. Uz stāvokļu pāreju bultiņām norādīts ieejas simbols un pēc atdalītājsimbola „|” ir norādīta amplitūda. Varbūtiskiem automātiem apzīmējumi būs līdzīgi (protams, amplitūdu vietā būs varbūtības), bet vizuālajai atšķirībai par atdalītājsimbolu kalpos komats.

Uzkonstrētajam automātam ir viens stāvoklis q_1 , kas ir akceptējošs stāvoklis. Sākumā stāvokļa q_1 amplitūda ir vienāda ar 1. Kad tiek nolasīta nulle, amplitūda tiek reizināta ar 3. Kad automāts saņem vieninieku, amplitūda tiek reizināta ar $\frac{1}{3}$. Viegli var pamanīt, ka ja automāts saņem n nulles, tad stāvokļa q_1 amplitūda tiek pareizināta ar skaitli 3^n , savukārt, saņemot m vieniniekus, stāvokļa amplitūda tiek pareizināta ar $\frac{1}{3^m}$. Pēc vārda, kas sastāv no n

nullēm un m vieniniekiem, nolasīšanas, stāvokļa q_1 amplitūda būs vienāda ar $\frac{3^n}{3^m}$. Ja nulļu un vieninieku skaits sakrīt, tātad, ja $n = m$, tad amplitūda būs vienāda ar 1. Ja $n \neq m$, tad amplitūda būs vienāda ar skaitļa 3 pakāpi, kas atšķiras no 3^0 . Skaitļa 1 p -norma ir vienāda ar 1, un citām skaitļa 3 pakāpēm p -norma būs vienāda ar kādu citu skaitli. Uzstādot akceptēšanas intervālu vienādu ar $[1,1]$, automāts akceptēs tos un tikai tos vārdus, kas sastāv no nullēm un vieniniekiem, un kam nulļu un vieninieku skaits sakrīt.

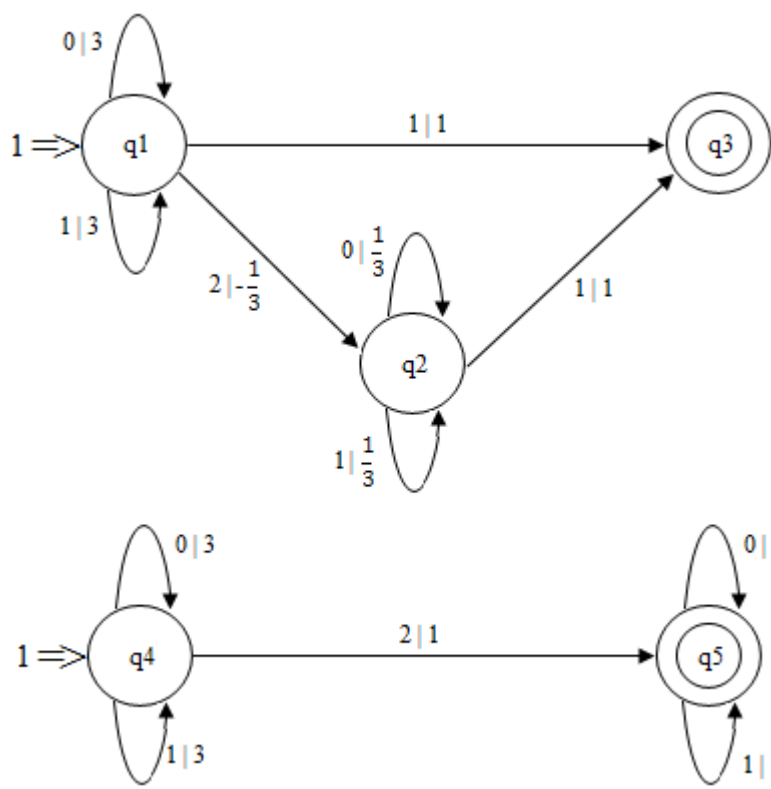
Konstruējot ultrametrisku automātu, kas atpazīst valodu L_1 , skaitļa 3 vietā varēja ņemt jebkuru pirmskaitli p . Tad stāvokļa amplitūda pēc n nulļu un m vieninieku saņemšanas būs vienāda ar $\frac{p^n}{p^m}$, un akceptēšanas nosacījumi paliek tādi paši, kā augstāk apskatītajā piemērā.

Tagad apskatīsim sarežģītāku piemēru, kas norādīs uz citām galīgu ultrametrisku automātu iespējām atpazīstamo valodu klases paplašināšanai. Definēsim valodu $L_2 = w2w^{rev}$, kur $w = \{0,1\}^*$, un w^{rev} ir tāds pats vārds w , tikai visi simboli ir otrādā secībā. Šī valoda arī nevar būt atpazīta ar galīgu determinētu automātu.

Teorēma 1. *Valoda L_2 var būt atpazīta ar ultrametrisku galīgu automātu.*

Pierādījums. Uzkonstruēsim 3-adisku galīgu automātu, kas sastāv no pieciem stāvokļiem. Lai vārds tiktu akceptēts, ir nepieciešams, lai w un w^{rev} garumi būtu vienādi, un lai simbolu secība vārda fragmentā pēc simbola „2” būtu otrāda, salīdzinot ar vārda fragmentu, kas ir pirms simbola „2”. Mēs varam uzkonstruēt 3-adisku automātu ar diviem akceptējošiem stāvokļiem, un katrs no tiem būs atbildīgs par vienu no šiem diviem nosacījumiem. Izveidotais automāts ir parādīts 3.2. attēlā.

3-adisks automāts, kas ir redzams 3.2. attēlā, faktiski sastāv no divām daļām. Apakšējā daļa (stāvokļi q_4 un q_5) pārbauda, vai ieejas vārda simbolu skaits pirms simbola „2” un pēc simbola „2” sakrīt. Amplitūda stāvoklī q_5 pēc vārda nolasīšanas ir vienāda ar $\frac{3^{|w|}}{3^{|w^{rev}|}}$, un būs vienāda ar 1 tad un tikai tad, ja $|w| = |w^{rev}|$.



3.2. attēls. 3-adisks automāts valodas L_2 atpazīšanai

Automāta augšējā daļa pārbauda, vai vieninieku pozīcijas vārda otrajā daļā sakrīt ar vieninieku pozīcijām vārda pirmajā daļā apgrieztajā secībā. Apzīmēsim katru ieejas simbolu ar a_i , kur a_i ir nulle vai vieninieks, un i ir saņemta simbola numurs pēc kārtas. Pirms simbola „2” saņemšanas amplitūda stāvoklī q_3 būs vienāda ar $\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 3^i$, kur n ir simbolu skaits pirms simbola „2” saņemšanas. Savukārt, pēc visu simbolu, kas ir pēc simbola „2”, nolasišanas, stāvokļa q_3 amplitūda tiks samazināta par $\sum_{j=0}^{m-1} a_j * 3^{n-j-1}$, kur j ir simbola numurs pēc kārtas pēc simbola „2”, m ir simbolu skaits pēc simbola „2”, n ir simbolu skaits pirms simbola „2”. Gala rezultātā stāvokļa q_3 amplitūda pēc vārda nolasišanas būs vienāda ar 0 tad un tikai tad, ja vieninieku pozīcijas vārda daļā, kas ir pirms simbola „2” sakrīt ar vieninieku pozīcijām vārda daļā pēc simbola „2”, bet otrādā secībā.

Apskatīsim kā piemēru vārdu „01101210110”. Pirms simbola „2” saņemšanas stāvokļa q_3 amplitūda būs vienāda ar $3^1 + 3^2 + 3^4$. Tālāk, saņemot simbolu „2”, stāvokļa q_2 amplitūda kļūst vienāda ar -3^4 , un, saņemot pirmo vieninieku pēc simbola „2”, stāvokļa q_3 amplitūdai tiks pieskaitīta stāvokļa q_2 amplitūda, tātad, skaitlis -3^4 . Līdzīgi, saņemot atlikušos vārda simbolus, stāvokļa q_3 amplitūda tiks samazināta par 3^2 un par 3^1 , un gala rezultātā amplitūda būs vienāda ar 0.

Uzkonstruētajā 3-adiskajā automātā vārds pieder valodai L_2 tad un tikai tad, ja stāvokļa q_3 amplitūda ir vienāda ar 0, un stāvokļa q_5 amplitūda ir vienāda ar 1. Tas nozīmē, ka vārds

tiek akceptēts, ja akceptējošo stāvokļu amplitūdu p -normu summa ir vienāda ar 1 (stāvokļa q_3 amplitūdas p -norma ir vienāda ar 0, un stāvokļa q_5 amplitūdas p -norma ir vienāda ar 1). Nederīgo vārdu gadījumā amplitūdu p -normu summa nevar sanākt vienāda ar 1, jo:

- ja neizpildās nosacījums par vieninieku pozīcijām, tad stāvokļa q_3 amplitūdas p -norma būs atšķirīga no 0, un būs vienāda ar kādu skaitļa 3 pakāpi;
- ja neizpildās nosacījums par vārda daļu garumu vienādību, tad stāvokļa q_5 amplitūdas p -norma būs vienāda ar kādu skaitļa 3 pakāpi, bet nebūs vienāda ar 1.

Ja neizpildās pirmais nosacījums, tad amplitūdu p -normu summa būs vienāda ar $3^k + 1$. Otrā nosacījuma neizpildes gadījumā amplitūdu p -normu summa būs vienāda ar 3^k , kur $k \neq 0$. Abu nosacījumu neizpildes gadījumā amplitūdu p -normu summa sanāk $3^k + 3^m$, kur $m \neq 0$. Visās apskatītajās situācijās sanāk amplitūdu p -normu summa, kas atšķiras no 1.

□

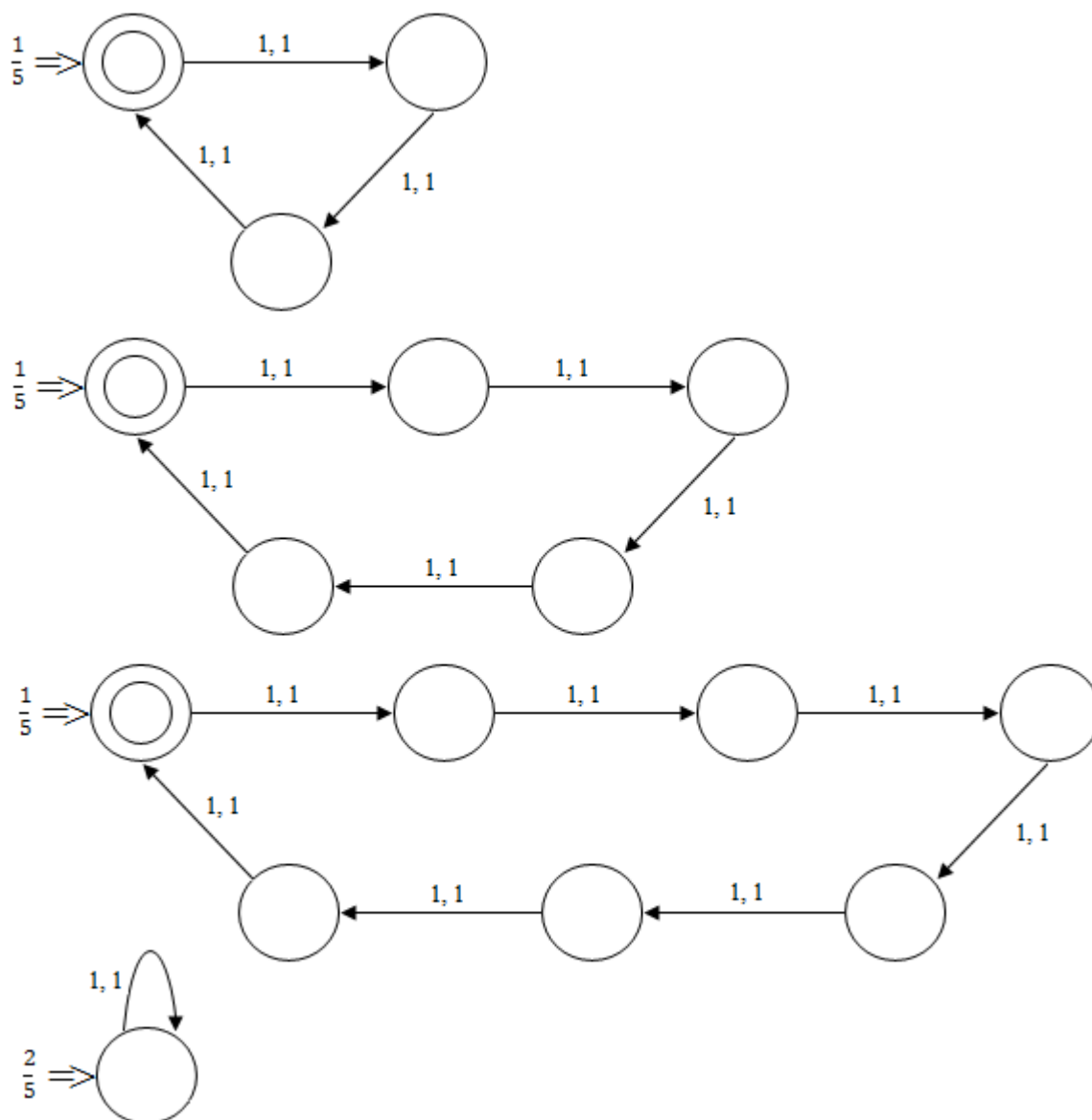
Apskatītā valoda L_2 parāda, ka ultrametriski galīgi automāti paplašina atpazīstamo valodu klasi ne tikai ar spēju skaitīt simbolus, bet arī ar spēju fiksēt un pārbaudīt interesējošo simbolu pozīcijas.

3.2. Nepieciešamo stāvokļu skaita samazināšana

Salīdzinot ar determinētiem galīgiem automātiem, varbūtiski galīgi automāti jau ir labs solis uz priekšu nepieciešamo stāvokļu skaita samazināšanas ziņā. Ar ultrametrisku algoritmu palīdzību var samazināt stāvokļu skaitu vēl stiprāk.

Kā pirmo piemēru apskatīsim viena burta alfabēta valodu L_3 , kura tiek definēta sekojoši: $L_3 = \{1^n \mid n \equiv 0 \pmod{105}\}$. Tātad valodai L_3 pieder tie un tikai tie vārdi, kas sastāv no vieniniekiem, un vieninieku skaits dalās ar 105. Determinētam galīgam automātam ir nepieciešami 105 stāvokļi, jo ir nepieciešams skaitīt vieniniekus pēc moduļa 105.

Varbūtiskajam automātam šo stāvokļu skaitu var samazināt. Mēs varam atsevišķi apskatīt vieninieku skaita dalāmību ar 3, 5 un 7 (jo $105 = 3 * 5 * 7$), un iegūt varbūtisku galīgu automātu ar mazāku stāvokļu skaitu. Varbūtisks automāts ar 16 stāvokļiem, kas noskaidro vārda piederību valodai L_3 pareizi ar varbūtību $\frac{3}{5}$, ir parādīts 3.3. attēlā.

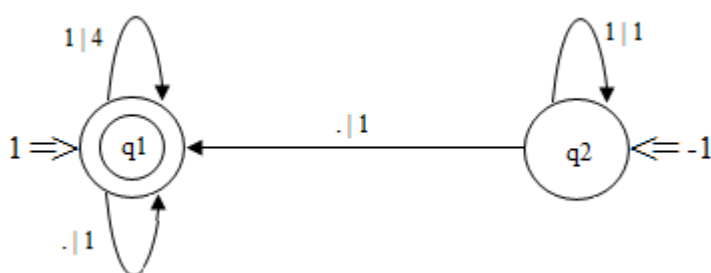


3.3. attēls. varbūtisks automāts valodas L_3 atpazīšanai

Varbūtisks automāts ar varbūtību $\frac{1}{5}$ pārbauda, vai vieninieku skaits dalās ar 3, ar varbūtību $\frac{1}{5}$ pārbauda, vai vieninieku skaits dalās ar 5 un ar varbūtību $\frac{1}{5}$ pārbauda, vai vieninieku skaits dalās ar 7. Ar varbūtību $\frac{2}{5}$ automāts vienkārši noraida ieejas vārdu. Ja vieninieku skaits dalās ar 105, tad ar varbūtību $\frac{3}{5}$ automāts nonāks vienā no 3 dalāmību pārbaudošiem cikliem, un ieejas vārdu akceptēs. Ja vārda garums nedalās kaut ar vienu skaitļa 105 pirmreizinātāju, tad ar varbūtību vismaz $\frac{1}{5}$ automāts nonāks tādā dalāmību pārbaudošā ciklā, kurš vārdu noraidīs. Pieskaitot klāt varbūtību $\frac{2}{5}$ uzreiz noraidīt vārdu, sanāk, ka automāts noraidīs nepareizo vārdu ar varbūtību vismaz $\frac{3}{5}$.

Ultrametriskajam galīgajam automātam pietiek ar 2 stāvokļiem. 1837. gadā Dirihlē pierādīja, ka visiem savstarpējiem pirmskaitļiem a un b aritmētiska progresija $a * n + b$, kur n ir vesels pozitīvs skaitlis, satur bezgalīgi daudz pirmskaitļu [9]. No tā seko, ka katram naturālam skaitlim n eksistē tāds pirmskaitlis p , ka $n \equiv 1(\text{mod } p)$. Skaitlim 105 tāds p ir vienāds ar 211. Skaitļa 211 primitīva sakne ir 2 [10], saskaņā ar Fermā mazo teorēmu [11], $2^{210} \equiv 1(\text{mod } 211)$, tātad, $4^{105} \equiv 1(\text{mod } 211)$.

Var secināt, ka $4^n \equiv 1(\text{mod } 211)$ visiem veseliem n tad un tikai tad, ja n dalās ar 105 bez atlikuma. Pārveidosim valodu L_3 , lai pēc vieninieku virknes saņemšanas mums būtu beigu simbols - punkts. Izveidotais 211-adisks automāts ir redzams 3.4. attēlā.



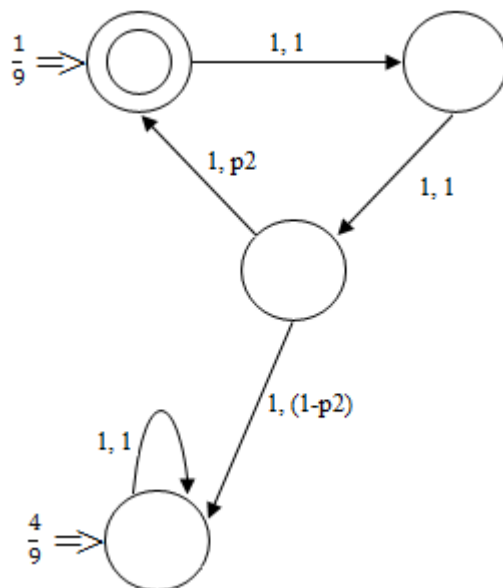
3.4. attēls. 211-adisks automāts valodas L_3 atpazīšanai

Stāvokļa q_1 amplitūda pēc moduļa 211 būs vienāda ar 1 tad un tikai tad, ja pirms punkta saņemšanas vārda garums ir vienāds ar $n * 105$, kur n ir nenegatīvs vesels skaitlis. Pēc punkta saņemšanas stāvokļa q_1 amplitūda tiek samazināta par 1, un tad stāvokļa q_1 amplitūda dalās ar 211. Līdz ar to akceptējošā stāvokļa q_1 amplitūdas p -norma būs mazāka par 1 tad un tikai tad, ja vārds pieder valodai L_3 . Apskatītais piemērs parāda, ka ultrametriskiem galīgiem automātiem ir vēl lielāka priekšrocība stāvokļu skaita samazināšanas ziņā, salīdzinot ar varbūtiskiem galīgiem automātiem.

Rūsiņš Freivalds pierādīja, ka visiem naturāliem n , kas var būt gan pirmskaitļi, gan salikti skaitļi, eksistē ultrametrisks automāts ar diviem stāvokļiem, kas atpazīst viena burta alfabēta valodu, kurā vārda garums dalās ar n [4]. Tas dod jūtamu stāvokļa skaita samazināšanu, ņemot vērā to, ka stāvokļu skaits nav atkarīgs no n .

Tagad apskatīsim citu piemēru. Definēsim valodu, kas sastāv no viena vienīgā vārda, tātad, valoda $L_4 = \{1^n \mid n = 2013\}$. Tā kā mums ir nepieciešama ieejas vārda simbolu skaitīšana, determinētam automātam ir nepieciešami vismaz 2013 stāvokļi (patiesībā, 2014, jo jāskaita 2014. simbols, lai noraidītu pārāk garus vārdus).

Darba autors ir uzkonstruējis varbūtisku galīgu automātu ar 29 stāvokļiem, kas atpazīst valodu L_4 ar varbūtību, kas nedaudz pārsniedz $\frac{1}{2}$. Līdzīgi 3.3. attēlā parādītajam varbūtiskajam automātam, mums būs vairāki cikli, bet šoreiz ar nelielu papildinājumu.



3.5. attēls. varbūtiskā automāta valodas L_4 atpazīšanai fragments

Līdzīgi apskatītajam varbūtiskajam automātam valodas L_3 atpazīšanai, mēs veidosim ciklus, kas pārbauda dalāmību, bet šoreiz, lai ietaupītu stāvokļus, varam pārbaudīt atlikumus pēc dalīšanas ar pašiem mazākiem pirmskaitļiem. Skaitlis 2013 ir vienāds ar sekojošiem skaitļiem pēc pirmskaitļu moduļiem:

- $2013 \equiv 1 \pmod{2}$;
- $2013 \equiv 0 \pmod{3}$;
- $2013 \equiv 3 \pmod{5}$;
- $2013 \equiv 4 \pmod{7}$;
- $2013 \equiv 0 \pmod{11}$.

Minētu pirmskaitļu moduļu kombinācija nav sastopama naturāliem skaitļiem, kas ir mazāki par 2013, jo $2 * 3 * 5 * 7 * 11 = 2310$, un $2310 > 2013$. Tātad veidosim piecus ciklus – garumā 2, 3, 5, 7 un 11 stāvokļi. Tagad akceptējošie stāvokļi nebūs cikla sākumos, bet gan tajās pozīcijās, kur ieejas vārda garums ir vienāds ar nepieciešamo moduli pēc attiecīgā pirmskaitļa. Piemērām, 4. ciklā, ar garumu 7, 5. stāvoklis būs akceptējošs (jo pirmais stāvoklis atbilst nullei pēc moduļa 7, otrais atbilst 1 pēc moduļa 7 utt.). Tagad ir jānodrošina tas, ka ja ieejas vārda garums pārsniedz 2013, automāts nonāks noraidošā stāvoklī ar nepieciešamo varbūtību. 3.5. attēlā ir parādīts fragments ciklam, kas pārbauda, vai $2013 \equiv$

$0 \pmod{3}$, un ar varbūtību $1 - p_2$ pēc katriem 3 nolasītajiem vieniniekiem automāts aiziet noraidošā ciklā.

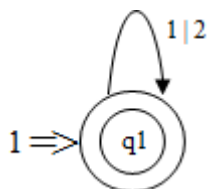
Katram no pirmajiem 5 cikliem ieejas varbūtība (ka tas būs automāta sākumstāvoklis) ir $\frac{1}{9}$, un noraidošām ciklam šī varbūtība ir $\frac{4}{9}$. Varbūtība ieiet kādā ciklā, kur ir akceptējošs stāvoklis, ir $5 * \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$. Tagad ir jāatrod piecas varbūtības, kas nodrošinās savlaicīgu izeju no cikla uz noraidošo stāvokli. Lai tas tā būtu, automātam jāatrodas kādā no cikliem ar akceptējošo stāvokli ar varbūtību, kas ir lielāka par $\frac{1}{2}$, ja tika nolasīts vieninieku skaits, kas nepārsniedz 2013. Ja tika nolasīts lielāks vieninieku skaits, tad varbūtībai atrasties kādā no cikliem ar akceptējošo stāvokli ir jābūt mazākai par $\frac{1}{2}$. $\frac{5}{9} * x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{10}$, tātad, pirms 2013 vieninieku saņemšanas automātam jāpaliek ciklā ar akceptējošo stāvokli ar varbūtību, kas pārsniedz $\frac{9}{10}$, un attiecīgi, pēc lielāka vieninieku skaita nolasīšanas automātam jāpaliek ciklā ar varbūtību, kas ir mazāka par $\frac{9}{10}$.

Tagad skaitļus p_1, p_2, p_3, p_4 un p_5 , kas ir attiecīgi varbūtības iziet no cikliem, kas pārbauda vārda garumu pēc moduļa 2, 3, 5, 7 un 11, ir iespējams aprēķināt:

- $2 * 1006 \leq 2013 < 2 * 1007 \Rightarrow (p_1)^{1006} > 9/10 > (p_1)^{1007}$;
- $3 * 671 \leq 2013 < 3 * 672 \Rightarrow (p_2)^{671} > 9/10 > (p_2)^{672}$;
- $5 * 402 \leq 2013 < 5 * 403 \Rightarrow (p_3)^{402} > 9/10 > (p_3)^{403}$;
- $7 * 287 \leq 2013 < 7 * 288 \Rightarrow (p_4)^{287} > 9/10 > (p_4)^{288}$;
- $11 * 183 \leq 2013 < 11 * 184 \Rightarrow (p_5)^{183} > 9/10 > (p_5)^{184}$.

Apzīmēsim ar ε ļoti mazu pozitīvu skaitli. Izveidotajā automātā mums sanāks, ka vārds 1^{2013} tiks akceptēts ar varbūtību $5 * \frac{1}{9} * \left(\frac{9}{10} + \varepsilon\right) = \frac{5}{2} + \varepsilon$, un, attiecīgi, visi pārējie vārdi tiks noraidīti ar varbūtību $\frac{1}{2} + \varepsilon$.

Ar sarežģītiem aprēķiniem tika dabūts varbūtisks automāts ar $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 1 = 29$ stāvokļiem, kas pazīst valodu L_4 . Uzbūvēt ultrametrisku automātu valodas L_4 atpazīšanai ir daudz vieglāk, pie tam automātam būs tikai viens stāvoklis. Kā piemēru varam izveidot 2-adisku automātu ar vienu stāvokli q_1 , kurš ir akceptējošs. Automāts ir redzams 3.6. attēlā.



3.6. attēls. 2-adisks automāts valodas L_4 atpazīšanai

Stāvokļa q_1 amplitūda pēc vārda nolasīšanas būs vienāda ar 2^n , kur n ir saņemto vieninieku skaits. $\|2^{2013}\|_2 = 2^{-2013}$, tātad ieejas vārds tiks akceptēts tad un tikai tad, ja akceptējošā stāvokļa amplitūdas p -norma pēc vārda nolasīšanas būs vienāda ar 2^{-2013} , pārējos gadījumos vārds tiks noraidīts.

Teorēma 2. *Visiem pirmskaitļiem p eksistē p -ultrametrisks automāts ar vienu stāvokli, kas atpazīst jebkuru viena burta alfabēta valodu, kas sastāv no viena vārda.*

Pierādījums. Veidosim p -ultrametrisku galīgu automātu ar vienu akceptējošo stāvokli, kura sākuma amplitūda ir vienāda ar 1. Saņemot kārtējo ieejas vārda simbolu, stāvokļa amplitūda tiek pareizināta ar p . Ieejas vārds tiek akceptēts tad un tikai tad, ja stāvokļa amplitūdas p -norma būs vienāda ar p^{-m} , kur m ir valodas vienīgā vārda garums. \square

Pierādīto teorēmu var vispārināt plašākai viena burta alfabēta kopai.

Teorēma 3. *Visiem pirmskaitļiem p eksistē p -ultrametrisks automāts ar vienu stāvokli, kas visiem naturālu skaitļu intervāliem $[m, n]$, kur $m \leq n$, atpazīst jebkuru viena burta alfabēta valodu, kurai pieder visi vārdi garumā, kas atrodas intervālā $[m, n]$.*

Pierādījums. Automāts tiks būvēts līdzīgi iepriekšējās teorēmas pierādījumam, atšķirsies vārda akceptēšanas nosacījums. Apzīmēsim valodai piederošu vārdu garumu intervālu ar $[m, n]$, kur $m \leq n$. Ieejas vārds tiek akceptēts tad un tikai tad, ja stāvokļa amplitūdas p -norma atradīsies intervālā $[p^{-n}, p^{-m}]$, kur $[m, n]$ ir valodas vārdu garumu intervāls. \square

Agrāk tika apskatīts piemērs, kas uzskatāmi parāda stāvokļu skaita atšķirību starp determinētiem un ultrametriskiem automātiem. Apskatītai valodai ir nodefinēts m elementu kortežs $w = \{0, 1, \dots, k - 1\}^m$ (katrs korteža elements ir vesels skaitlis starp 0 un $k - 1$). Ir nodefinētas divas darbības ar kortežu w :

- $f_a(w_1, w_2, \dots, w_m) = (w_m, w_1, w_2, \dots, w_{m-1})$, tātad, darbība, kuras rezultātā katrs elements pārbīdās vienu vietu pa labi;
- $f_b(w_1, w_2, \dots, w_m) = (w_1 + 1(\text{mod } k), w_2, \dots, w_m)$. Šīs darbības rezultātā korteža pirmajam elementam tiek pieskaitīts 1 pēc moduļa k .

Tika definēta valoda $L_{k,m} = \{x \in \{a, b\}^* \mid f_x(0^m) = 0^m\}$, kur m ir korteža w elementu skaits, k ir parametrs, kas nosaka korteža elementa maksimālo vērtību $k - 1$. Valodai pieder

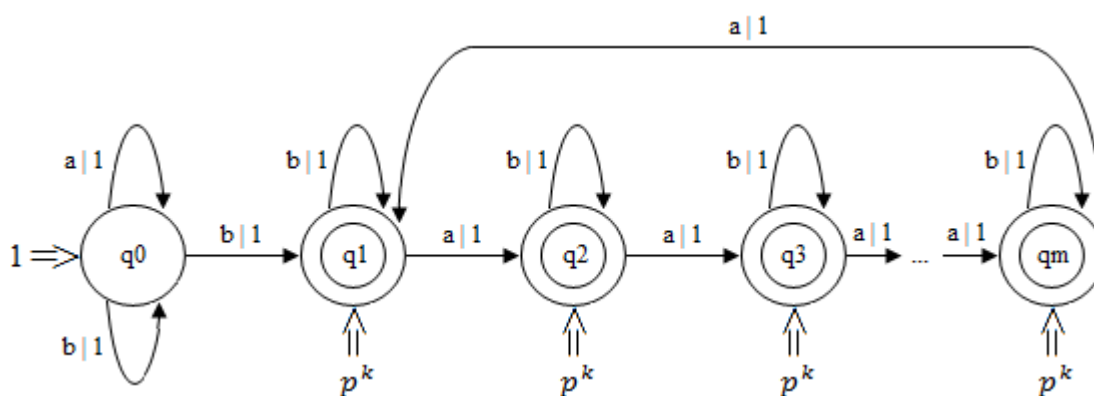
tie un tikai tie vārdi x , kas sastāv no simboliem a un b ar sekojošu īpašību: ja sākotnējam kortežam, kas sastāv no m nullēm, veikt darbības f_a un f_b tādā pašā secībā, kādā atrodas ieejas vārda simboli a un b , pēc darbību veikšanas tiks iegūts kortežs, kas sastāv no m nullēm [12].

Tika pierādīts, ka determinētam galīgam automātam valodas $L_{k,m}$ atpazīšanai ir nepieciešami k^m stāvokļi, savukārt, visiem pirmskaitļiem p eksistē p -ultrametriskais galīgs automāts ar $k * m$ stāvokļiem, kas atpazīst valodu $L_{k,m}$. Vēl vairāk, ja p ir pirmskaitlis, kas ir lielāks par m , ir iespējams izveidot p -ultrametrisku galīgu automātu ar $m + 1$ stāvokli, kas atpazīst valodu $L_{p^k,m}$ [12]. Tas parāda, ka salīdzinot ar determinētu galīgu automātu, ultrametriskam galīgam automātam ir iespējams samazināt stāvokļu skaitu no eksponenciālā uz lineāru.

Apskatīsim vēl vienu iespēju stāvokļu skaita samazināšanai valodas $L_{k,m}$ atpazīšanai.

Teorēma 4. *Visiem pirmskaitļiem p visiem veseliem pozitīviem skaitļiem k , ja $m \leq p$, ir iespējams izveidot p -ultrametrisku galīgu automātu ar $m + 1$ stāvokli, kas atpazīst valodu $L_{p^k,m}$.*

Pierādījums. 3.7. attēlā ir parādīts iespējamais p -ultrametriskais galīgs automāts ar $m + 1$ stāvokli. Automātam ir m akceptējoši stāvokļi, un katrs no tiem reprezentē vienu no m korteža elementiem un sāk darbu ar amplitūdu p^k . Kad tiek nolasīts simbols a , akceptējošiem stāvokļiem mainās amplitūda – visiem veseliem $2 \leq i \leq m$ stāvokļa q_i amplitūda kļūst vienāda ar stāvokļa q_{i-1} amplitūdu, bet stāvokļa q_1 amplitūda kļūst vienāda ar stāvokļa q_m amplitūdu. Citiem vārdiem akceptējošiem stāvokļiem amplitūdas pārbīdās vienu vietu pa labi.



3.7. attēls. p -ultrametriskais automāts valodas $L_{p^k,m}$ atpazīšanai

Kad tiek nolasīts simbols b , stāvokļa q_1 amplitūdai tiek pieskaitīts 1. Tas reprezentē 1 pieskaitīšanu korteža pirmajam elementam. Ja visiem akceptējošiem stāvokļiem pēc vārda

nolasīšanas amplitūdas dalās ar p^k , tad vārds pieder valodai $L_{p^k, m}$, jo tas nozīmē, ka visi korteža elementi ir vienādi ar 0 pēc moduļa p^k . Tātad, katra akceptējošā stāvokļa amplitūdas p -normai jābūt vienāgai ar vai mazākai par $\frac{1}{p^k}$. Ja kāda akceptējošā stāvokļa amplitūdai šis nosacījums neizpildās, tad tā p -norma būs vienāda ar vai lielāka par $\frac{1}{p^{k-1}}$. Šādā gadījumā visu akceptējošo stāvokļu amplitūdu p -normu summa būs lielāka par $\frac{1}{p^{k-1}}$, jo pārējiem akceptējošiem stāvokļiem amplitūdu p -normas vienmēr ir lielākas par 0 (jo amplitūda ir vienāda ar pozitīvu veselu skaitli). Līdz ar to ieejas vārds tiek akceptēts tad un tikai tad, ja akceptējošo stāvokļu amplitūdu p -normu summa ir mazāka par vai vienāda ar $\frac{m}{p^k}$. \square

Nodaļā apskatītie piemēri parāda, ka ultrametriskiem galīgiem automātiem ir liels potenciāls nepieciešamo stāvokļu skaita samazināšanai.

4. DAŽĀDU TIPU ULTRAMETRISKI AUTOMĀTI

Iepriekšējā nodaļā tika apskatīti vienvirziena ultrametriski galīgi automāti. Šajā nodaļā tiks apskatītas ultrametrisko algoritmu iespējas citiem automātu tipiem.

4.1. Vienvirziena galīgi automāti ar vairākām galviņām

Galīgi automāti ar vairākām galviņām ir līdzīgi galīgiem automātiem ar vienu galviņu. Atšķiršies pārejas funkcija, tā būs sekojošā formā: $S \times (A \cup \{\vdash, \dashv\})^k \rightarrow S \times \{-1, 0, 1\}^k$, kur k ir galviņu skaits, S ir stāvokļu kopa, A ir ieejas alfabēts, \vdash ir vārda sākuma marķieris, \dashv ir vārda beigu marķieris. $\{-1, 0, 1\}^k$ nozīmē, ka katra no k galviņām var:

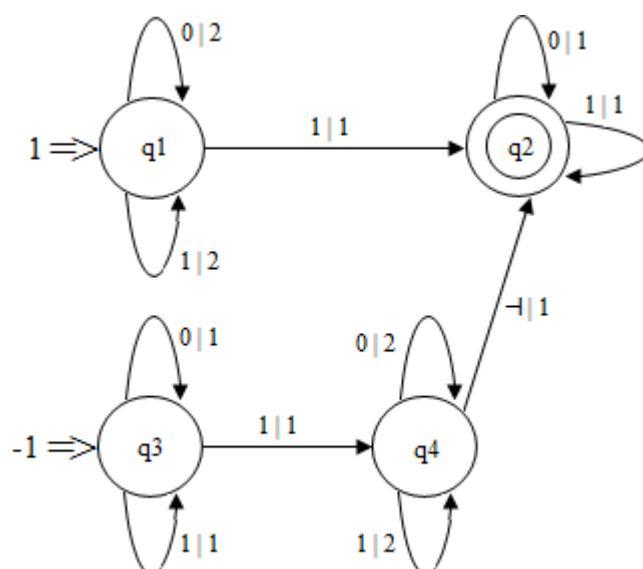
- pārvietoties par vienu ieejas vārda simbolu pa kreisi, ja ir -1;
- palikt uz vietas, ja ir 0;
- pārvietoties par vienu ieejas vārda simbolu pa labi, ja ir 1.

Ja galviņa atrodas uz vārda sākuma marķiera, tad tā nevar pārvietoties pa kreisi, attiecīgi, galviņa nevar pārvietoties pa labi, ja tā atrodas uz vārda beigu marķiera [13].

Apskatīsim valodu L_5 , kas sastāv no visiem tiem un tikai tiem vārdiem w , kur $w = \{0, 1\}^*$, $w = w^{rev}$, w ir nepāra garumā un vārdam pa vidu ir vieninieks. Valodas L_5 atpazīšanai ar vienvirziena ultrametrisku galīgu automātu ar vienu galviņu parādās grūtības ar vārda vidus noteikšanu. Ja automātam ir divas galviņas, tad vārda vidus noteikšana nesastāda nekādas problēmas.

Teorēma 5. *Eksistē ultrametrisks vienvirziena galīgs automāts ar divām galviņām, kas atpazīst valodu L_5 .*

Pierādījums. Izveidosim 2-adisku galīgu automātu ar divām galviņām. Sāksim ar to, ka apskatīsim katras galviņas uzvedību atsevišķi. Pārvietosim pirmo galviņu līdz vārda beigām, pārbaudot, vai vārds ir palindroms. 4.1. attēlā ir parādīti stāvokļi, kas realizē šo pārbaudi.



4.1. attēls. valodas L_5 atpazīstošā 2-adiskā automāta fragments

Automāta pirmā galviņa pārbauda, vai $w = w^{rev}$, tātad, vai ieejas vārds ir palindroms. Apzīmējot katru ieejas simbolu ar a_i , kur a_i ir nulle vai vieninieks, un i ir saņemtā simbola numurs pēc kārtas, pirms vārda beigu pazīmes saņemšanas (vārda beigu marķieris) amplitūda stāvoklī q_2 būs vienāda ar $\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 2^i$, kur n ir vārda garums. Savukārt, pirms vārda beigu pazīmes saņemšanas amplitūda stāvoklī q_4 būs vienāda ar $-\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 2^{n-i-1}$. Pēc vārda beigu pazīmes saņemšanas stāvokļa q_4 amplitūda tiek pieskaitīta stāvokļa q_2 amplitūdai, un tā būs vienāda ar 0 tad un tikai tad, ja ieejas vārds bija palindroms, un tad amplitūdas p -norma būs vienāda ar 0. Ja vārds nebūs palindroms, tad stāvokļa q_2 amplitūdas p -norma būs mazāka par 1, bet lielāka par 0, jo saskaitāmajos, kas veidos stāvokļa q_2 amplitūdu, noteikti būs kāda pozitīva divnieka pakāpe.

Ar otrās galviņas palīdzību mēs noskaidrosim vārda vidu, kā arī, ar abu galviņu mijiedarbības palīdzību spēsīm noskaidrot, vai vārds ir nepāra garumā. Sākumā abas galviņas nolasa pirmo simbolu. Tad pirmā galviņa nolasa divus ieejas vārda simbolus, un pēc tam otrā galviņa nolasa vienu simbolu un tā līdz vārda beigām. Ja pēc tam, kad otrā galviņa nolasīja vienu simbolu, pirmā galviņa sastop vārda beigās, tad vārds ir nepāra garumā, un otrā galviņa atrodas vārda vidū. Bet ja pēc tam, kad otrā galviņa nolasīja vienu simbolu, pirmā galviņa nolasa vienu simbolu un sastop vārda beigās, tas nozīmēs, ka vārds ir pāra garuma, un vārds tiks noraidīts.

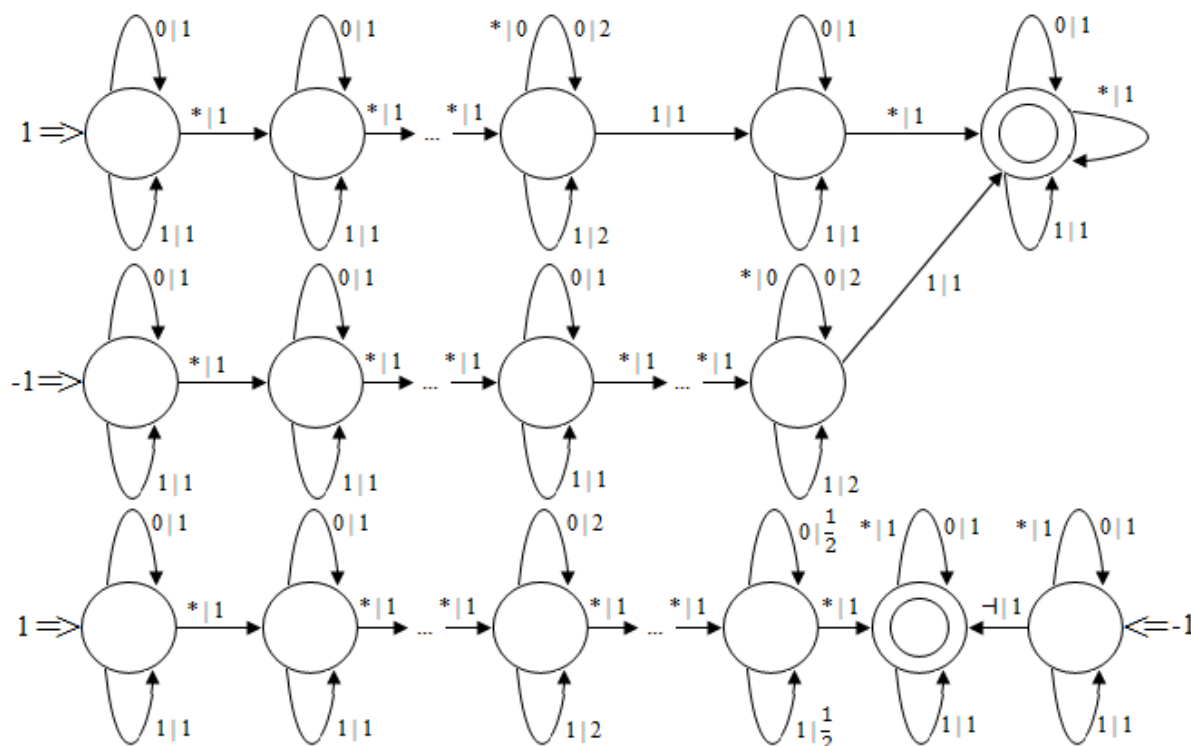
Kad ir nolasīts nepāra garuma ieejas vārds, un otrā galviņa veiksmīgi atrodas vārda vidū, tad, nolasot ieejas simbolu, akceptējošām stāvoklim q_k , kuram sākuma amplitūda ir 0, tiek pieskaitīta 0, ja nolasītais simbols ir vieninieks, un tiek pieskaitīta $\frac{1}{2}$, ja nolasītais simbols

ir nulle. $\left\| \frac{1}{2} \right\|_p = 2$, un abu akceptējošo stāvokļu p -normu summa būs vienāda ar 0 tad un tikai tad, ja vārds pieder valodai L_5 . \square

Ir pierādīts, ka determinētiem un nedeterminētiem vienvirziena galīgiem automātiem valodu klase, ko atpazīst automāts ar $k + 1$ galviņu ir plašākā par valodu klasi, ko atpazīst automāts ar k galviņām, visiem naturāliem $k \geq 1$ [13]. Tas tika pierādīts ar valodas L_b palīdzību, kura tiek definēta visiem veseliem pozitīviem skaitļiem b sekojošā veidā: $L_b = \{w_1 * w_2 * \dots * w_{2b} \mid (w_i \in \{0,1\}^*) \wedge (w_i = w_{2b+1-i}) \text{ visiem } 1 \leq i \leq 2b\}$. Tas bija pierādīts ar teorēmas palīdzību, kura pasaka, ka determinēts un nedeterminēts vienvirziena galīgs automāts ar k galviņām atpazīst valodu L_b tad un tikai tad, ja $b \leq C_k^2$ [14].

Teorēma 6. Visiem veseliem $k \geq 1$, visiem pirmskaitļiem p eksistē valodas, kuras nevar atpazīt ar galīgu determinētu vai nedeterminētu vienvirziena automātu ar k galviņām, bet var atpazīt ar p -ultrametrisku galīgu vienvirziena automātu ar vienu galviņu.

Pierādījums. Izveidosim galīgu 2-adisku automātu, kas atpazīst valodu L_b . Katram $1 \leq i \leq b$ izveidosim stāvokļu kopu, kas pārbauda attiecīgā vārda fragmentu pāra vienādību, tātad, vai $w_i = w_{2b+1-i}$. Automāta fragments vienam tādām pārim ir parādīts 4.2. attēlā.



4.2. attēls. valodu L_b atpazīstoša 2-adiskā automāta fragments

Attēlā apakšējā rindā notiek attiecīgā vārda fragmentu pāra pārbaude uz garumu vienādību. Sākotnējā amplitūda ir 1. Kad automāts tiek pie attiecīgā w_i fragmenta nolasīšanas,

katrs fragmenta simbols pareizina amplitūdu ar 2. Tad automāts dodas pa stāvokļu virkni tālāk, līdz attiecīgā fragmenta w_{2b+1-i} sastapšanai, kuru lasot, katrs simbols dala amplitūdu ar 2. Amplitūda būs vienāda ar 1 tad un tikai tad, ja fragmentu garumi bija vienādi. Tad, nolasot vārdu līdz beigām, amplitūdai tiek pieskaitīts -1, lai akceptējošā stāvokļa amplitūda būtu vienāda ar 0, ja nosacījums izpildās.

Augšējās divas stāvokļu rindas nodrošina attiecīgā fragmentu pāra w_i un w_{2b+1-i} pārbaudi uz vieninieku pozīciju sakritību. Pirmajā rindā automāts staigā pa stāvokļiem līdz fragmenta w_i sastapšanai. Tad nākamajā stāvoklī tiek saskaitīti vieninieki un to pozīcijas, un amplitūda pēc fragmenta nolasīšanas kļūst vienāda ar $\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 2^i$, kur n ir fragmenta garums, un a_i ir vienāds ar 1, ja i -tais simbols bija vieninieks, citādi a_i ir vienāds ar 0. Pēc fragmenta nolasīšanas summa tiek saglabāta akceptējošā stāvoklī. Otrā stāvokļu rinda līdzīgi nodrošina fragmenta w_{2b+1-i} atrašanu, un tad no akceptējošā stāvokļa līdzīgā veidā tiek atņemta summa $\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 2^i$. Gala rezultātā akceptējošā stāvokļa amplitūda būs vienāda ar 0 tad un tikai tad, ja abos fragmentos vieninieku pozīcijas bija vienādas.

Pēc vārda nolasīšanas, ja abi nosacījumi izpildās, tātad, ja vārda fragmenti w_i un w_{2b+1-i} ir vienādi, tad abos akceptējošos stāvokļos amplitūdas būs vienādas ar 0, tātad, akceptējošo stāvokļu amplitūdu p -normu summa būs vienāda ar 0 tad un tikai tad, ja $w_i = w_{2b+1-i}$. Citādi akceptējošo stāvokļu amplitūdu p -normu summa būs vienāda ar kādu pozitīvu skaitli.

Katram fragmentu pārim w_i un w_{2b+1-i} tiks veiktas tādas pašas pārbaudes uz vienādību, tikai stāvokļu kopās atšķirsies stāvokļu skaits, kas nodrošina interesējošo fragmentu atrašanu. Līdzīgā veidā akceptējošo stāvokļu amplitūdu p -normu summa būs vienāda ar 0 tad un tikai tad, ja interesējošie vārda fragmenti ir vienādi, citādi amplitūdu p -normu summa būs vienāda ar kādu pozitīvu skaitli. Saskaitot visu tādu stāvokļu kopu akceptējošo stāvokļu amplitūdu p -normas mēs iegūsim 0 tad un tikai tad, ja vārds pieder valodai L_b . Šādā veidā varam uzkonstruēt 2-adisku automātu valodas L_b atpazīšanai katram pozitīvam skaitlim b , bet, paņemot skaitli b par lielu, respektīvi, $b > C_k^2$, determinētam vai nedeterminētam automātam ar k galviņām nebūs iespējas atpazīt valodu L_b .

Lai teorēma būtu spēkā visiem pirmskaitļiem p , konstruējot p -ultrametrisku automātu tajās vietās, kur notika reizināšana un dalīšana ar 2, varēja ņemt pirmskaitli p skaitļa 2 vietā. Tātad, teorēma ir pierādīta visiem pirmskaitļiem p . □

Patiesībā, valodu kopu, ko var atpazīt ar p -ultrametrisku galīgu vienvirziena automātu ar vienu galviņu, bet nevar ar determinētu vai nedeterminētu galīgu vienvirziena automātu ar patvaļīgu galviņu skaitu, var viegli paplašināt. Definējot valodas, var par pamatu paņemt

valodu L_b , bet tagad katru fragmentu w_i veidos nevis divu burtu alfabēts $\{0,1\}$, bet n burtu alfabēts. Situācija būs līdzīga valodai L_b , bet tagad p -ultrametriskajam automātam vajadzēs palielināt stāvokļu skaitu, tātad, veicot pārbaudi uz simbolu pozīciju sakritību fragmentu pāros, pārbaudīt $n - 1$ ieejas alfabēta burtus viena burta vietā (apskatītajā piemērā tas bija vieninieks).

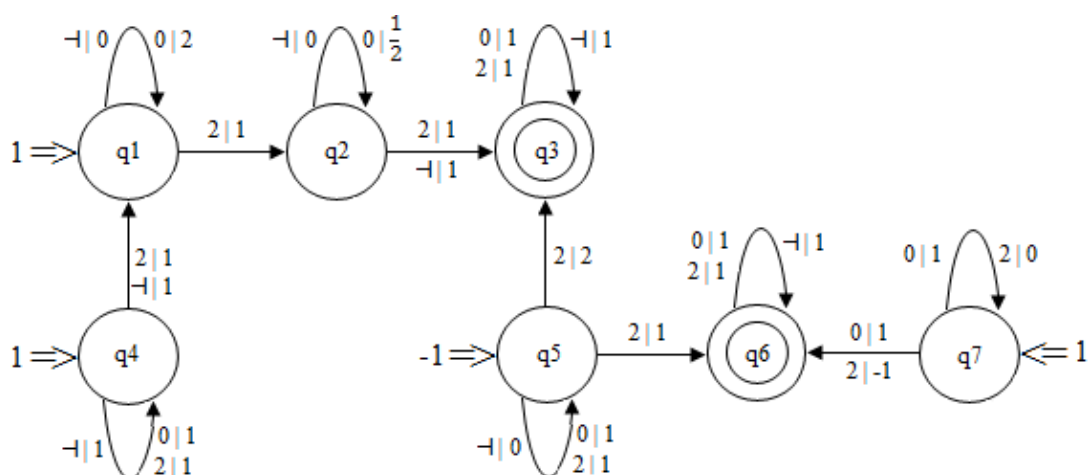
4.2. Ultrametriski divvirzienu galīgi automāti

Divvirzienu ultrametriski galīgi automāti, atšķirībā no vienvirziena automātiem, var staigāt pa ieejas vārdu abos virzienos, kas dod iespēju gan lasīt vārdu vairākas reizes, gan lasīt vārdu arī no labās puses uz kreiso. Pirms vārda sākuma uz ieejas vārda lentes ir vārda sākuma marķieris \vdash , un pēc vārda beigām ir vārda beigu marķieris \dashv . Divvirzienu galīgi automāti ir līdzīgi Tjūringa mašīnām ar vienu lentu, uz kuras ir ieejas vārds, un uz kuras nedrīkst rakstīt, tātad, Tjūringa mašīna, kura var tikai lasīt [15].

Iespēja lasīt ieejas vārdu abos virzienos atvieglo domāšanu algoritma veidošanā un algoritma uztveri. Piemērām, lai noskaidrotu, vai vārds ir palindroms, mums nebūs nepieciešamības vienlaikus skaitīt simbolu pozīcijas un apgrieztās simbolu pozīcijas. Mēs varēsim vienkārši salīdzināt vārda simbolu pozīcijas sakritību, lasot vārdu vienā un otrā virzienā.

Teorēma 7. *Eksistē valoda, kuras atpazīšanai ar divvirzienu ultrametrisku galīgu automātu ir nepieciešams mazāks stāvokļu skaits, nekā vienvirziena ultrametriskajam galīgajam automātam, ja abiem automātiem ir izmantoti vienādi valodas atpazīšanas kritēriji.*

Pierādījums. Apskatīsim valodu L_6 , kura izskatās sekojoši: $L_6 = \{0^n 20^n 20^n 2 \dots 20^n\}$, kur segmentu 0^n skaits ir vienāds ar n . Valodas L_6 atpazīšanai izveidosim divvirzienu ultrametrisku galīgu automātu. Izveidotais 2-adisks automāts ir parādīts 4.3. attēlā.



4.3. attēls. 2-adisks divvirzienu automāts valodas L_6 atpazīšanai

Akceptējošs stāvoklis q_6 ir atbildīgs par pirmā nulļu masīva 0^n garuma un nulļu masīvu skaita vienādības pārbaudi. Kad tiek ielasīta nulle, stāvokļa q_6 amplitūdai tiek pieskaitīta stāvokļa q_7 amplitūda, tātad, ja pirmajā nulļu masīvā bija n nulles, stāvokļa q_6 amplitūda kļūs vienāda ar n . Ja pirmajā nulļu masīvā bija n nulles, tad vārdam jāsaturs $n - 1$ divnieks, tāpēc pēc pirmā divnieka nolasīšanas no stāvokļa q_6 amplitūdas tiek atņemts vieninieks. Tātad, stāvokļa q_6 amplitūda kļūst vienāda ar $n - 1$. Lasot vārdu no kreisās puses uz labo, nolasot katru divnieku, no stāvokļa q_6 amplitūdas tiek atņemts vieninieks (jo pieskaita stāvokļa q_5 amplitūdu). Kad vārds ir pilnīgi nolasīts no kreisās puses uz labo, stāvokļa q_6 amplitūda būs vienāda ar 0 tad un tikai tad, ja pirmā nulļu masīva garums ir vienāds ar nulļu masīvu skaitu.

Stāvokļa q_3 uzdevums ir nodrošināt masīvu garumu vienādības pārbaudi. Kad ir nolasīts pirmais nulļu masīvs, stāvokļa q_1 amplitūda kļūst vienāda ar 2^n , kur n – nolasīto nulļu skaits. Pārejot pie nākamā nulļu masīva, stāvokļa q_2 amplitūda kļūst vienāda ar stāvokļa q_1 amplitūdu, bet stāvokļa q_1 amplitūda kļūst vienāda ar 1. Nolasot nākamo nulļu masīvu (apzīmēsim tā garumu ar m), stāvokļa q_1 amplitūda kļūst vienāda ar 2^m un stāvokļa q_2 amplitūda kļūst vienāda ar 2^{n-m} . Tad stāvokļa q_2 amplitūda tiek pieskaitīta stāvokļa q_3 amplitūdai. Aprakstīta skaitīšana tiek veikta katru divu blakus esošo nulļu masīvu garumu vienādības pārbaudei (respektīvi, pārbauda 1. un 2. nulļu masīva garumu vienādību, 2. un 3., ..., $(n - 1)$. un n . masīva garumu vienādību). Ja visi nulļu masīvi bija vienāda garuma, tad stāvokļa q_3 amplitūdai kopā tiek pieskaitīts skaitlis $n - 1$ pēc vārda nolasīšanas no kreisās puses uz labo.

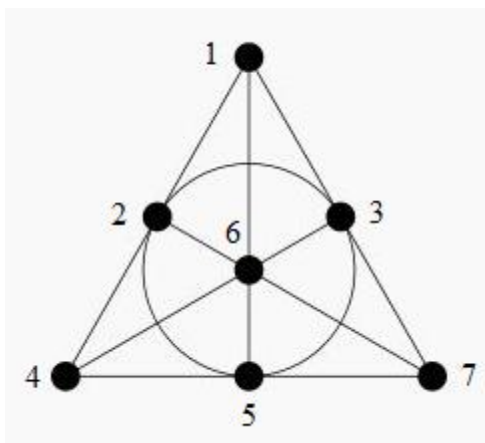
Kad vārds ir nolasīts līdz galam no kreisās puses uz labo, automāts veic atkārtotu nulļu masīvu garumu pārbaudi, šoreiz lasot vārdu no labās puses uz kreiso. Tādā pašā veidā tiek salīdzināti n . un $(n - 1)$. masīva garumi, $(n - 1)$. un $(n - 2)$., ..., 2. un 1. masīva garumi. Līdz ar to katru divu blakus esošo nulļu masīvu garumi tiek salīdzināti divas reizes.

Apskatītie ultrametriski automāti valodas L_6 atpazīšanai parāda, ka divvirzienu ultrametriskajam galīgajam automātam var būt nepieciešams mazāks stāvokļu skaits, salīdzinot ar vienvirziena analogu. \square

Izveidosim un apskatīsim valodu, kas balstās uz galīgām projektīvām plaknēm. Galīga projektīva plakne ir galīga punktu kopa un taisņu kopa, ar sekojošām īpašībām [16]:

- katras divas taisnes krustojas tieši vienā vienīgā punktā;
- katri divi punkti pieder tieši vienai taisnei;
- eksistē četri punkti, no kuriem nekādi trīs neatrodas uz vienas taisnes.

m -tās pakāpes projektīva plakne sastāv no $m^2 + m + 1$ punkta, $m^2 + m + 1$ taisnes, un uz katras taisnes atrodas tieši $m + 1$ punkts. FANO plakne ir 2. pakāpes projektīva plakne un sastāv no 7 punktiem un 7 taisnēm. Kā izskatās FANO plakne var redzēt 4.5. attēlā. Riņķa līnija reprezentē taisni. Var redzēt, ka katra no 7 taisnēm satur tieši 3 punktus.



4.5. attēls. FANO plakne

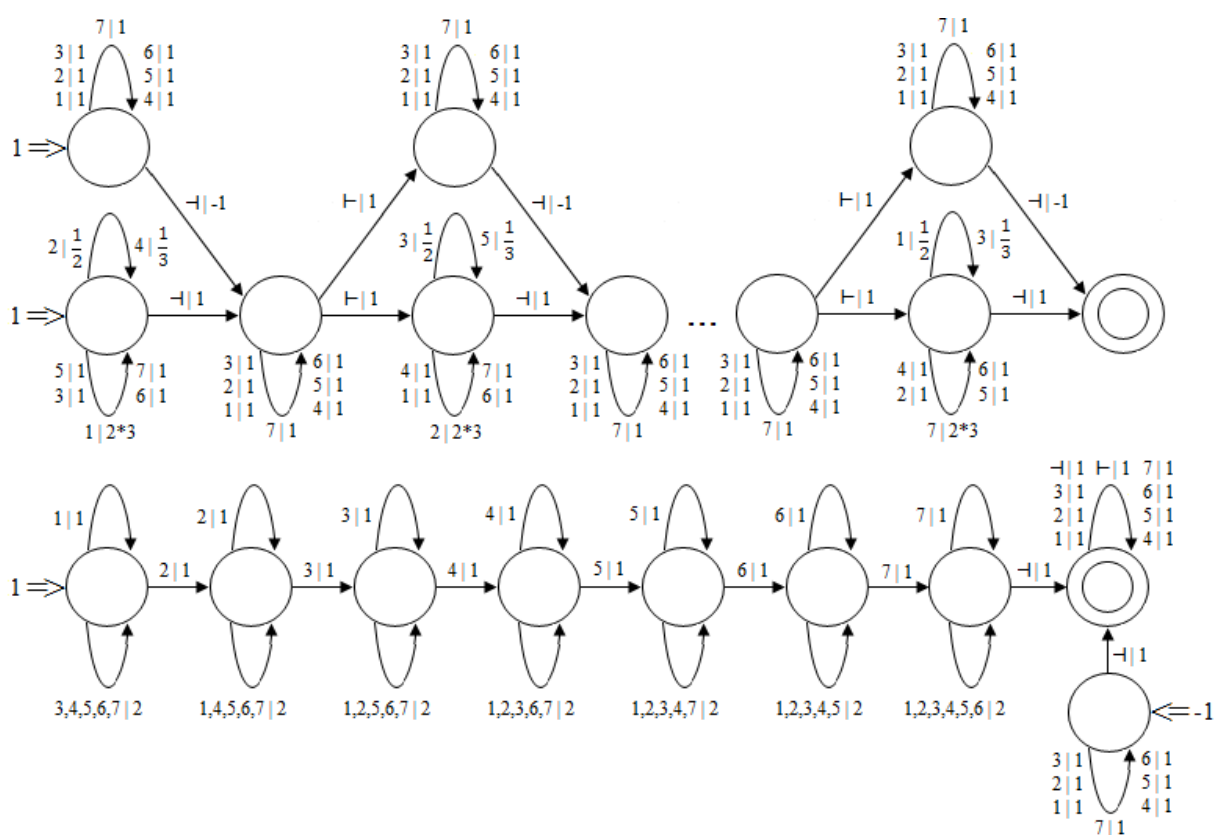
Pieņemsim, ka katrā no 7 FANO plaknes virsotnēm ir ierakstīts pozitīvs vesels skaitlis. Uzdevums ir noskaidrot, vai eksistē tāda taisne, uz kuras atrodas virsotnes, kurās ir ierakstīti vienādi skaitļi. Definēsim valodu L_7 sekojošā veidā: $L_7 = \{1^{n_1} 2^{n_2} 3^{n_3} 4^{n_4} 5^{n_5} 6^{n_6} 7^{n_7} | (n_i > 0 \text{ visiem } 1 \leq i \leq 7) \wedge ((n_1 = n_2 = n_4) \vee (n_2 = n_3 = n_5) \vee (n_3 = n_4 = n_6) \vee (n_4 = n_5 = n_7) \vee (n_5 = n_6 = n_1) \vee (n_6 = n_7 = n_2) \vee (n_7 = n_1 = n_3))\}$, kur katram veselim $1 \leq i \leq 7$ vārda fragments i^{n_i} reprezentē skaitli, kas ir ierakstīts i . virsotnē. Virsotņu numerācija sakrīt ar 4.5. attēlā parādīto.

Teorēma 8. *Eksistē ultrametrisks divvirzienu galīgs automāts, kas atpazīst valodu L_7 .*

Pierādījums. Lai atpazītu valodu L_7 , pirmkārt, ir jāpārlicinās, ka divnieki iet tieši aiz vieniniekiem, trijnieki aiz divniekiem, ..., septiņnieki aiz sešiniekiem. Otrkārt, jāpārbauda, vai

eksistē tādi trīs simboli, kuri reprezentē vienu taisni, un kuru skaits sakrīt. Izveidosim 5-adisku galīgu automātu valodas L_7 pazīšanai. Automāts ir redzams 4.6. attēlā.

Apakšēja stāvokļu rinda nodrošina pārbaudi uz simbolu secību (ka vārda simboli atrodas nedilstošā secībā, un katrs simbols parādās vismaz vienu reizi). Sākumā amplitūda ir vienāda ar 1. Kad vārds tiek lasīts pirmo reizi, staigājot pa stāvokļiem automāts pārbauda, vai nosacījums izpildās. Ja kaut kur parādās neparedzēts simbols, amplitūda tiek pareizināta ar 2. Kad tiek nolasīta vārda beigu pazīme, no akceptējošā stāvokļa amplitūdas tiek atņemts 1. Ja nosacījums izpildās, akceptējošā stāvokļa amplitūda būs vienāda ar 0, tātad, arī amplitūdas p -norma būs vienāda ar 0. Citādi akceptējošā stāvokļa amplitūda būs vienāda ar kādu citu skaitli ($2^n - 1$, kur n ir pozitīvs vesels skaitlis), un p -norma būs lielāka par 0.



4.6. attēls. 5-adisks divvirzienu automāts valodas L_7 atpazīšanai

Attēla augšējā daļā atrodas stāvokļi, kas pārbauda, vai eksistē taisne, kuras visās trīs virsotnēs ir ierakstīti vienādi skaitļi. Aprakstīšanai nosauksim attēla augšējās daļas stāvokļus, kas atrodas augšā, par pirmās rindīņas stāvokļiem, un atlikušo stāvokļu rindīņu par otrās rindīņas stāvokļiem. Abas stāvokļu rindīņas sāk darbu ar amplitūdu 1. Sākumā tiek pārbaudīta pirmā taisne, tātad, vai $n_1 = n_2 = n_4$. Pēc vārda nolasīšanas otrās rindīņas stāvokļa amplitūda kļūst vienāda ar $2^{n_1 - n_2} * 3^{n_1 - n_4}$. Šī amplitūda ir vienāda ar 1 tad un tikai tad, ja $n_1 = n_2 =$

n_4 . Kad tiek nolasīta vārda beigu pazīme, no otrajā rindiņā iegūtās amplitūdas tiek atņemta pirmās rindiņas amplitūda. Apzīmēsim rezultātā iegūto amplitūdu ar x . Ja $n_1 = n_2 = n_4$, tad $x = 0$, citādi x būs vienāds ar kādu citu skaitli.

Tālāk automāta galviņa tiek pārvietota vārda sākumā, un pirmās un otrās rindiņas amplitūdas kļūst vienādas ar x . Tagad tiek pārbaudīta otra taisne, tātad, vai $n_2 = n_3 = n_5$. Līdzīgi pirmās taisnes pārbaudei, pēc vārda nolasīšanas otrās rindiņas stāvokļa amplitūda būs vienāda ar $x * 2^{n_2-n_3} * 3^{n_2-n_5}$. Kad tiek nolasīta vārda beigu pazīme, no otrajā rindiņā iegūtās amplitūdas tiek atņemta pirmās rindiņas amplitūda – skaitlis x . Ja $n_2 = n_3 = n_5$, tad $2^{n_2-n_3} * 3^{n_2-n_5} = 1$, un rezultātā iegūtā amplitūda kļūst vienāda ar $x - x = 0$. Ja apskatot pirmo taisni tika secināts, ka $n_1 = n_2 = n_4$, tad $x = 0$ un gala rezultātā amplitūda kļūst vienāda ar 0.

Automāts tālāk pārbauda katru no 7 taisnēm pēc kārtas, un ja kādā pārbaudē tika secināts, ka taisnei pieder trīs punkti, kuros ierakstīti vienādi skaitļi, tad rezultātu amplitūda tālākajās pārbaudēs būs vienmēr vienāda ar 0. Pēc septītās taisnes pārbaudes automāts ar rezultāta amplitūdu nonāk akceptējošā stāvoklī. Akceptējošā stāvokļa amplitūda būs vienāda ar 0 tad un tikai tad, ja eksistē tāda taisne, kurai pieder trīs punkti, kuros ierakstīti vienādi skaitļi. Citādi amplitūda būs vienāda ar kādu citu skaitli.

Ja abi apskatītie nosacījumi izpildās, tad abu akceptējošo stāvokļu amplitūdas būs vienādas ar 0, un akceptējošo stāvokļu amplitūdu p -normu summa būs vienāda ar 0. Ja kaut viens no nosacījumiem neizpildīsies, kāda akceptējošā stāvokļa amplitūdas p -norma būs lielāka par 0, tātad, arī p -normu summa būs lielāka par 0. Iegūtais automāts 7 reizes nolasīs ieejas vārdu (6 reizes atgriezīsies ieejas vārda sākumā), un akceptēs ieejas vārdu tad un tikai tad, ja akceptējošo stāvokļu amplitūdu p -normu summa būs vienāda ar 0. \square

Teorēmas pierādījumā iegūtajam 5-adiskajam automātam ir trīs stāvokļi katras taisnes pārbaudei, pa vienam stāvoklim katram ieejas burtam, lai pārbaudītu to secību, un divi stāvokļi, lai veiksmīgi pabeigtu ieejas burtu secības pārbaudi. Kopā sanāk $7 * 3 + 7 * 1 + 2 = 30$ stāvokļi.

Izveidosim vispārīgāku valodu galīgajām projektīvajām plaknēm. Valoda L_k tiek definēta $k^2 + k + 1$ burta alfabētam un reprezentē k -tās pakāpes projektīvo plakni, un tiek definēta līdzīgi valodai L_7 – katrā no $k^2 + k + 1$ punktā ir ierakstīts pozitīvs vesels skaitlis, uz katras taisnes atrodas tieši $k + 1$ punkts, un vārds pieder valodai tad un tikai tad, ja kāda no $k^2 + k + 1$ taisnes satur $k + 1$ punktu, kuros ir ierakstīti vienādi skaitļi.

Teorēma 9. *Visiem veseliem $k \geq 2$ eksistē ultrametriskis divvirzienu galīgs automāts, kas atpazīst valodu L_k .*

Pierādījums. Var izveidot divvirzienu ultrametrisku galīgu automātu, kas būs līdzīgs 8. teorēmas pierādījumā izveidotajam, tikai šoreiz tiks pārbaudīta $k^2 + k + 1$ taisne, un katras taisnes pārbaudei divu pirmskaitļu vietā tiks izmantoti k pirmskaitļi. Otrās rindiņas stāvokļos pēc katras taisnes pārbaudes tiks iegūtas amplitūdas $x * 2^{n_{m_1} - n_{m_2}} * 3^{n_{m_1} - n_{m_3}} * \dots * r^{n_{m_1} - n_{m_{k+1}}}$, kur r ir k -tais pirmskaitlis, m_i ir virsotnes numurs visiem veseliem $1 \leq i \leq k + 1$, n_{m_i} ir i -tajā virsotnē ierakstītais skaitlis, x ir iepriekšējās taisnes pārbaudes rezultāts.

Simbolu secības pārbaudei, līdzīgi 8. teorēmas pierādījumā aprakstītajam automātam, tiks izmantoti $k^2 + k + 1 + 2$ stāvokļi, savukārt, taisņu pārbaudei tiks izmatoti $3 * (k^2 + k + 1)$ stāvokļi. Kopā sanāks $4 * (k^2 + k + 1) + 2$ stāvokļi, 2 no kuriem ir akceptējoši. Automāts nolasīs ieejas vārdu no kreisās puses uz labo $k^2 + k + 1$ reizi (tātad, atgriezīsies no labās puses kreisajā $k^2 + k$ reizes), un akceptēs ieejas vārdu tad un tikai tad, ja akceptējošo stāvokļu amplitūdu p -normu summa būs vienāda ar 0. \square

Viegli pārbaudīt, ka valodas L_7 atpazīšanai izveidotajam automātam parametri sakrīt ar 9. teorēmā pierādītajam vispārīgam gadījumam. FANO plakne ir otrās pakāpes projektīva plakne, tātad, $k = 2$. $4 * (k^2 + k + 1) + 2 = 4 * (2^2 + 2 + 1) + 2 = 30$ stāvokļi, un vārds tiek apstaigāts no kreisās puses uz labo $k^2 + k + 1 = 2^2 + 2 + 1 = 7$ reizes.

Tagad izveidosim valodu $L_{\bar{7}}$, kas noskaidro, vai FANO plakne satur tādu taisni, uz kuras atrodas trīs virsotnes, katrā no kurām ir ierakstīti dažādi skaitļi. Valoda ir līdzīga valodai L_7 , tikai taisnēm tiek apskatīta cita īpašība. Definēsim valodu $L_{\bar{7}}$ sekojošā veidā: $L_{\bar{7}} = \{1^{n_1} 2^{n_2} 3^{n_3} 4^{n_4} 5^{n_5} 6^{n_6} 7^{n_7} | (n_i > 0 \text{ visiem } 1 \leq i \leq 7) \wedge ((n_1 \neq n_2 \wedge n_1 \neq n_4 \wedge n_2 \neq n_4) \vee (n_2 \neq n_3 \wedge n_2 \neq n_5 \wedge n_3 \neq n_5)) \vee (n_3 \neq n_4 \wedge n_3 \neq n_6 \wedge n_4 \neq n_6) \vee (n_4 \neq n_5 \wedge n_4 \neq n_7 \wedge n_5 \neq n_7) \vee (n_5 \neq n_6 \wedge n_5 \neq n_1 \wedge n_6 \neq n_1) \vee (n_6 \neq n_7 \wedge n_6 \neq n_2 \wedge n_7 \neq n_2) \vee (n_7 \neq n_1 \wedge n_7 \neq n_3 \wedge n_1 \neq n_3))\}$, kur katram vesalam $1 \leq i \leq 7$ vārda fragments i^{n_i} reprezentē skaitli, kas ir ierakstīts i . virsotnē.

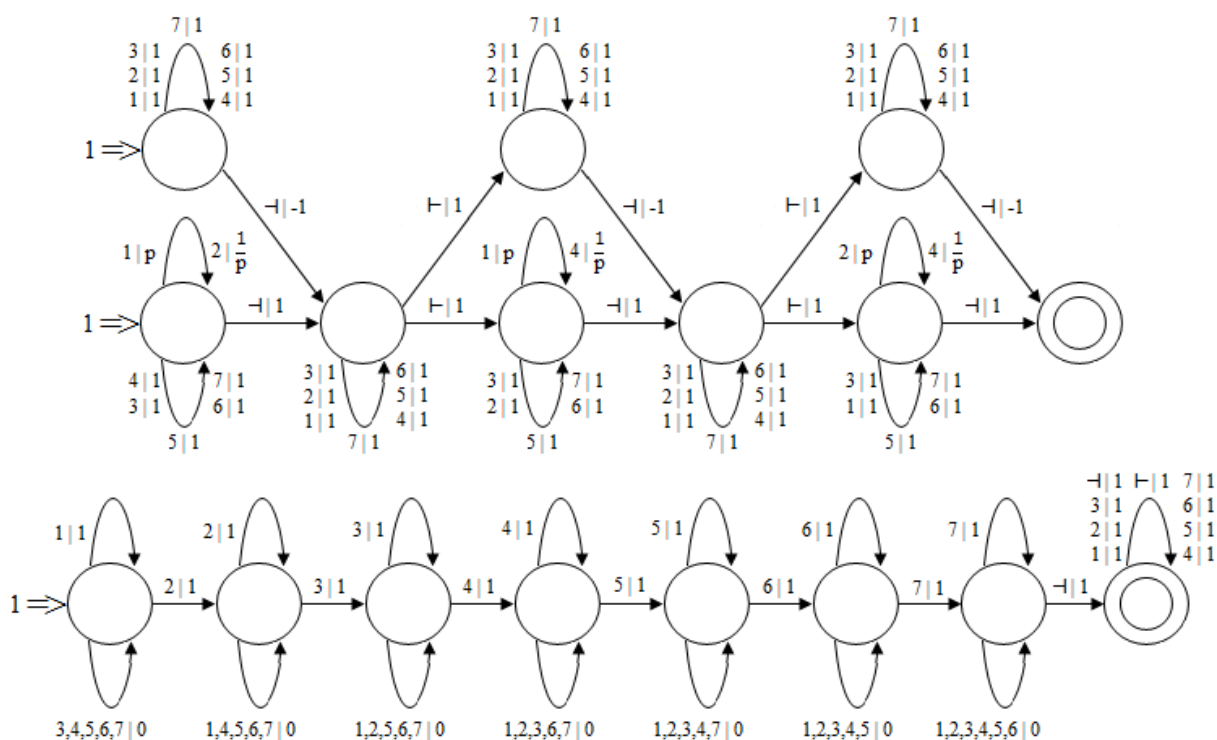
Teorēma 10. *Visiem pirmskaitļiem p eksistē p -ultrametriskis divvirzienu galīgs automāts, kas atpazīst valodu $L_{\bar{7}}$.*

Pierādījums. Līdzīgi valodas L_7 atpazīšanai, mums jāpārlicinās, ka ieejas vārda cipari atrodas nedilstošā secībā, un jāpārbauda katra taisne uz mūs interesējošo īpašību. Izveidotā p -adiska divvirzienu automāta fragments ir parādīts 4.7. attēlā.

Attēla apakšā atrodas stāvokļu kopa, ar kuras palīdzību notiek pārbaude uz to, vai ieejas vārda cipari atrodas nedilstošā secībā. Ja nosacījums izpildās, tad automāts nonāk līdz akceptējošam stāvoklim ar amplitūdu 1. Citādi, ja tiek pamanīts kāds cipars neparedzētajā vietā, amplitūda tiek reizināta ar 0, un ar amplitūdu 0 automāts nonāk akceptējošā stāvoklī.

Attēla augšējā daļā parādītie stāvokļi nodrošina pirmās taisnes pārbaudi uz mūs interesējošo īpašību. Automāts strādā līdzīgi valodu L_7 atpazīstošam automātam. Šoreiz automāts apstaigā vārdu trīs reizes, un katrā apstaigāšanas reizē salīdzina divu taisnes virsotņu skaitļus. Sākumā tiek salīdzināti skaitļi n_1 un n_2 . Ja tie ir vienādi, tad automāts tālāk staigās pa stāvokļiem ar amplitūdu 0. Citādi turpinās darbu ar citu amplitūdu. Ja kaut viena no nevienādībām $n_1 \neq n_2$, $n_1 \neq n_4$ vai $n_2 \neq n_4$ nav spēkā, tad automāts nonāks akceptējošā stāvoklī ar amplitūdu 0, citādi akceptējošā stāvokļa amplitūda būs vienāda ar kādu citu, no nulles atšķirīgu skaitli.

Aprakstīta pārbaude tiek veikta paralēli un atsevišķi katrai no 7 taisnēm. Ja meklējamā taisne nav atrasta, tad visos taisnes pārbaudošos akceptējošos stāvokļos amplitūdas būs vienādas ar 0. Citādi būs kāds akceptējošs stāvoklis, ar amplitūdu, kas atšķiras no 0.



4.7. attēls. valodas L_7 atpazīstoša p -adiska divvirzienu automāta fragments

Saskaitot taisnes pārbaudošo akceptējošo stāvokļu amplitūdu p -normas tiks iegūta 0, ja nosacījums neizpildās (tātad, ja nav taisnes, kuras virsotnēs ir ierakstīti trīs dažādi skaitļi). Citādi p -normu summa būs lielāka par 0. Ja vārda cipari bija nedilstošā secībā, tad šo nosacījumu pārbaudošā akceptējošā stāvokļa amplitūdas p -norma būs vienāda ar 1, citādi tā būs vienāda ar 0. Līdz ar to automāts akceptēs ieejas vārdu tad un tikai tad, ja visu akceptējošo stāvokļu amplitūdu p -normu summa būs lielāka par 1. Ja automāta konstruēšanai izvēlas patvaļīgu pirmskaitli p , automāta darbība un akceptēšanas nosacījumi nemainīsies. \square

Līdzīgi valodai L_7 , valodu L_7 var vispārināt uz k -tās pakāpes projektīvām plaknēm visiem veseliem $k \geq 2$. Valodas atpazīšanai var paplašināt 4.7. attēlā parādīto automātu, palielinot stāvokļu skaitu, bet nemainot akceptēšanas nosacījumus.

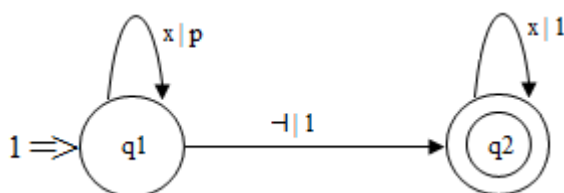
4.3. Ultrametriski magazīnas automāti

Magazīnas atmiņas izmantošana ļauj atvieglot automāta konstruēšanu un samazināt nepieciešamo stāvokļu skaitu. Magazīnas atmiņa strādā pēc principa, ka pēdējais ieliktais simbols tiek izņemts pirmais. Ir iespēja ietekmēt automāta tālāko rīcību, atkarībā no tā, kurš simbols tika izņemts no magazīnas. Determinēto galīgo automātu gadījumā magazīnas automāti paplašina atpazīstamo valodu kopu no regulāram līdz bezkonteksta valodām [17].

Apskatīsim divvirzienu ultrametriskā magazīnas automāta piemēru, kas uzskatāmi demonstrē magazīnas atmiņas izmantošanas priekšrocības automāta konstruēšanai. Apskatīsim valodu, kura tiek definēta n burtu alfabētam, un kuras vārdi ir palindromi un vārda garumi ir vismaz 2013. Valodu L_8 varam definēt n burtu alfabētam sekojoši: $L_8 = \{w | w = w^{rev} \wedge |w| \geq 2013\}$.

Teorēma 11. Valodu L_8 ir iespējams atpazīt ar divvirzienu ultrametrisku magazīnas automātu ar diviem stāvokļiem.

Pierādījums. Valodas L_8 atpazīšanai, pirmkārt, ir nepieciešams pārbaudīt vārda garuma atbilstību. To ir viegli izdarīt ar viena akceptējošā stāvokļa palīdzību. Otrkārt, jāpārlicinās, ka lasot vārdu no kreisās puses uz labo, un no labās uz kreiso vārds sakrīt. Tas ir viegli sasniedzams ar vārda lasīšanu abos virzienos un magazīnas atmiņas izmantošanu. Izveidotā automāta stāvokļi ir parādīti 4.8. attēlā.



4.8. attēls. p -adisks automāts valodas L_8 atpazīšanai

Kad automāts sāk lasīt ieejas vārdu no kreisās puses uz labo, magazīnā pēc kārtas tiek ievietots katrs saņemtais ieejas vārda simbols. Tajā pašā laikā stāvokļa q_1 amplitūda tiek pareizināta ar p , lai būtu iespējams pārlicināties vārda garuma atbilstībā. Kad vārds ir nolasīts, automāts pāriet stāvoklī q_2 , kura amplitūda kļūst vienāda ar līdzšinējo stāvokļa q_1

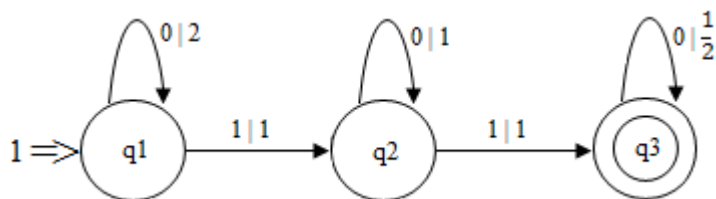
amplitūdu. Tad vārds tiek lasīts no labās puses uz kreiso, un ieejas vārda burti secīgi tiek salīdzināti ar magazīnā ievietotajiem. Ja vārdu nolasot visi magazīnas atmiņā bijušie simboli sakrita ar nolasītajiem, tad vārds ir palindroms. Citādi vārds tiek noraidīts. Ja vārds ir palindroms, tad atliek pārbaudīt, vai stāvokļa q_2 amplitūdas p -norma ir vienāda ar vai mazāka par 2^{-2013} . □

Apskatītajā piemērā automātam ir divi stāvokļi, un automāta konstruēšana nesastādīja grūtības. Bez magazīnas atmiņas izmantošanas nāktos katram no n iespējamajiem ieejas alfabēta simboliem veikt pārbaudi uz simbolu pozīciju atbilstību, lasot vārdu abos virzienos.

Valodas, kuras nepieder bezkonteksta valodu klasei nevar atpazīt ar determinētu vai nedeterminētu vienvirziena magazīnas automātu. Apskatīsim vienu tādu valodu. Valoda L_9 tiek definēta sekojoši: $L_9 = \{0^n 10^n 10^n\}$. L_9 nav bezkonteksta valoda.

Teorēma 12. *Visiem pirmskaitļiem p eksistē vienvirziena p -ultrametriskais magazīnas automāts kas atpazīst valodu L_9 .*

Pierādījums. Sākumā izveidosim 2-adisku magazīnas automātu valodas L_9 atpazīšanai. 4.9. attēlā ir parādīti 2-adiskā automāta stāvokļi valodas L_9 atpazīšanai.



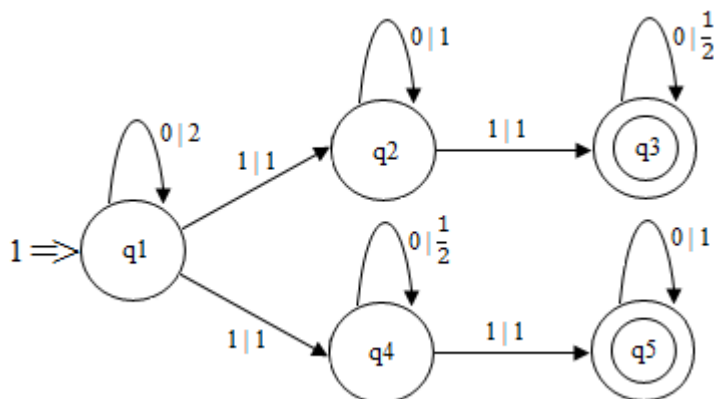
4.9. attēls. 2-adiskā automāta stāvokļi valodas L_9 atpazīšanai

Attēlā parādītie trīs stāvokļi nodrošina pirmā un trešā nulļu fragmentu garumu salīdzināšanu. Stāvokļa q_3 amplitūda pēc vārda nolasīšanas būs vienāda ar 1 tad un tikai tad, ja pirmajā fragmentā ir tik pat daudz nulļu, cik trešajā fragmentā. Dalīšanas un reizināšanas ar 2 vietā var dalīt un reizināt ar p , dabūjot p -adisku automātu, un algoritma būtība nemainīsies. Lai salīdzinātu pirmā un otrā nulļu fragmentu garumus, mēs varam izmantot magazīnas atmiņu. Kad automāts atrodas stāvoklī q_1 , tātad, nolasa pirmo nulļu fragmentu, magazīnā tiek ievietota katra nolasīta nulle. Kad automāts nonāk stāvoklī q_2 , nolasot katru nulli no otrā nulļu fragmenta, no magazīnas tiek izņemta viena nulle. Ja nulles beidzās ātrāk par otro fragmentu, tad automāts noraida vārdu (un tas nozīmē, ka otrais nulļu fragments ir īsāks par pirmo). Citādi automāts mierīgi nolasa otro nulļu fragmentu līdz galam un pāriet stāvoklī q_3 . Pēc visa vārda nolasīšanas ieejas vārds tiek akceptēts tad un tikai tad, ja stāvokļa q_3 amplitūdas p -norma ir vienāda ar 1, un ja magazīnas atmiņa ir tukša. Ja magazīnā paliek kaut viena nulle,

tas nozīmēs, ka otrais nulļu fragments bija garāks par pirmo nulļu fragmentu, un vārds tiek noraidīts. □

Teorēma 13. Valodu L_9 var atpazīt ar galīgu vienvirziena ultrametrisku automātu bez magazīnas atmiņas.

Pierādījums. Uzkonstruēsim galīgu vienvirziena ultrametrisku automātu bez magazīnas atmiņas, ar nedaudz lielāku stāvokļu skaitu. Viens no iespējamiem automātiem ir parādīts 4.10. attēlā.



4.10. attēls. 2-adisks galīgs automāts valodas L_9 atpazīšanai

Attēlotais 2-adisks automāts dara to pašu, ko magazīnas automāts, tikai šim automātam ir 5 stāvokļi 3 stāvokļu vietā. Ieejas vārds tiek akceptēts tad un tikai tad, ja akceptējošo stāvokļu q_3 un q_5 amplitūdu p -normu summa būs vienāda ar 2. □

Teorēma 14. Eksistē tādas valodas, ko nevar atpazīt vienvirziena galīgs determinēts vai nedeterminēts magazīnas automāts, bet var atpazīt galīgs vienvirziena ultrametrisks automāts bez magazīnas atmiņas.

Pierādījums. Valoda L_9 nav bezkonteksta valoda, un to nevar atpazīt ar determinētu vai nedeterminētu vienvirziena magazīnas automātu. Savukārt, no 13. teorēmas seko, ka valodu L_9 var atpazīt galīgs vienvirziena ultrametrisks automāts bez magazīnas atmiņas. □

Valoda L_9 parādīja, ka ultrametriskiem magazīnas automātiem ir plašākas iespējas par determinētiem un nedeterminētiem magazīnas automātiem valodu atpazīšanas ziņā. Pie tam eksistē tādas valodas, ko nevar atpazīt ar determinētiem un nedeterminētiem magazīnas automātiem, bet var atpazīt ar galīgu ultrametrisku automātu.

5. TJŪRINGA MAŠĪNAS

Tjūringa mašīnas ir līdzīgas divvirzienu galīgiem automātiem, tikai šoreiz darba lente, uz kuras atrodas ieejas vārds, ir neierobežota abos virzienos, un Tjūringa mašīna var uz darba lentes arī rakstīt. Nodaļā tiks apskatītas Tjūringa mašīnas gan ar vienu darba lentu, uz kuras ir ieejas vārds, gan ar divām lentēm, kur pirmā ir ar ieejas vārdu, un uz kuras drīkst tikai lasīt, un otrā lente sākumā ir tukša un uz tās drīkst arī rakstīt.

Nodaļā tiks apskatītas determinētas Tjūringa mašīnas un iespējas, ko piedāvā ultrametriski algoritmi laika, telpas un pagriezienu skaita sarežģītības samazināšanai.

5.1. Laika sarežģītība

Laika sarežģītība tiek rēķināta veicamo soļu skaitā. Trešajā nodaļā tika apskatīta valoda $L_2 = w2w^{rev}$. Ir pierādīts, ka determinētai Tjūringa mašīnai ir nepieciešami vismaz $const * n^2$ soļi (kur n ir ieejas vārda garums), lai atpazītu valodu L_2 [18].

Ceturtajā nodaļā tika apskatīta valoda $L_6 = \{0^n 20^n 20^{n-2} \dots 20^n\}$. Determinētai Tjūringa mašīnai ir nepieciešami $const * n * \sqrt{n}$ soļi.

Teorēma 15. Valodas L_2 un L_6 ir iespējams atpazīt ar ultrametrisku Tjūringa mašīnu lineārajā laikā.

Pierādījums. Trešajā nodaļā izveidotais ultrametrisks galīgs automāts parāda, ka ar ultrametrisku Tjūringa mašīnu ir iespējams atpazīt valodu L_2 lineārajā laikā, tātad, $const * n$ soļos.

Ceturtajā nodaļā izveidotais divvirzienu 2-adisks galīgs automāts apstaigā ieejas vārdu divas reizes. Tas parāda, ka ar ultrametrisku Tjūringa mašīnu valodu L_6 ir iespējams atpazīt lineārajā laikā. □

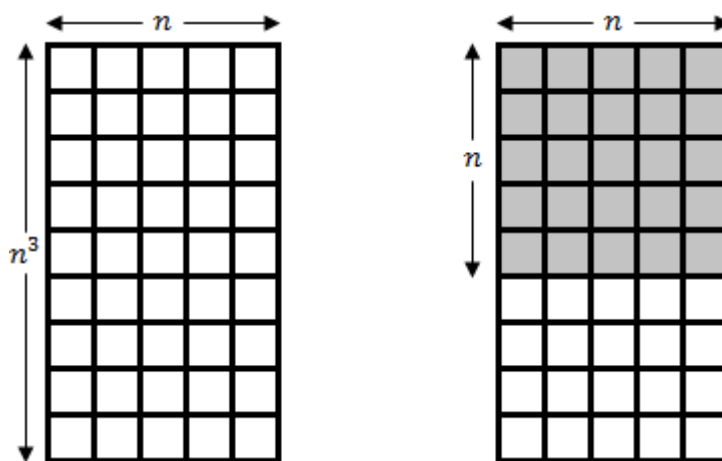
5.2. Telpas sarežģītība

Tagad tiks apskatītas Tjūringa mašīnas ar divām lentēm. Telpas sarežģītība ir otrās lentes (darba lentes) izmantoto šūnu skaits. Trešajā nodaļā tika apskatīta valoda L_1 , kuras vārdi sastāv no nullēm un vieniniekiem, un nulļu un vieninieku skaits sakrīt. Ir nepieciešamība skaitīt nulļu un vieninieku skaita starpību, un vārds tiek akceptēts tad un tikai tad, ja starpība ir vienāda ar nulli. Sliktākajā gadījumā atmiņā būs jāatceras starpība, kas ir vienāda ar $const * n$, kur n ir ieejas vārda garums. Šo skaitli ir iespējams saglabāt uz darba

lentes, pierakstot to kā bināro skaitli, līdz ar to telpas sarežģītība sanāk vienāda ar $const * \log n$. Izveidotais 3-adisks galīgs automāts ar vienu stāvokli trešajā nodaļā parāda, ka ultrametriskai Tjūringa mašīnai pietiks ar konstantu telpas sarežģītību.

Apskatīsim sarežģītāku piemēru. Šoreiz ieejas vārda darba lente būs taisnstūra formā, tātad, divdimensiju lente. 5.1. attēla kreisajā pusē ir parādīta ieejas darba lente. Ir zināmas, ka lente ir taisnstūra formā. Nodefinēsim valodu L_{10} , kurai pieder tie un tikai tie vārdi taisnstūra lentes formā, kuriem visiem naturāliem $n \geq 1$, ja lente horizontāli satur n šūnas, tad vertikāli satur n^3 šūnas.

Determinēta Tjūringa mašīna var atpazīt valodu L_{10} , patērējot $const * \log n$ šūnas uz darba lentes, līdzīgi valodas L_1 atpazīšanai veicot skaitīšanu, un tad salīdzinot šūnu skaitu horizontālajā un vertikālajā virzienā. Determinētai Tjūringa mašīnai ar konstantu šūnu skaita izmantošanu nepietīktu, jo jāveic skaitīšana.



5.1. attēls. valodas L_{10} vārds taisnstūra lentes formā

Teorēma 16. Valodu L_{10} var atpazīt ar ultrametrisku Tjūringa mašīnu ar konstantu telpas sarežģītību.

Pierādījums. Izveidosim 4-virzienu galīgu ultrametrisku automātu valodas L_{10} atpazīšanai. 5.1. attēla labajā pusē ir nokrāsots kvadrāts izmēros $n \times n$, kas kopumā dod n^2 šūnas. Ja ieejas lentei izpildās īpašība, lai vārds piederētu valodai L_{10} , tad šādu kvadrātu ir tieši $n^3/n = n^2$. Atliek salīdzināt šūnu skaitu vienā kvadrātā $n \times n$ un šādu kvadrātu skaitu.

Izveidojot ultrametrisku galīgu automātu ar vienu akceptējošo stāvokli, ar sākuma amplitūdu 1, mēs varam salīdzināt mūs interesējošus divus lielumus. Sākumā automāta galviņa staigā pa diagonāli no kreisā augšējā stūra, ejot pa vienai šūnai pa labi un uz leju. Kad galviņa satiek labo sienu, tātad, nevar vairs iet pa labi, galviņa atrodas 5.1. attēla labajā pusē redzamajā

nochrāsotajā kvadrāta, apakšējā labajā stūrī. Tad galviņa pa vienai šūnai staigā pa kreisi līdz sienai, tad vienu šūnu uz augšu, tad pa vienai šūnai pa labi, tad pēc sienas satikšanas atkal vienu šūnu uz augšu un tā tālāk, kamēr nesatiks augšējo sienu. Pa ceļam, apstaigājot katru šūnu, akceptējošā stāvokļa amplitūda tiek pareizināta ar p .

Tālāk, līdzīgi kvadrāta $n \times n$ apakšējās malas atrašanai, galviņa atkal ies pa diagonāli, kamēr nesatiks labo sienu. Kad tas notiek, akceptējošā stāvokļa amplitūda tiek pareizināta ar p^{-1} . Tad automāts staigā pa diagonāli pa kreisi un uz leju, satiekot sienu atkal pareizina akceptējošā stāvokļa amplitūdu ar p^{-1} un tā apstaigā un saskaita diagonāles, kamēr nesastaps apakšējo sienu. Ja galviņa šajā brīdī neatrodas stūrī, tad pa vertikāli šūnu skaits nedalās ar n un vārds tiek noraidīts, jo nepieder valodai L_{10} . Citādi vārds tiek akceptēts tad un tikai tad, ja akceptējošā stāvokļa amplitūdas p -norma būs vienāda ar 1, jo amplitūdai jāsanāk vienāda ar 1.

Izveidotais 4-virziena galīgs ultrametrisks automāts parāda, ka var izveidot ultrametrisku Tjūringa mašīnu valodas L_{10} atpazīšanai ar konstantu telpas sarežģītību. \square

5.3. Pagriezienu skaita sarežģītība

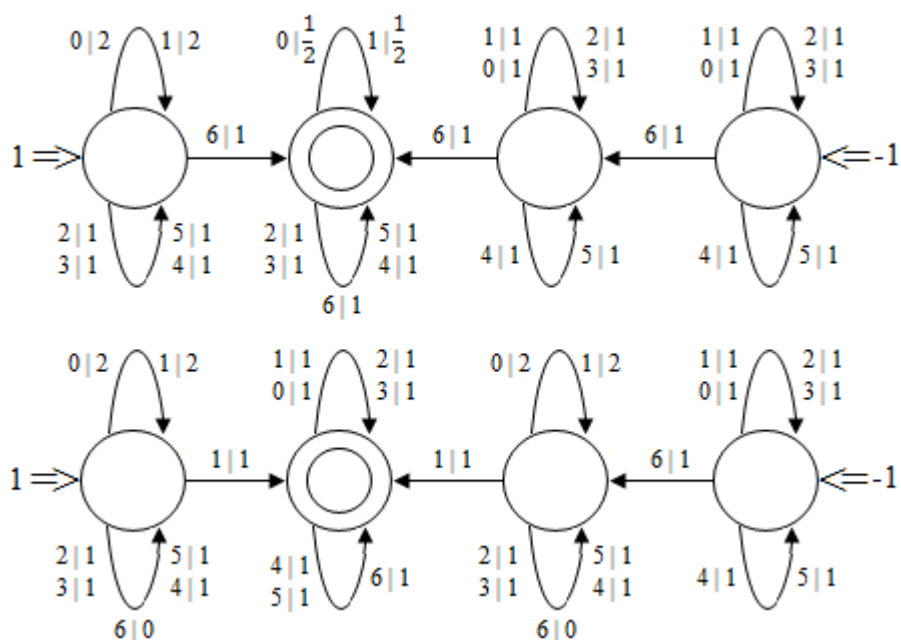
Pagriezienu skaita sarežģītība nozīmē nepieciešamo Tjūringa mašīnas galviņas pagriezienu skaitu valodas atpazīšanai. Tā ir atbilde uz jautājumu „Cik reizes ir nepieciešams mainīt galvas pārvietošanas virzienu?”. Tagad tiks apskatītas Tjūringa mašīnas ar vienu darba lentu, uz kuras atrodas ieejas vārds, un uz kuras var gan lasīt, gan rakstīt.

Ultrametriskas Tjūringa mašīnas var atpazīt valodas ar mazāku pagriezienu skaita sarežģītību, salīdzinot ar determinētām Tjūringa mašīnām. Valoda $Q \subseteq \{0,1,2,3\}^*$ ir definēta sekojoši: $Q = \{x3y \mid x \in \{0,1,2\}^* \wedge y \in \{0,1,2\}^* \wedge |x|_0 = |y|_0 \wedge |x|_1 = |y|_1 \wedge |x|_2 = |y|_2\}$, kur $|x|_a$ ir simbolu a skaits vārdā x . Tika pierādīts, ka ieejas vārdam garumā n determinētai Tjūringa mašīnai ir nepieciešami $const * \log n$ pagriezieni, savukārt, ultrametriskai Tjūringa mašīnai pietiek ar vienu pagriezienu [19].

Apskatīsim citu valodu. Valoda T tiek definēta sekojošā veidā: $T = \{x6y6 \mid x \in \{0,1,2,3,4,5\}^* \wedge y \in \{0,1,2,3,4,5\}^* \wedge proj_{01}(x) = proj_{01}(y) \wedge proj_{23}(x) = proj_{23}(y) \wedge proj_{45}(x) = proj_{45}(y)\}$, kur $proj_{ij}(x)$ ir vārds, kas tiek iegūts izsvītrojot no vārda x visus simbolus, kas nav i vai j . Ir pierādīts, ka valodas T atpazīšanai, vārdam garumā n determinētai Tjūringa mašīnai ir nepieciešami $const * n$ pagriezieni [20].

Teorēma 17. *Visiem pirmskaitļiem p eksistē p -ultrametriska Tjūringa mašīna, kas atpazīst valodu T ar konstantu pagriezienu skaitu.*

Pierādījums. Izveidosim 2-adisku galīgu automātu, kas atpazīst valodu T . Katru pārbaudi, vai $proj_{01}(x) = proj_{01}(y)$, $proj_{23}(x) = proj_{23}(y)$ un vai $proj_{45}(x) = proj_{45}(y)$ var veikt atsevišķi. Automāta fragments, kas pārbauda, vai $proj_{01}(x) = proj_{01}(y)$, ir parādīts 5.2. attēlā.



5.2. attēls. 2-adiska automāta fragments, kas pārbauda, vai $proj_{01}(x) = proj_{01}(y)$

5.2. attēlā parādītajā fragmentā augšējie 4 stāvokļi nodrošina pārbaudi, vai ieejas vārda x daļā ir tik pat daudz nulļu un vieninieku (kopā), cik ieejas vārda y daļā. Pirms pēdējā simbola (otrais sešinieks) nolasīšanas akceptējošā stāvokļa amplitūda būs vienāda ar 1 tad un tikai tad, ja abās vārda daļās nulļu un vieninieku skaitu summas sakrīt. Tad, nolasot otro sešinieku, no akceptējošā stāvokļa tiek atņemts 1. Tātad, akceptējošā stāvokļa amplitūda un amplitūdas p -norma būs vienādas ar 0, ja izpildās apskatāmā īpašība.

Attēla otrajā 4 stāvokļu rindīnā notiek pārbaude uz vieninieku pozīciju sakrītību abās ieejas vārda daļās pēc simbolu 2, 3, 4, 5 izsvītrosanas. Līdzīgi ceturtajā nodaļā izveidotajam automātam valodas L_b pazīšanai, pirms pirmā sešinieka saņemšanas, akceptējošā stāvokļa amplitūda būs vienāda ar $\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 2^i$, kur n ir nolasīta fragmenta garums, un a_i ir vienāds ar 1, ja i -tais simbols bija vieninieks, citādi a_i ir vienāds ar 0. Tad, pēc pirmā sešinieka nolasīšanas, lasot ieejas vārda daļu y , no akceptējošā stāvokļa amplitūdas līdzīgā veidā tiek atņemtas attiecīgas divnieku pakāpes, kas nodrošina to, ka pirms otrā sešinieka nolasīšanas akceptējošā stāvokļa amplitūda būs vienāda ar 0 tad un tikai tad, ja vieninieku pozīcijas sakrīt abās ieejas vārda daļās pēc simbolu 2, 3, 4, 5 izsvītrosanas.

Ja abi aprakstīti nosacījumi izpildās, tad $proj_{01}(x) = proj_{01}(y)$, un abiem akceptējošiem stāvokļiem amplitūdas būs vienādas ar 0. Līdzīgā veidā var izveidot stāvokļus, ar kuru palīdzību tiks pārbaudīts, vai $proj_{23}(x) = proj_{23}(y)$ un vai $proj_{45}(x) = proj_{45}(y)$. Vārds tiks akceptēts tad un tikai tad, ja visu akceptējošo stāvokļu amplitūdu p -normu summa būs vienāda ar 0.

Izveidotajā automātā reizināšanu un dalīšanu ar 2 var viegli aizvietot ar reizināšanu un dalīšanu ar pirmskaitli p , dabūjot p -adisku automātu un nemainot algoritma darbības būtību. Iegūtais p -adisks automāts dod iespēju izveidot ultrametrisku Tjūringa mašīnu ar konstantu galviņas pagriezienu skaitu valodas T atpazīšanai. \square

SECINĀJUMI

Darbā tika apskatīti dažādu tipu ultrametriski automāti – galīgi ultrametriski automāti, ultrametriski automāti ar vairākām galviņām, divvirzienu ultrametriski automāti un ultrametriski magazīnas automāti. Tika arī apskatītas ultrametriskas Tjūringa mašīnas.

Darba gaitā tika apskatītas un izveidotas vairākas valodas, ar kuru palīdzību tika izpētīti dažādu tipu ultrametriski automāti un pierādītas vairākas teorēmas.

Tika apskatīti p -adiski skaitļi un izveidoti vairāki piemēri.

Tika salīdzināti ultrametriski galīgi automāti ar determinētiem un varbūtiskiem galīgiem automātiem. Ir secināts, ka ultrametriski galīgi automāti paplašina atpazīstamo valodu klasi, kā arī dod jūtamu stāvokļu skaita samazināšanu. Daži uzdevumi ir risināmi ar ultrametrisku galīgu automātu ar vienu stāvokli.

Tika konstatēts, ka eksistē tādas valodas, kuras nevar atpazīt ar determinētu vienvirziena galīgu automātu ar patvaļīgu galviņu skaitu, bet var atpazīt ar ultrametrisku vienvirziena galīgu automātu ar vienu galviņu. Savukārt, ultrametriskam galīgam automātam ar divām galviņām ir plašākas iespējas, salīdzinot ar ultrametrisku galīgu automātu ar vienu galviņu.

Salīdzinot ar vienvirziena automātiem, ultrametriski divvirzienu galīgi automāti parādīja iespēju samazināt nepieciešamo stāvokļu skaitu, kā arī valodu atpazīšanas iespēju paplašināšanu.

Apskatot magazīnas automātus tika secināts, ka eksistē tādas valodas, ko var atpazīt ar ultrametrisku galīgu automātu bez magazīnas atmiņas, bet nevar atpazīt ar determinētu vai nedeterminētu magazīnas automātu. Magazīnas atmiņas izmantošana ultrametriskiem automātiem deva iespējas samazināt nepieciešamo stāvokļu skaitu, kā arī vienkāršoja algoritmu veidošanu valodu atpazīšanai.

Ultrametriskas Tjūringa mašīnas parādīja labus rezultātus laika, telpas un pagriezīnu skaita sarežģītības samazināšanas ziņā. Tika konstatēts, ka vairākus determinētas Tjūringa mašīnas uzdevumus ir iespējams reducēt uz ultrametriskiem galīgiem automātiem.

Darba gaitā tika pierādītas vairākas teorēmas. Darba autors uzskata, ka darba uzdevumi ir izpildīti un izvirzītie mērķi ir sasniegti. Ultrametriskiem algoritmiem ir plašas iespējas turpmākiem pētījumiem, un bakalaura darbs varētu kļūt tiem par sākumu.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA UN AVOTI

1. *Ultrametric analysis and interbasin kinetics*. **Kozyrev, Sergey V.** bez viet. : American Institute of Physics, 2006. 2nd International Conference on p-Adic Mathematical Physics, lpp. 121–128.
2. *p-Adic Analysis and Mathematical Physics*. **V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov.** bez viet. : 1995., World Scientific.
3. *NonArchimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models*. **Andrei Yu. Khrennikov.** bez viet. : 1997, Kluwer Academic Publishers.
4. *Ultrametric automata and Turing machines*. **Freivalds, Rūsiņš.** bez viet. : 2012.
5. *A first introduction to p-adic numbers*. **Madore, David A.** [Tiešsaiste] - Pieejams Internetā: <http://www.madore.org/~david/math/padics.pdf> [skatīts: 17.01.2013].
6. *Calculating a p-adic square root, p an odd prime*. [Tiešsaiste] - Pieejams Internetā: <http://www.numbertheory.org/php/p-adic.html> [skatīts: 22.01.2013].
7. *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*. **Neal Koblitz.** [Tiešsaiste] - Pieejams Internetā: <http://www.plouffe.fr/simon/math/p-adic%20numbers,%20p-adic%20analysis,%20and%20zeta-functions%202nd%20ed.%20-%20N.%20Koblitz.pdf> [skatīts: 24.01.2013].
8. *Generalized automata and stochastic languages*. **Paavo Turakainen.** bez viet. : Proceedings of the American Mathematical Society 21. 1969.
9. *Dirichlet's Theorem*. **Weisstein, Eric W.** [Tiešsaiste] - Pieejams Internetā: <http://mathworld.wolfram.com/DirichletsTheorem.html> [skatīts: 19.02.2013].
10. *Primitive Root*. **Weisstein, Eric W.** [Tiešsaiste] - Pieejams Internetā: <http://mathworld.wolfram.com/PrimitiveRoot.html> [skatīts: 19.02.2013].
11. *Fermat's Little Theorem*. **Weisstein, Eric W.** [Tiešsaiste] - Pieejams Internetā: <http://mathworld.wolfram.com/FermatsLittleTheorem.html> [skatīts: 19.02.2013].
12. *On State Complexity of Ultrametric Finite Automata*. **Kaspars Balodis, Anda Beriņa, Kristīne Cīpola, Maksims Dimitrijevs, Jānis Iraids, Kārlis Jēriņš, Vladimirs Kacs, Jānis Kalējs, Rihards Krišlauks, Kārlis Lukstiņš, Reinholds Raumanis, Natālija Somova, Irina Ščeguļnaja, Anna Vanaga, Rūsiņš Freivalds.** bez viet. : SOFSEM 2013.
13. *Multi-Head Finite Automata: Characterizations, Concepts and Open Problems*. **Markus Holzer, Martin Kutrib, Andreas Malcher.** [Tiešsaiste] - Pieejams Internetā: <http://arxiv.org/pdf/0906.3051v1.pdf> [skatīts: 15.03.2013].

14. *k+1 Heads Are Better than k*. **Andrew C. Yao, Ronald L. Rivest**. [Tiešsaiste] - Pieejams Internetā: <http://people.csail.mit.edu/rivest/pubs/YR78.pdf> [skatīts: 11.03.2013].
15. *Two-way Deterministic Finite Automata (2DFA)*. **Hafsa Naseem**. [Tiešsaiste] - Pieejams Internetā: <http://www.slideshare.net/Hafsa.Naseem/twoway-deterministic-finite-automata> [skatīts: 17.11.2012].
16. *Projective Planes, Spaces*. [tiešsaiste]. - Pieejams Internetā: <http://www.ti.inf.ethz.ch/ew/lehre/extremal07/recitation1.pdf> [skatīts: 25.04.2013].
17. *Pushdown Automata*. **Hendrik Jan Hoogeboom, Joost Engelfriet**. [Tiešsaiste] - Pieejams Internetā: <http://www.liacs.nl/~hoogeboo/praatjes/pda.pdf> [skatīts: 01.05.2013].
18. *Сложность распознавания симметрии на машинах Тьюринга*. **Барздинь Я. М.** bez viet. : grāmata "Проблемы кибернетики", 1965., lpp. 245-248.
19. *Ultrametric Turing Machines with Limited Reversal Complexity*. **Rihards Krišlauks, Ieva Rukšāne, Kaspars Balodis, Pija Kucevalovs, Rūsiņš Freivalds, Ieva Nāgele**. bez viet. : SOFSEM 2013.
20. *Randomization in restricted machines*. **Freivalds, Rūsiņš**. bez viet.

DOKUMENTĀRA LAPA

Bakalaura darbs "Ultrametriski algoritmi dažādiem automātu tipiem" izstrādāts LU Datorikas fakultātē

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Maksims Dimitrijevs

Rekomendēju/nerekomendēju darbu aizstāvēšanai

Darba vadītājs: Dr.habil.math., prof. Rūsiņš Mārtiņš Freivalds

03.06.2013.

Recenzents: Dr.math., prof. Kārlis Podnieks

Darbs iesniegts Datorikas fakultātē 04.06.2013.

Dekāna pilnvarotā persona: metodiķe Ārija Sproģe

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē
12.06.2013.

Komisijas sekretārs: