

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
Ķīmijas fakultāte

**PROPORCIONĀLĀS SPRIEŠANAS ATTĪSTĪŠANA
PAMATSKOLAS MATEMĀTIKAS KURSĀ**

BAKALAURA DARBS

Autors: **Arta Linde**

Studenta apliecības Nr.: aj11065

Darba vadītāja: Mg. paed. Aira Kumerdanka

RĪGA 2022

ANOTĀCIJA

Pētījums balstīts uz nepieciešamību mērķtiecīgi attīstīt skolēnu proporcionālo spriešanu kā domāšanas stratēģiju, lai uzlabotu izpratni par matemātikas mācību saturu, sniedzot ieteikumus pedagogiem, kā virzīt mācīšanos, lai katrs skolēns pilnveidotu savas spriešanas prasmes.

Pētījuma mērķis ir analizēt proporcionālās spriešanas attīstības pēctecību matemātikas mācību programmā 5. – 9. klasei un aprobēt mācību materiālus proporcionālās spriešanas mērķtiecīgai attīstīšanai 6. klasē, sniedzot metodiskos ieteikumus skolēnu domāšanas stratēģiju pilnveidei.

Šī pētījuma rezultātā ir apkopoti temati un aktivitātes no matemātikas mācību programmas, lai plānotu ilgtermiņa proporcionālās spriešanas attīstīšanu pamatskolā, un izveidots mācīšanās cikls proporcionālās spriešanas pilnveidei.

Atslēgas vārdi: *proporcionālā spriešana, proporcionalitāte, mācīšanās cikls, domāšanas stratēģija, matemātikas programmas paraugs Skola 2030.*

ANNOTATION

The research is based on the need to purposefully develop students' proportional reasoning as a thinking strategy to improve their understanding of the content of mathematics. The research includes advice to educators on how to guide learning so that each student develops their reasoning skills.

The aim of the research is to analyse the succession of the development of proportional reasoning in the mathematics curriculum for grades 5 - 9 and to approbate teaching materials for the purposeful development of proportional reasoning in grade 6.

As a result of this research, topics and activities from the mathematics curriculum have been compiled for a long-term proportional reasoning improvement and learning cycle have been created.

Key words: *proportional reasoning, proportionality, learning cycle, thinking strategy, project Skola 2030.*

SATURS

Ievads.....	5
1. Proporcionālās spriešanas teorētiskie aspekti.....	8
1.1. Proporcionālā spriešana.....	8
1.2. Proporcionālās spriešanas uzbūve	11
1.3. Pamatskolas skolēna spēja spriest proporcioniāli	14
1.4. Proporcionālās spriešanas attīstīšanas metodes matemātikas stundās	16
2. Proporcionālās spriešanas attīstība pamatskolas matemātikas mācību programmā.....	21
2.1. Proporcionālā spriešana mācību programmā.....	21
2.2. Proporcionālā spriešana 5. klases mācību programmā.....	22
2.3. Proporcionālā spriešana 6. klases mācību programmā.....	24
2.4. Proporcionālā spriešana 7. klases mācību programmā.....	27
2.5. Proporcionālā spriešana 8. klases mācību programmā.....	30
2.6. Proporcionālā spriešana 9. klases mācību programmā.....	31
3. Pētījums proporcionālās spriešanas attīstīšanai 6. klases matemātikā	34
3.1. Pētījuma bāze	34
3.2. Proporcionālās spriešanas prasmju diagnostika	35
3.3. Mācīšanās cikls proporcionālās spriešanas attīstīšanai	43
3.3.1. Izpētes posms.....	43
3.3.2. Stratēģijas ieviešanas, koncepta izgudrošanas posms	46
3.3.3. Pielietošanas posms	51
3.4. Rezultātu analīze	53
Secinājumi.	60
Izmantotās literatūras un avotu saraksts	62
Pielikumi.....	65
1. pielikums. Temata “6.1. Kā kopumu sadala noteiktā attiecībā?” apguves norise	65
2. pielikums. Diagnosticējošais darbs.....	66
3. pielikums. Mācību stacijas	69
4. pielikums. Skolēna darba lapa izpētes posmā	73
5. pielikums. Skolēna darba lapa Nr. 1 stratēģijas ieviešanas posmā	75
6. pielikums. Skolēna darba lapa Nr. 2 stratēģijas ieviešanas posmā	76
7. pielikums. Skolēna darba lapa pielietošanas posmā	78
8. pielikums. Nobeiguma darbs	80

IEVADS

Veiksmīgas matemātikas apguves pamatā ir spēja izprast sakarības un pielietot tās dažādos kontekstos. Viens no veidiem, kā palīdzēt skolēniem izprast matemātikas sakarības un pielietot tās, ir mērķtiecīgi mācīt saskatīt un sasaistīt kopā dažādus jēdzienus, formulas, algoritmus un prasmes. Proporcionālā spriešana (*proportional reasoning*) ir domāšanas stratēģija, kas ietver sevī domāšanu par proporcionālu lielumu attiecībām, to interpretāciju un raksturošanu. Proporcionālā spriešana izpaužas kā domāšanas veids, un to var pielietot gan dabaszinātnēs, gan matemātikā, gan mūzikā, kā arī ikdienas situācijās. Proporcionālā spriešana ir daļa no cilvēka kognitīvās attīstības, kas raksturo cilvēka spēju saprast, konstruēt, un izmantot multiplikatīvas attiecības starp mainīgiem lielumiem. Proporcionālā spriešana palīdz cilvēkam veikt faktos balstītu analīzi, veidot secinājumus un pieņemt lēmumus.

Proporcionalitātes izpratnei un proporcionālās spriešanas attīstīšanai nozīmīgs ir vecumposms no 5. līdz 9. klasei, jo šajā posmā mainās cilvēka matemātiskā domāšana. Galvenās domāšanas izmaiņas ir pārslēgšanās no naturāliem skaitļiem uz racionāliem skaitļiem un no saskaitīšanas stratēģijām uz reizināšanas stratēģijām, raksturojot lielumu savstarpējās attiecības. Proporcionālā spriešana caurvijas dažādiem tematiem pamatizglītības matemātikas mācību programmā un apvieno dažādas sakarības, prasmes un idejas, lai veidotu domāšanas stratēģiju, kuras attīstīšanai nepieciešams ilgstošs, mērķtiecīgs darbs visas pamatskolas garumā. Pamatstrādes proporcionalai spriešanai veidojas jau sākumskolas posmā, tomēr tikai pamatskolas posmā skolēns sasniedz tādu kognitīvās attīstības līmeni, lai būtu spējīgs abstrakti uztvert proporcionalas situācijas un tās analizēt. Proporcionalā spriešana ir pamatā pieauguša cilvēka spējai pielietot matemātikas sakarības savā ikdienā, tādēļ to mērķtiecīga attīstīšana būtiski var uzlabot pieauguša cilvēku ikdienu, lai pieņemtu pamatodus un racionālus lēmumus.

Pētījuma aktualitāte, galvenokārt, balstās uz nepieciešamību ieraudzīt kopsakarības matemātikas mācību saturā un matemātikas pielietošanas veidus ikdienas situācijās, ko citkārt skolēniem ir grūti saskatīt. Attīstot proporcionalās spriešanas prasmes, skolēns gūst pamatu vispārējai matemātikas izpratnei un pilnveido domāšanas stratēģijas. Proporcionalā spriešana ir svarīga matemātikas prasme pamatskolas matemātikas mācību saturā.

Proporcionalās spriešanas teorētiskie aspekti ir plaši pētīti visā pasaulē. Pētījumus par proporcionalās spriešanas attīstīšanu ir izstrādājuši S. Lamona, kura veidojusi metodiskus materiālus skolotājiem, lai mācītu daļskaitļus un attiecības, pievēršot uzmanību izpratnes veidošanai, R. Karplus, kurš padziļināti ir pētījis proporcionalās spriešanas nianšes un izveidojis metodi kā mācīt spriešanas prasmes, Ž. Piažē, kurš ir pamatlicējs kognitīvās

attīstības teorijai un cieši sasaista proporcionālo spriešanu ar formālo operāciju stadiju. Pētījumus, kuros tiek diagnosticētas skolēnu esošas proporcionālās spriešanas prasmes un apkopotas spriešanas stratēģijas, ir izstrādājuši J. S. Parks, J. H. Parks un O. N. Kvons [20], kuri pētīja Dienvidkorejas 7. – 9. klašu skolēnu spriešanas stratēģijas, un R. Nasira [18], kura pētīja Indonēzijas 8. klašu skolēnu spriešanas stratēģijas. Līdz šim Latvijā pētījumi par skolēnu proporcionālās spriešanas prasmēm un attīstīšanas iespējām matemātikas kursā nav publicēti. Tādēļ darba autores pētījums ir nepieciešams, lai palīdzētu saskatīt kopsakarības matemātikas mācību programmā un izveidotu mācību materiālus un ieteikumus mērķtiecīgai proporcionālo spriešanas prasmju attīstīšanai atbilstoši Latvijas pamatizglītības mācību programmai.

Pētījuma **problēma** ir proporcionālās spriešanas mācīšana pamatskolas matemātikas kursā un izpratnes radīšana par proporcionālām attiecībām starp lielumiem. Šāds pētījums ir nepieciešams, lai izprastu proporcionālās spriešanas nozīmību matemātikas tālākai izpratnei, saskatītu kopsakarības visā pamatskolas matemātikas kursā un virzītu mācīšanos, lai katrs skolēns attīstītu savas spriešanas prasmes.

Pētījuma **mērķis** ir analizēt proporcionālās spriešanas attīstības pēctecību matemātikas mācību programmā 5. – 9. klasei un aprobēt mācību materiālus proporcionālās spriešanas mērķtiecīgai attīstīšanai 6. klasē, sniedzot metodiskos ieteikumus skolēnu domāšanas stratēģiju pilnveidei.

Lai sasniegtu pētījuma mērķi, ir izvirzīti šādi **uzdevumi**:

1. Izpētīt proporcionālās spriešanas teorētiskos aspektus.
2. Izpētīt metodes, kā mācīt proporcionālās spriešanas prasmes.
3. Analizēt matemātikas mācību programmu 5. – 9. klasei, atsedzot tematus, kuros mērķtiecīgi attīstīt proporcionālās spriešanas prasmes.
4. Izveidot un aprobēt mācību materiālus proporcionālās spriešanas attīstīšanai.
5. Izvērtēt skolēnu proporcionālās spriešanas prasmes un attīstības tendences mācību materiālu aprobācijas laikā un sniegt ieteikumus proporcionālo spriešanas prasmju pilnveidošanai.

Pētījums balstīts uz teorētisko bāzi par proporcionālo spriešanu, tās uzbūvi un mācīšanas metodiku, pamatizglītības matemātikas mācību programmas paraugu Skola 2030 un Ministru kabineta noteikumiem par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu, kā arī darba autores aprobēto mācīšanās ciklu proporcionālās spriešanas attīstīšanai 6. klasē.

Pētījumu ierobežo pētījuma norises laika nesakrītība ar matemātikas mācību priekšmeta tematiem, kas būtu atbilstošāki proporcionālās spriešanas attīstīšanai, tādēļ mācīšanās cikls ir aprobēts kā intensīva mācību aktivitāte ārpus konkrēta 6. klases temata. Proportionālās

spriešanas attīstīšana ir ilgtermiņa process vairāku gadu garumā, bet pētījuma laika posms ir ierobežots, tādēļ darba autores aprobētais mācīšanās cikls ir tikai viens solis no ilgtermiņa proporcionālās spriešanas attīstīšanas procesa, lai sasniegtu augstvērtīgus proporcionālās spriešanas rezultātus.

Pētījums ir sadalīts trīs daļās. Pirmajā darba daļā tiek apkopota teorētiskā bāze par proporcionālo spriešanu, tās struktūru un būtību, tiek aprakstītas mācīšanas stratēģijas un ieteikumi, kā veiksmīgi skolēnos attīstīt proporcionālās spriešanas prasmes, kā arī aprakstīta skolēnu kognitīvās attīstības gatavība, lai attīstītu proporcionālās spriešanas prasmes pamatskolā. Otrajā daļā tiek pētīti un analizēti temati pamatizglītības matemātikas mācību programmā, kas un kā ved uz proporcionālās spriešanas attīstību katrā pamatskolas klasē. Trešajā daļā tiek analizēti 6. klases skolēnu proporcionālās spriešanas diagnostikas rezultāti, analizēta aprobētā mācīšanās cikla proporcionālās spriešanas attīstīšanai gaita un rezultāti, un analizētas izmaiņas skolēnu domāšanas stratēģijās, kā arī sniegti ieteikumi turpmākam proporcionālās spriešanas pilnveidošanas procesam. Darba noslēgumā ir izveidoti secinājumi par proporcionālās spriešanas prasmju attīstīšanu pamatskolas matemātikas kursā.

Darba pamatā tiek veikta padziļināta literatūras analīze par proporcionālās spriešanas būtību, struktūru, attīstīšanas metodēm, un pamatskolas skolēna spēju spriest proporcionāli, izmantojot pieejamos informācijas avotus. Proportionālās spriešanas attīstīšanas pēctecība pamatskolas kursā, tiek balstīta uz matemātikas mācību programmas izpēti un analīzi. Skolēnu proporcionālās spriešanas prasmju novērtēšanai, pirms mērķtiecīgas attīstīšanas, tiek veikta diagnostika. Proportionālo spriešanas prasmju attīstīšanai ir izveidots mācīšanās cikls un uzdevumi, kas aprobēti Latvijas vispārīgizglītojošās skolas 6.klasē. Rezultātu novērtēšana balstīta uz darba autores novērojumiem aprobācijas laikā un novērtējuma darba rezultātiem, kā arī veiktas salīdzinošās analīzes par skolēnu prasmēm pirms mācīšanās cikla un pēc tā realizēšanas.

Pētījums par proporcionālās spriešanas attīstīšanu pamatskolas matemātikas kursā ir nepieciešams, lai saskatītu matemātikas satura pēctecību pamatskolas mācību programmā un plānotu ilgtermiņa proporcionālās spriešanas attīstīšanas procesu, kā arī piedāvātu gatavus mācību materiālus proporcionālās spriešanas pilnveidei, kas uzlabotu Latvijas skolēnu zināšanu un izpratnes līmeni par matemātikas sakarībām.

1. PROPORCIONĀLĀS SPRIEŠANAS TEORĒTISKIE ASPEKTI

1.1. Proporcionālā spriešana

Proporcionālā spriešana ir jēdziens, ko grūti aptvert vienā definīcijā, lai atspoguļotu šī procesa daudzpusīgo saturu. Kembridžas universitātes vārdnīcā jēdziens “spriešana” ir definēts, kā process, kura laikā tiek domāts par kaut ko, lai pieņemtu lēmumu, bet jēdziens “proporcionāls”, kā salīdzinājums, ka divām lietām ir vienāda lieluma savstarpējā atkarība vai attiecība [1]. Apkopojot šo divu atsevišķo jēdzienu definīcijas, var secināt, ka proporcionālā spriešana ir domāšana par lielumu attiecībām un savstarpējo saistību.

Proporcionālās spriešanas pētījumus aizsāka Ž. Piažē un B. Inheldere, bet viņu definīcijas par proporcionālo spriešanu atšķīrās no citiem zinātniekiem, jo viņi to pētīja no cilvēka kognitīvās attīstības puses un uzskatīja, ka prasme spriest proporcionāli ir pazīme, kas liecina, ka cilvēks ir sasniedzis formālo operāciju attīstības stadiju. Inheldere un Piažē neizmantoja vārdu savienojumu “proporcionālā spriešana”, bet aprakstīja to, kā izpratni par attiecībām starp attiecībām [6]. Lai gan Piažē un Inhelderes definīcija, autoresprāt, neparāda proporcionālās spriešanas būtību, tomēr viņu dotie proporcionālās spriešanas attīstības skaidrojumi liek paskatīties uz šo procesu no cilvēka kognitīvās attīstības līmeņa un iespējām, lai pakāpeniski būvētu skolēna domāšanas stratēģijas. 1983. gadā R. Karplus, S. Pulos un E. Stage definēja spriešanu par lineāru attiecību ($y=ax$, $a \neq 0$) starp diviem mainīgajiem, kā proporcionālo spriešanu [8]. Pēc autores domām šī definīcija atspoguļo ļoti šauru proporcionālās spriešanas uzbūves aspektu un neparāda, cik komplicēts ir šis domāšanas process. R. Lešs definēja proporcionālo spriešanu, kā matemātiskās spriešanas veidu, kas ietver spēju salīdzināt vairākus lielumus un to attiecības, kā arī spēju paturēt prātā un apstrādāt informāciju, kas pamatota ar secinājumiem un prognozēm, un ietver gan kvalitatīvās, gan kvantitatīvās metodes [14]. S. Lamona proporcionālo spriešanu aprakstīja, kā spēju palielināt un samazināt lielumus ievērojot noteiktas attiecības atbilstošās situācijās, un pamatot apgalvojumus par attiecībām situācijās, kas saistītas ar tiešo un apgriezto proporcionalitāti [11]. Pēc autores domām Leša un Lamonas definīcijas vispilnīgāk atspoguļo proporcionālās spriešanas uzbūvi un tiks turpmāk izmantotas pētījumā, kad tiks veidoti un aprobēti mācību materiāli proporcionālās spriešanas attīstīšanai. Šo definīciju nozīmīgākā ideja ir tā, ka proporcionālā spriešana ietver gan matemātiskās prasmes, gan kvalitatīvas spriešanas prasmes, lai pamatotu apgalvojumus par lielumu attiecībām.

Ārpus matemātikas klases, proporcionālā spriešana ir acīmredzama citās mācību jomās, piemēram dabaszinātnēs, mūzikā un ģeogrāfijā, kā arī ikdienas aktivitātēs. Cilvēki izmanto proporcionālo spriešanu, lai aprēķinātu labākos pirkumus, nodokļus un investīcijas, lai

strādātu ar zīmējumiem un kartēm, veiktu mērījumus un veiktu valūtas konvertāciju, pielāgotu receptes vai veidotu dažādu maisījumu un šķīdumu koncentrācijas. Proporcija ir viena no visbiežāk izmantotajām matemātikas sakarībām reālajā dzīvē [18]. Spriešana ir neatņemama matemātikas sastāvdaļa. Skolēniem pamatskolas laikā būtu jāattīsta zināšanas, ka matemātika ietver modeļu un likumsakarību pārbaudi, minējumu izteikšanu par iespējamiem vispārinājumiem un minējumu izvērtēšanu [28]. Proporcionālā spriešana ietver domāšanu par attiecībām un daudzumu vai vērtību salīdzināšanu. Proporcionālā spriešana dažkārt tiek uztverta tikai kā attiecību un racionālu skaitļu, piemēram, daļskaitļu, decimāldaļu un procentu, izpēte, taču tā faktiski caurstrāvo visus matemātikas virzienus. Spēja spriest, izmantojot proporcionālās attiecības, ir sarežģīts process, kas attīstās ilgākā laika periodā. Tas prasa daudz dažādu jau iegūtu pieredžu, kas var attīstīt izpratni par to, kas ir proporcionālas attiecības un pēc tam nepieciešams vēl ilgāks laiks, lai iegūt spēju ar to abstrakti tikt galā [5].

Skolēni izmanto proporcionālo spriešanu agrīnā matemātikas apgūvē, piemēram, domājot par 8 kā par diviem četriniekiem vai četriem divniekiem, nevis domājot par to, kā par vienu vairāk nekā septiņi. Skolēni izmanto proporcionālo spriešanu vēlāk mācoties, domājot par to, kā ātrums 50 km/h ir tāds pats kā ātrums 25 km/30 min [5]. Lielumu attiecību un proporcionālās spriešanas pamatā ir reizināšanas attiecības, kurās lielumus neatkarīgi no tā, vai tie ir diskreti vai nepārtraukti, salīdzina, izmantojot skalāros reizinātājus [31]. Proporcionālā spriešana attiecas uz spēju saprast, konstruēt, un izmantot multiplikatīvas attiecības starp diviem mainīgajiem [3].

Proporcionalajai spriešanai izmanto zināšanu un prasmju kopumu par daļām, attiecībām, procentiem, proporcijām un izmanto atbilstošā problēmrisināšanas situācijā. Šādu prasmju esamība var piedāvāt dažādus veidus, kā atrisināt situāciju pirms tiek pielietots konkrēts skaitlisks aprēķins vai formula, reāli neizvērtējot attiecības starp lielumiem. Daudziem skolēniem problēmas, kurās izmanto proporcionālo spriešanu šķiet sarežģītas. Tas bieži notiek tāpēc, ka tie nav iepazīstināti ar proporcionālās spriešanas pamatjautājumiem un nespēj tos atpazīt [24]. Pēc autores domām būtiski ir attīstīt skolēnos proporcionalitātes izpratni, skaitļu izjūtu un matemātisko intuīciju, lai skolēni būtu spējīgi ar izpratni spriest par proporcionālām situācijām un attiecībām starp lielumiem pirms konkrētu algoritmu lietošanas.

Proporcionalitāte ir viens no elementārās matemātikas, skaitļu un mērīšanas koncepcijas pamatakmeņiem, un tajā pašā laikā viens no būtiskākajiem izpratnes jautājumiem, kas nepieciešams augstākā līmeņa matemātikas apguvei. Proporcionalitātes izpratne ir svarīga ne tikai augstāka līmeņa matemātikas izpratnei, kā piemēram, ģeometriskai līdzībai vai varbūtībai, bet tas ir arī noderīga ikdienas dzīvē. Proporcionalās spriešanas attīstība ir sarežģīts process, kas progresē pakāpeniski daudzu gadu laikā. Proporcionalitāte ir saistīta ar

daudziem matemātikas konceptiem, jēdzieniem un situācijām, kurās proporcionālā spriešana ir nepieciešama. Proporcionalitāte ir pamatā racionālu skaitļu idejai. Piemēram, atrast ekvivalentas daļas ir līdzīgi kā atrast nezināmo vērtību proporcionālā uzdevumā vai salīdzināt divas daļas ir līdzīgi kā atrisināt attiecību salīdzināšanas problēmu. Ģeometrijā proporcionalitāti tieši pielieto mainot figūru lielumu un aprakstot ģeometrisku figūru līdzību. Proporcionalitāte ir arī daudzu svarīgu varbūtību ideju pamatā. Laimes spēlēs bieži var salīdzināt divas varbūtības atrodot attiecīgās attiecības veiksmīgajiem cipariem pret visiem iespējamajiem iznākumiem. Proporcionalo spriešanu lieto daudzos citos mācību priekšmetos kā piemēram fizikā, ķīmijā, bioloģijā, ekonomikā u.c. [3].

Proporcionalo spriešanu dažādos literatūras avotos sauc arī par proporcionālo domāšanu. Proporcionalā domāšana nozīmē domāt par multiplikatīvām attiecībām. Tas ietver spēju aprakstīt precīzas attiecības vai izmaiņas starp dažādām vērtībām [27]. Proporcionalo spriešanu var raksturot, kā matemātiskās domāšanas veidu, kurā tiek atšķirtas situācijas, kuras raksturo proporcionāli lielumi, no tām situācijām, kuras raksturo neproporcionāli lielumi, un to atrisināšanai izmanto ne tikai proporcijas pamatīpašību. Proporcijas risināšanas algoritmu jeb proporcijas pamatīpašību ir viegli izmantot situācijās, kurus apraksta proporcionāli lielumi, tomēr tas neattīsta proporcionālās spriešanas prasmes, arī, ja šo algoritmu lieto pareizi un efektīvi. Trūkstoša izpratne par šī algoritma būtību, noved pie situācijām, kad tas tiek izmantots situācijās, kurās nemaz nav proporcionāli lielumi. Proporcijas jēdziena izpratni un proporcionālās spriešanas prasmes var attīstīt ar situāciju uzdevumiem, kur ir norādītas attiecības starp vairākiem lielumiem, kuros pašiem ir jāizveido skaitliska proporcija nevis tehniski risinot algebriskus uzdevumus [12].

Proporcionalā spriešana ir domāšanas veids nevis algoritms, kas tiek lietots, lai atrisinātu kādu konkrētu problēmu. Proporcionalā spriešana nav spēja izveidot proporciju vai pielietot proporcijas pamatīpašību, lai atrastu nezināmos skaitļus. Proporcionalā spriešana parasti nav iesaistīta, kad skolnieki pielieto iegaumētas formulas un algoritmus. Spēja proporcionāli domāt un spriest ir viens no nozīmīgajiem faktoriem indivīda spējā saprast un pielietot matemātiku. Kamēr skolēni var atrisināt proporcionālu problēmu ar iegaumētu formulu, tas nenozīmē, ka viņi var proporcionāli domāt. Proporcionalās spriešanas attīstība ir ilgtermiņa process daudzu gadu garumā, kas sevī ietver dažādu matemātisko prasmju attīstību, kvalitatīvu spriešanas, izvērtēšanas un analizēšanas prasmju attīstību. Proporcionalā spriešana ir spēja izprast un interpretēt proporcionālās attiecības starp lielumiem un tās attīstīšana ir domāšanas stratēģiju pilnveidošana.

1.2. Proporcionālas spriešanas uzbūve

Proporcionālā spriešana ir sarežģīts domāšanas veids, un tā attīstība pēc būtības ir vairāk līdzīga tīmeklim nekā lineāra. Skolēni vienu un to pašu problēmu atrisina dažādos veidos. Attīstot spēju spriest proporcionāli, tiek izmantotas neskaitāmas iespējas, kā to darīt. Dažādu sakarību mijiedarbību, kas parāda komplekso proporcionālās spriešanas uzbūvi, var aplūkot 1.1. attēlā.

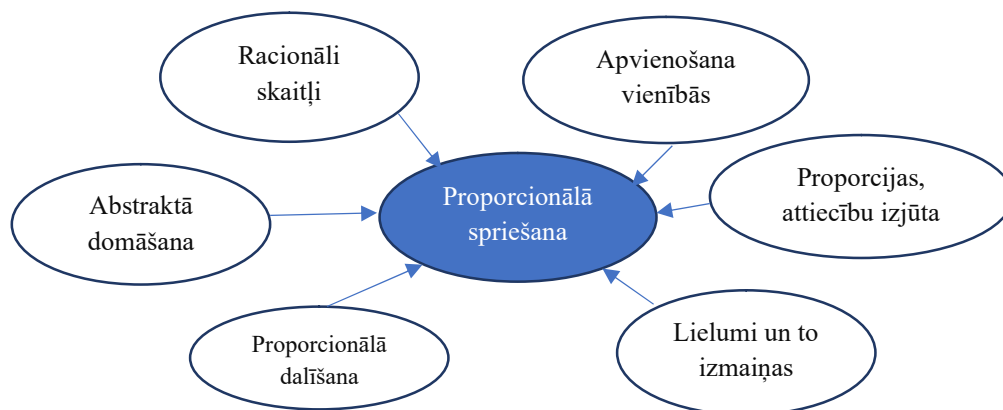


1.1. att. Savstarpēji saistīti proporcionālās spriešanas attīstoši koncepti [5]

Pieredze un attīstība vienā sadaļā, raisa izmaiņas un izaugsmi citā sadaļā, un attīstīta proporcionālo spriešanu. Ir svarīgi sniegt visu vecumu skolēniem dažādas proporcionālās spriešanas pieredzes nevis koncentrēties uz vienu konkrētu niansi, ko attīstīt, un mudināt viņus izdarīt pieņēmumus, patstāvīgi izstrādāt sakarības un vispārināt mācīšanos.

Proporcionālās spriešanas galvenā ideja ir tāda, ka tā izmanto reizināšanu un dalīšanu jeb multiplikatīvas darbības, lai salīdzinātu lielumus un lai aprakstītu, kā šie lielumi ir saistīti viens ar otru, piemēram, vienas lapas platums var būt četras reizes lielāks par citas lapas platumu, attēla augstums ir viena trešdaļa no cita attēla, bērna vecums ir pusotru reizi lielāks nekā citam bērnam utt. [26]. Tomēr reālās situācijās, tas ir krietni sarežģītāk nekā izteikt spriedumus, ka viens lielums ir vairākas reizes lielāks nekā cits. Lai pieaugušā vecumā cilvēks varētu veiksmīgi pielietot proporcionālas spriešanas prasmes, skolas laikā skolēnam ir jāattīsta dažādas citas matemātiskās prasmes, kas ir proporcionālas spriešanas pamatā. Pēc autores domām pilnvērtīgs proporcionālās spriešanas uzbūves modelis ir attēlots 1.2. attēlā, kas atsedz

sešas svarīgas matemātiskās prasmes un darbības, kas rosina domāt proporcionāli un kurām būtu vēlams pievērst pastiprinātu uzmanību, lai kvalitatīvi attīstītu proporcionālo spriešanu.



1.2. att. Proporcionālās spriešanas uzbūve [27]

Proporcionālā spriešana pēc būtības izpaužas dažādos kontekstos un 1.2. attēlā ir attēlota tikai daļa no prasmēm, kurās tā izpaužas un, ko ir vērts ņemt vērā mācot skolēniem proporcionālās spriešanas prasmes. Veidojot mācību materiālus un turpmāk pētījumā, autore galvenokārt koncentrējas uz šīm sešām prasmēm un darbībām, lai mērķtiecīgi virzītu, proporcionālās spriešanas attīstošu, mācību procesu. Turpmākajās šīs nodaļas rindkopās darba autore apskatīja, katru no šiem faktoriem atsevišķi.

1. Apvienošana vienībās ietver spēju iedomāties noteiktu daudzumu vienāda lieluma grupās (vai kopās) un spēj tās uztvert kā vienības. Taisnstūri (skatīt 1.3.attēlu) var uzskatīt gan par 1 taisnstūri (vienību), gan 4 kvadrātiem vienlaicīgi. Tur ir 5 vienības, katrā ir 4 kvadrāti.



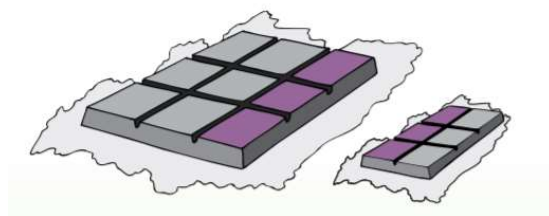
1.3.att. Kvadrātu apvienošana vienībās [5]

Veidot un izmantot arvien sarežģītākas vienību struktūras ir svarīgs mehānisms, kā attīstīt izsmalcinātāku spriešanu. Spēja veidot un lietot vienības ir viena no raksturīgākajām atšķirībām starp skolēniem, kuri labi lieto proporcionālo spriešanu, un tiem, kuri to nespēj [10]. Apvienošana grupās jeb vienībās ir pamats reizināšanai un spējai, kas liek saredzēt desmit atsevišķas vienības kā vienu desmitu un simts vienības kā desmit desmitus. Tas ir sarežģīti, jo desmit lietu apvienošana kā viena ir pretstatā bērnu sākotnējai izpratnei par skaitli [5].

2. Proporcijas un attiecību izjūta ir prasme, kas var būt jau iedzimta vai to var iegūt ar pieredzi, sasaistot savu intuitīvo spēju spriest ar situācijas kontekstu. Izpratne par proporcijām, relatīvām vērtībām un skaitļu attiecībām ir matemātikas un ikdienas pamatjautājumi. Spēja atšķir proporcionālas situācijas no neproporcionālām situācijām un

pielietot attiecīgas stratēģijas problēmrisināšanā, parāda spēju spriest proporcionāli. Skolēni ir spējīgi bez iepriekšējas mācīšanas izteikt pareizus lineārus spriedumus, kas dod bāzi turpmākiem proporcionālās spriešanas attīstīšanas posmiem [31].

3. Proportcionālās spriešanas pamatā ir arī izpratne par racionāliem skaitļiem, jo tie ir skaitļi, kurus var izteikt kā daļskaitļus. Tas var būt izaicinājums skolēniem saprast, kā šie skaitļi var tikt izteikti attiecībā pret citiem skaitļiem jeb kā salīdzināt daļas, ja veselums pret kuru ir izteikts daļskaitlis, nav viens un tas pats. Piemēram, skolēniem var būt grūtības aprakstīt situācijas, kad viena trešdaļa ir lielāka par pusi. Tas var būt sarežģīti, ja skolēniem nav bijusi pieredze ar daļskaitļu salīdzināšanu attiecībā pret to veselumiem. Prasme veikt darbības ar daļām ir būtiska, lai izprastu proporcionālo palielināšanu, samazināšanu vai dažādu lielumu salīdzināšanu, kad skaitliskie aprēķini neatspoguļo patieso situācijas kontekstu [31]. Piemēram, viena trešdaļa no lielā izmēra šokolādes tāfelīte var būt daudz lielāka par pusi no mini šokolādes tāfelītes. Tas attēlots 1.4. attēlā.



1.4. att. Daļu salīdzinājums atšķirīgiem veselumiem [5]

Daļskaitļi ir pamatā izpratnei par algebru un skaitļu blīvumu (starp jebkuriem diviem skaitļiem ir bezgalīgi daudzu skaitļu). Tie ir nepieciešami ikkatrā ikdienā, kad tiek lasītas kartes, ieguldīta nauda un aprēķinātas atlaides.

4. Izpratne par lielumiem un to izmaiņām proporcionālas spriešanas kontekstā ietver domāšanu par to, kā lielumi ir savstarpēji saistīti, mainās vai mainās atkarībā viens no otra (kā viena lieluma izmaiņas sakrīt ar izmaiņām citā). Piemēram, mobilā tālruņa plānam ir noteikta ikmēneša bāzes maksa un maksa par lietošanas minūti. Bāzes izmaksas ir nemainīgas. “Lietošanas minūtes” ir mainīgs lielums, kam ir proporcionālas izmaksas, pamatojoties uz izmantošanu. Vecāko klašu skolēni to pēta kā lineāru funkciju $y = ax + b$ [5]. Izpratni par lielumu attiecībām pastiprina un pielietojumu parāda tādi jēdzieni, kā tieši proporcionāli lielumi un apgriezti proporcionāli lielumi. Risinot dažādus prakses un zinātniskos uzdevumus, bieži jāatrod un jāizpēta funkcionālā sakarība starp parādībām vai mainīgu lielumu skaitliskām vērtībām. Padziļināta izpratne par tieši proporcionāliem un apgriezti proporcionāliem lielumiem, ļauj pieņemt pamatotus lēmumus par izdevīgāko piedāvājumu un izteikt loģiskus spriedumus par dažādu saistīto lielumu atkarību vienam no otra.

5. Proporcionālā dalīšana ir cieši saistīta ar proporcionālo spriešanu, jo tā ietver spriešanu par vienlīdzīgu veseluma sadalīšanu, relatīvās atrašanās vietas noteikšanu un divu dažādu lietu mēru salīdzināšanu, izmantojot tādas stratēģijas, kā minēšana un pārbaude, mērīšana, sadalīšana vienībās un/vai aprēķinot atšķirības. Tas var ietvert spriešanu par diviem lielumiem, lai atrastu trešo. Piemēram, trīs tenisa bumbas maksā 3,60 EUR, sešas maksās 7,20 EUR. Cik maksā 7? [5] Spēja veselumu sadalīt daļās parāda spēju uztvert situāciju, apstrādāt doto informāciju, lai pielietotu proporcionālo spriešanu praktiskā kontekstā un atrisinātu problēmu. Proporcionālā dalīšana var noderēt, lai precīzi aprēķinātu kāda lieluma vērtību vai arī palīdzēt intuitīvi noteikt aptuveno vērtību, lai virzītos tālāk uz kādas citas problēmas atrisinājumu, kuras risināšanas ceļā būtu nepieciešams izmantot kādu no proporcionālās spriešanas stratēģijām.

6. Svarīgs faktors proporcionālas spriešanas pamatā ir abstraktā domāšana. Proporcionālās spriešanas būtība ir skaitļa apsvēršana relatīvā izteiksmē nevis absolūtos skaitļos. Skolēni izmanto proporcionālu spriešanu brīdī, kad viņi aptver, ka pieaugums no 3 bērniem līdz 9 bērniem grupā ir daudz būtiskākas izmaiņas nekā izmaiņas, kad 100 bērnu grupa palielinās līdz 150 bērniem, jo pirmajā gadījumā skaitlis trīskāršojas, bet otrajā gadījumā pieauga tikai par 50% [5]. Prasme novērtēt lielumu procentuālo pieaugumu palīdz izprast un analizēt statistikas rādītājus un novērtēt iespējamās varbūtības. Abstraktā domāšana ir neatņemama sastāvdaļa proporcionālās spriešanas stratēģijas izveidē un pamatošanā.

Balstoties uz proporcionālās spriešanas uzbūvi, proporcionālās spriešanas attīstīšana ir darbs ar skolēnu domāšanu, būvējot stratēģijas, kā tikt galā ar proporcionālām situācijām. Proporcionālā spriešana ir viena no svarīgākajām prasmēm, kas jāattīsta pamatskolas klasēs, jo tā caurvijas ļoti daudzām tēmām visas pamatskolas garumā. Izmantojot proporcionālo spriešanu, skolēni nostiprina savas zināšanas sākumskolas matemātikā un veido pamatu vidusskolas matemātikai.

1.3. Pamatskolas skolēna spēja spriest proporcionāli

Bērni vecumposmā no 12 līdz 15 gadiem sasniedz pēdējo kognitīvās attīstības stadiju pirms domāšanas kā pieaugušajam. B. Inheldere un Ž. Piažē uzskatīja, ka izpratne par proporcionalitāti var tikt iegūta kognitīvās attīstības formālo operāciju stadijā un proporcionāla spriešana ir viens no kognitīvās attīstības indeksiem [20]. Ž. Piažē savos pētījumos par cilvēka kognitīvās attīstības posmiem, atzina, ka jaunieši pusaudžu vecumā ir spējīgi sākt domāt abstrakti, lai risinātu komplicētākas problēmsituācijas, kuras prasa stratēģiju izstrādi un rezultātu novērtēšanu. Šo attīstības stadiju Piažē nosauca par formālo operāciju stadiju, kuras laikā jaunieši ir spējīgi lietot hipotētiski deduktīvo domāšanu, lai

veiktu dažādas darbības. Atšķirībā no bērniem vecumposmā no 7 līdz 11 gadiem, kuri spēj darboties ar konkrētiem faktiem un tos aprakstīt, pamatskolas skolēni jau vairāk domā par pašām domām, spriedumiem, idejām, procesiem, sakarībām nekā par konkrētām lietām un ņem vērā visas eksistējošās faktoru kombinācijas, kas raksturo lielumu attiecības [23]. Lai gan pats Piažē savos pētījumos nav minējis terminu “proporcionāla spriešana”, tomēr daudzi viņa pēcteči savos pētījumos uzsver, ka tieši Piažē ir pirmais, kurš padziļināti ir pētījis šo komplicēto procesu, kā daļu no kognitīvās attīstības teorijas ceturrtā posma un aprakstījis proporcionālās spriešanas būtību.

Matemātiski proporcija sastāv no divu attiecību vienādības $\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}$, bet tās veidošanās rada psiholoģisku problēmu jaunākos skolēnos vecumposmā no 8 līdz 11 gadiem. Piažē pētījumi liecina, ka kognitīvās attīstības konkrētu operāciju stadijā skolēni nav spējīgi uztvert lielumus relatīvi, kā arī skolēnam trūkst pieredze, lai tiktu psiholoģiski galā ar šādām matemātiskām problēmām. Jaunākajos vecuma posmos skolēni var tikt galā ar daļskaitļiem un skaitliskām attiecībām vienādojot dažādi uzrakstītus daudzumus. Ir pierādījumi, ka arī jaunākajās klasēs skolēni ir spējīgi saskatīt likumsakarības starp dažādu lielumiem un parādībām, piemēram, izskatot spriedumu, ka Roma Itālijai ir tas pats, kas Parīze Francijai. Tāpēc rodas jautājums, kāpēc jaunākajos vecumposmos tomēr skolēns nespēj izprast proporcijas pamatbūtību un apzināti izveidot proporcijas. Atkārtoti pētījumi liecina, ka tikai pamatskolas vecuma posmā skolēni spēj mērķtiecīgi apzināties proporcionālās attiecības visdažādākajās situācijās, piemēram, telpā, ātrumā, varbūtībās utt. un patstāvīgi veidot un izprast sakarības [6]. Jaunākajos vecuma posmos spriešanas prasmes ir vairāk intuitīvas nekā pamatotas ar faktiem.

Pusaudža gados (no 12 līdz 18 gadu vecumam) jaunieši iegūst spēju sistemātiski domāt par visām loģiskajām attiecībām problēmas ietvaros. Pāreja no konkrētas domāšanas uz formālām loģiskām operācijām notiek laika gaitā. Katrs pusaudzis progresē savā tempā, attīstot savas spējas domāt komplicētākos veidos. Daži pusaudži var pielietot loģiskās darbības un spriešanas prasmes mācību darbam vēl pirms viņi var tās piemērot personīgām problēmām [21].

Cilvēka kognitīvās attīstības pētīšana parāda kurā vecumposmā skolēns ir spējīgs vispār sākt domāt par sarežģītākām problēmām, pielietot komplicētus matemātiskos modeļus un veidot zināšanu bāzi, lai attīstītu savas spriešanas prasmes. Pamatskolas laiks ir ļoti piemērots, lai attīstītu proporcionālās spriešanas prasmes, jo skolēns ir pietiekami nobriedis, lai sāktu izdarīt spriedumus un secinājumus kā pieaugušais. Pamatskolā skolēns gūst pieredzi domāt dažādi, apskatīt problēmu no dažādiem aspektiem, kas nepieciešama, lai vidusskolā skolēns būt spējīgs uztver jau daudz sarežģītākus tematus un pielietot attīstītās prasmes. Izpratnes

trūkums par proporcionalitāti noteikti nenozīmē, ka skolēni nevar izveidot proporcionālas attiecības vai risināt problēmas, tomēr tas iespaido proporcionālās spriešanas kvalitāti un spēju to pielietot kompleksās situācijās.

1.4. Proporcionālās spriešanas attīstīšanas metodes matemātikas stundās

Matemātikas mācību joma paredz, ka skolēns apgūst un jēgpilni izmanto matemātikas valodu, matemātikai raksturīgas stratēģijas un spriešanu, skaitļus un darbības ar tiem, algebras elementus un sakarības, figūras un to īpašības, varbūtību un prasmes darbā ar datiem [29]. Matemātikas jomas mērķis cieši savijas ar domu un mērķi par proporcionālās spriešanas spēju attīstīšanu, kas galarezultātā parāda skolēnu spēju pielietot matemātiku pieaugušā vecumā. Lai ļautu skolēniem vairāk izbaudīt mācības un domāt pašiem, svarīgi ir mācības veidot praktiskas un radošas. Radoša domāšana matemātikā arī būtiski sagatavo skolēnus viņu darbam nākotnē. Nākotnē darbinieki arvien mazāk būs atkarīgi no darbību veikšanas mehāniski, jo to var paveikt ar datoru palīdzību, bet vairāk būs jāpielieto problēmu risināšanas prasmes un jāspēj izstrādāt radoši risinājumi [26]. Veidojot matemātikas saturu, tiek runāts par to, ka skolēniem ir svarīgi attīstīt kompetenci lietot matemātiku dažādās situācijās, atlasīt piemērotus paņēmienus un metodes problēmu risināšanai, ļaut darboties radoši. Tieši radošums ir nepieciešams risinot jaunas problēmas, kombinējot jau agrāk iegūtās zināšanas un uzdodot jautājumus [4].

Attīstot proporcionālās spriešanas prasmes, skolēns pilnveido tādas caurviju prasmes, kā kritiskā domāšana un problēmu risināšana. Kritiskā domāšana un problēmrisināšana ir mērķtiecīga informācijas analīze. Tā ir skolēna spēja rūpīgi un mērķtiecīgi izzināt, analizēt un izvērtēt dažāda veida informāciju un situācijas, izprotot to kontekstu un pieņemot izsvērtus lēmumus [29]. Spriest matemātiski ir prāta ieradums un kā jau visi ieradumi, tie tiek attīstīti konsekventi tos pielietojot dažādos kontekstos. Jēdziens “konsekventi lietot” nozīmē, ka tas nav tikai vienreiz pastāstīt, kas ir spriešana matemātiski un uztvert, ka skolotāja darbs ir padarīts, bet gan atrast veidus, kā iekļaut spriešanas prasmju attīstību savās stundās regulāri [19]. Lai skolēniem attīstītu proporcionālās spriešanas prasmes, stundās regulāri ir jārada situācijas, kur tās nepieciešams pielietot. Lai sāktu mērķtiecīgi tās attīstīt, ieteicams ievērot sekojošus principus:

1. Sniegt skolēniem proporcionālas situācijas, kas aptver plašu kontekstu un ir saistītas ar viņiem aktuālām tēmām un lietām.
2. Piedāvāt problēmas, kurām ir gan kvalitatīvs, gan kvantitatīvs raksturs. Kvalitatīvās problēmās skolēniem ir iesaistīta proporcionālā spriešana bez nepieciešamības veikt darbības ar cipariem.

3. Palīdzēt skolēniem atšķirt proporcionālas un neproporcionālas situācijas.
4. Veicināt diskusijas un eksperimentus attiecībā uz attiecību prognozēšanu un salīdzināšanu.
5. Palīdzēt skolēniem saistīt proporcionālo spriešanu ar to, ko viņi jau zina.
6. Atzīt, ka proporciju risināšanas mehāniskās procedūras neattīsta proporcionālo spriešanu un skolēniem ir jābūt elastīgiem savā domāšanā un jāapgūst dažādas stratēģijas [5].

Skolēni bieži vien nepareizi domā, ka proporcionālās situācijās dotie lielumi ietekmē kāda darbība aprēķinos ir jāizmanto. Svarīgi skolēniem ir dod laiku, lai ikviens patstāvīgi varētu tikt galā ar dotajiem uzdevumiem, neradot skolēnos nepamatotu uztraukumu, par to, ka viņu domāšana tiks vērtēta. Svarīgi ir nevis novērtēt skolēnu domāšanu, bet izprastu kā skolēns domā, lai turpmākajā mācību procesā veidotu stratēģijas, kas vērstas uz konkrētu lietu izprašanu un proporcionālās spriešanas attīstīšanu [15]. Lai diagnosticētu, kā skolēns rīkojas konkrētās situācijās, kuras apraksta proporcionāli lielumi, nepieciešams uzdot jautājums par stratēģiju, kā skolēns ir domājis risinot kādu uzdevumu.

Lai palīdzētu skolēniem attīstīt spēju proporcionāli spriest, nepieciešama rūpība un pacietība. Ir svarīgi atzīmēt, ka skolēni neattīsta proporcionālu spriešanu vienā vai divās mācību stundās, tēmā, tematā vai pat mācību gadā. Tas ir process, kas sākas pēdējos sākumskolas gados un turpinās arī vidusskolā. Gaidīt, kad skolēni ļoti ātri attīstīs stabili izpratni par proporcionalitāti, ir neproduktīvi. Ir vairākas uz pētījumiem balstītas apmācību stratēģijas, kas var palīdzēt skolēnos attīstīt proporcionālo spriešanu.

Pirmkārt, skolotāja uzdevums ir piedāvāt dažādu veidu proporcionalitātes problēmas, ievērojot konsekventu secību. Būtiski proporcionālās spriešanas attīstīšanai ir ievērot balansu starp dažādu tipu proporcionalitātes problēmām, tās visas vienlīdz bieži iekļaujot savu stundu aktivitātēs. Tas nozīmē, ka vienlīdz bieži stundu aktivitātēs jāiekļauj situācijas, kuras apraksta lineāras sakarības starp diviem lielumiem un tikpat bieži jāiekļauj situācijas, kurās jāpielieto lielumu proporcionāla palielināšana vai samazināšana, vai jāapraksta attiecības starp diviem lielumiem utt. [13]. Bieži novērojama ir tendence, ka mācību grāmatas koncentrētas uz vienveidīgām proporcionalitātes problēmām nevis piedāvā dažādas problēmas sabalansētā veidā, tādēļ tā ir skolotāja atbildība, kā sabalansēt aktivitātes stundās, lai piedāvātu pēc iespējas plašāku ieskatu proporcionalitātes problēmās, lai bagātinātu skolēnu pieredzi turpmākai matemātikas apguvei.

Otrkārt, ieteicams izvēlieties uzdevumus, kuriem ir vairākas risinājumu stratēģijas un dažādi konteksti. Izmantojot dažādus kontekstus, skolēni var saskarties ar dažādām situācijām un scenārijiem, kas attiecas uz multiplikatīvām attiecībām. Viņu pieredze kļūst lielāka, tādā veidā arī attīstās prasmes šīs zināšanas pielietot nākotnē. Lai gan skolēni var nespēt atpazīt multiplikatīvas attiecības vienā situācijā, viņi varētu to spēt citā situācijā. Izmantojot dažādus

uzdevumus, rodas arī dažādas risinājumu stratēģijas. Skolēni var atbildēt uz jautājumiem dažādos veidos atkarībā no viņu izpratnes līmeņa [13]. Būtiski ir izvēlēties tādas sadarbības formas, kas ļautu skolēniem iepazīties ar citu skolēnu veidotajām stratēģijām, kas bagātinātu ikviena pieredzi un zināšanu kopumu.

Treškārt, stundās jādod iespēja balstīties uz skolēnu intuitīvām zināšanām. Caur pieredzi ikdienas dzīvē un saskarsmi ar idejām, kas nāk no sava iepriekšējā darba skolā, ikkatram skolēnam ir priekšzināšanas, kuras var izmantot proporciju uzdevumu risināšanā. Mācoties ir jāļauj izmantot savas iepriekšējās zināšanas un intuīciju, kas ir svarīga, jo tā veido personīgo sajūtu stratēģiju izstrādei. Tikpat būtiski ir skolēniem dot pietiekami daudz laika, lai attīstītu savu stratēģiju. Augsta līmeņa kognitīviem uzdevumiem ir nepieciešams laiks, lai skolēni varētu sevi izaicināt un apstrādāt savas idejas. Kad skolotāji pārāk agri sāk sniegt palīdzību piedāvājot īsceļus vai gatavas procedūras, uzdevuma sarežģītība tiek ievērojami samazināta. Skolēniem ir ievērojamas metakognitīvās spējas ieraudzīt un spriest par savu domāšanu bez tiešas pamācības [13]. Skolotājam nevajadzētu speciāli akcentēt vienu konkrētu stratēģiju proporcionālu problēmu risināšanai. Skolēni, kuri labprātāk izmanto sevis veidoto stratēģiju nevis vienu konkrētu algoritmu, kopumā veiksmīgāk attīsta proporcionālās spriešanas prasmes.

Ceturtkārt, būtiski ir, veidojot uzdevumus, izvēlēties vairākus datu attēlojumu veidus, lai attīstītu proporcionālās spriešanas veiklību. Grafiki, attēli un diagrammas ir svarīgi rīki, kas palīdz attēlot proporcionālas situācijas. Attēli palīdz saskatīt proporcionalitāti vizuāli un palīdz veidot iespējamo risināšanas stratēģiju. Tabulas palīdz izprast attiecības proporcionālās situācijās. Sākotnēji vajadzētu piedāvāt problēmas risināt lietojot objektus un attēlus, bet pakāpeniski pāriet uz sarežģītākiem datu atspoguļošanas veidiem un risināšanas metodēm [13]. Tāpat nepieciešams ievērot, lai skolēni vingrinātos gan nolasīt un analizēt dotus datus, gan paši veidotu dažādus proporcionālu lielumu datu atspoguļojumus.

Apkopojot ieteikumus, kā organizēt mācību procesu, lai attīstītu proporcionālās spriešanas prasmes, var secināt, ka atslēgasvārds veiksmīgas mācīšanas stratēģijas izveidei ir dažādība. Ar to saprotot, ka mācību procesā ir jādiferencē gan pats process, gan saturs, gan produkts, gan metodes, lai skolēniem piedāvātu pēc iespējas pilnvērtīgāku pieredzi proporcionālās spriešanas attīstīšanai visā pamatskolas matemātikas kursā. Skolēniem ir jādod laiks domāt, lai katrs individuāli izveidotu vai atrastu sev piemērotu stratēģiju kā tikt galā ar proporcionālu problēmu atrisināšanu un šīs prasmes spētu pielietot praksē.

Uzsākot pamatskolas gaitas, ir ļoti svarīgi, lai paši skolēni saprastu, ka viņu pašreizējais spriešanas veids par divu lielumu attiecībām, pieņemot, ka tas ir balstīts uz saskaitīšanas principiem, nav piemērots multiplikatīvu problēmu risināšanai, kuru viņi mēģina atrisināt.

Austriešu zinātnieks R. Karplus, kurš vairākkārtīgi pētīja jauniešu proporcionālās spriešanas prasmes, izstrādāja mācīšanās modeli, ko viņš sauca par mācīšanās ciklu (*learning cycle*), kas atvieglo jaunu spriešanas prasmju apguvi dabaszinātnēs, kas var būt kā pamats, lai mainītu skolēnu spriešanas stratēģiju par divu lielumu attiecībām no saskaitīšanas principiem uz reizināšanas principiem, tādējādi veidojot izpratni par lielumiem, ko saista proporcionālas attiecības.

Karplus pētījumi sākās pētot mācīšanās teorijas, no kurām viņš izvēlas konstruktīvisma mācīšanās teoriju, lai izveidotu mācīšanās ciklu. Konstruktīvisma mācīšanās teorija apgalvo, ka katrs apmācāmais konstruē informāciju (jēdzienus) pētot savu vidi un salīdzinot pašreizējo pieredzi ar savu pašreizējo izpratni. Ja pašreizējā pieredze neatbilst viņu cerībām, viņi kļūst nelīdzsvaroti un meklē skaidrojumus, lai pielāgotos un atgrieztos līdzsvarā [25].

Mācīšanās cikls ir izveidots balstoties uz Piažē kognitīvās attīstības teoriju un izveidota, kā apmācību stratēģija, kas ļauj īstenot šo teorētisko materiālu klasē. Mācīšanās cikla izveide un pielietošana ir pāreja no teorētiskas mācīšanās uz praktisku darbošanos stundā. Mācīšanās cikls sastāv no trīs apmācību posmiem: izpētes posma, stratēģijas ieviešanas, koncepta izgudrošanas posma un pielietošanas posma.

1. Izpētes posms (*exploration*) ir tas, kurā skolēnu uzmanība tiek koncentrēta uz apgūstamo. Pēc īsa tēmas un virziena izklāsta skolēni tiek mudināti mācīties caur savu pieredzi. Skolotājs ir atbildīgs par aktivitātēm, kas palīdzēs skolēniem atcerēties iepriekšēju pieredzi un palīdzēs apgūt jaunu pieredzi vēlākajām pielietojumu darbībām. Šī posma laikā skolēni saņem tikai minimālus norādījumus no skolotāja un patstāvīgi pēta materiālus vai idejas, lai sāktu sasaistīt savas atmiņas ar pašreizējo pieredzi [2].

2. Stratēģijas ieviešanas, koncepta izgudrošanas posmā (*invention*) skolotājs sāk aicināt skolēnu dalīties pieredzē par viņa izpētes posmu. Izgudrošanas fāzē par pamatu tiek izmantota konkrētā izpētes pieredze jēdziena vispārināšanai vai principa ieviešanai. Šī pieredze var būt pārskats par viņu iepriekšējo izpratni, neskaidrībām vai apšaubīšana par viņu izpratni, vai arī nesen izveidota izpratne, ko izraisījusi izpēte [2].

3. Pielietošanas posmā (*application*) skolotājs un/vai skolēni īsteno darbības, lai paplašinātu vai pielietotu izpratni, kas iegūta iepriekšējos posmos. Jauniegūtās prasmes tiek pielietotas jaunās situācijās un tiek paplašināts tā izmantošanas diapazons. Mācīšanās tiek panākta atkārtojot un praktizējot, lai jaunās idejas un domāšanas veidus varētu nostabilizēt. Pielietošanas posmu turpina ar vispārinājumiem padziļinot jēdziena izpratni un tā pielietošanas iespējas, analizējot, sintezējot un novērtējot jauniegūtās zināšanas [25].

Svarīga loma spriešanas prasmju attīstīšanas procesā ir novērtēšanai. Mācīšanās ciklā gan skolotājs, gan skolēns veic regulāru novērtēšanu, lai pārbaudītu, ko katrs zina un cik labi

viņi to zina visa cikla laikā, nevis tikai vienā fāzē vai atsevišķās fāzes daļās. Lai gan novērtēšana ir nepārtraukts process mācību laikā, to var pastiprināt realizējot diagnostisko, formatīvo vai summatīvo vērtēšanu. Izpētes posmā novērtēšana ir diagnosticējoša, lai uzzinātu, ko skolēni zina un cik labi viņi to zina. Izgudrošanas posmā lielākoties ir nepieciešams formatīvs vērtējums par to, kā skolēni veido izpratni par tēmu un ar to saistītiem jēdzieniem un vispārinājumiem. Posmā beigās, lai pārbaudīt skolēnu izpratni un kādā līmenī tā atbilst mācību rezultātiem var veidot summatīvu novērtējumu [25].

Mācīšanās cikls var tikt realizēts gan stundas, gan tēmas ietvaros, jo nav noteikts, cik katram posmam ir jābūt garam, lai tas strādātu efektīvi. Ievērojot visus mācīšanās cikla posmus, skolotājs nodrošina skolēnam gan iespēju domāt, gan izveidot savu stratēģiju, gan to pielietot, tādā veidā virzot skolēnu uz proporcionālās spriešanas prasmju attīstīšanu. R. Karplus mācīšanās cikla veidošanas pamatprincipi un struktūra ir pamats darba autores pētījuma praktiskajai daļai, kurā tiek aprobēts mācīšanās cikls proporcionālās spriešanas attīstīšanai.

2. PROPORCIONĀLĀS SPRIEŠANAS ATTĪSTĪBA PAMATSKOLAS MATEMĀTIKAS MĀCĪBU PROGRAMMĀ

2.1. Proporcionālā spriešana mācību programmā

Valsts pamatizglītības standartā ir noteikts pamatizglītības matemātikas mācību jomas sasniedzamais rezultāts – skolēns situācijās ar matemātisku, citu mācību jomu un reālu kontekstu, jēgpilni lietojot matemātikas instrumentus, veic aprēķinus, apstrādā datus, lieto figūru īpašības, saskata sakarības starp lielumiem, spriež vispārīgi un matemātiski modelē, problēmsituācijās izvēlas atbilstošu pieeju vai paņēmienu, apzinās pierādījuma nepieciešamību un veido pamatodus spriedumus [17]. Proporcionālās spriešanas apguve pamatskolas kursā atbilst visiem šī sasniedzamā rezultāta aspektiem un tās pakāpeniska attīstīšana pamatskolas kursā, mērķtiecīgi virza mācību procesu uz sasniedzamo rezultātu.

Lai arī mācību programmā un pamatizglītības standartā nav atrodams jēdziens “proporcionālā spriešana”, ideja par to, autore sprāt, ir klātesoša visā matemātikas saturā. Proporcionālā spriešana caurvijas cauri visam pamatskolas kursam, vispirms padziļināti apgūstot un analizējot dažādus lielumus un attiecību veidošanos, pēc tam, pielietojot jau zināmo, prasmes tiek pārnestas jaunu problēmsituāciju risināšanā. Pirms proporcionālās spriešanas attīstīšanas pamatskolas kursā, skolēni jau sākumskolā vingrinās saskatīt sakarību, kā dažādās situācijās mainoties vienam lielumam, mainās arī kāds cits lielums, piemēram, ilgāku laiku braucot ar auto uz priekšu, tiek nobraukts arvien lielāks attālums.

Mācību priekšmeta programmas paraugs matemātikā Skola 2030 ir izveidots tā, lai secīgi padziļinātu skolēnu zināšanas, būvējot jaunas zināšanas uz jau esošo zināšanu un pieredžu bāzes. Jau 3.– 4. klases posmā skolēni risina situāciju uzdevumus, kuros pa soļiem aprēķina nezināmo lielumu, lietojot dalīšanu, reizinašanu. 4. klases tematā “Kas kopīgs iepirkšanās un kustības matemātiskajā aprakstā?” skolēni sāk veidot izpratni par kopīgo dažādās situācijās, kuras raksturotas ar proporcioniāliem lielumiem. 5. klases 8. tematā “Kā vizuāli attēlo sakarību starp lielumiem?” skolēni mācās sakarību starp tieši proporcioniāliem lielumiem attēlot grafiski, mācās nolasīt informāciju no grafika. 6.1. tematā “Kā kopumu sadala noteiktā attiecībā?” skolēni iepazīst jēdzienus “tieši proporcioniāli” un “apgriezti proporcioniāli”, mācās aprēķināt nezināmo lielumu, lietojot dažādus paņēmienu, pieraksta veidus [30]. Tādu piemēru no mācību programmas ir daudz un, lai mērķtiecīgi ilgtermiņā strādātu ar proporcioniālās spriešanas attīstīšanu, ir jāveido plāns kad un kā to darīt, lai virzītu mācīšanos uz konkrētiem sasniedzamajiem rezultātiem saistībā ar proporcioniālo spriešanu. Autore darba turpinājumā analizē 5. – 9. klašu matemātikas mācību programmu, jo šajā vecumposmā skolēni ir sasnieguši vēlamo kognitīvās attīstības līmeni, lai spriestu

proporcionāli, tādēļ šajā posmā ir īpaši svarīgi konstruēt zināšanas un attīstīt prasmes, lai pilnveidotu skolēnu domāšanu. Katrā klašu grupā no 5. – 9. klasei ir atlasīti temati un aktivitātes no mācību programmas, kas virza uz proporcionālās spriešanas pilnveidi, lai atvieglotu ilgtermiņa plāna izveidi proporcionālās spriešanas mērķtiecīgai attīstīšanai, tai pat laikā saglabājot sasaisti ar mācību programmu.

2.2. Proporcionalā spriešana 5. klases mācību programmā

Liela uzmanība 5.klases matemātikas mācību programmā ir pievērsta darbībām ar daļām un izpratnei par tām. Tiek ieviests jēdziens procents un skatītas sakarības starp dažādiem lielumiem, kas savukārt ir pamats, lai turpmāk veiksmīgi veidotu attiecības un proporcijas, un interpretētu sakarības starp proporcionāliem lielumiem. Lai gan 5. klasē skolēnu domāšana ir vairāk koncentrēta uz konkrētu darbību izpildi nevis domāšanu abstrakti, 5.klase ir nozīmīgs posms, lai veidotu pamatus proporcionālai spriešanai un nostiprinātu matemātiskās prasmes, kas turpmākajos gados palīdzētu pamatot savus spriedumus ar aprēķiniem. Kamēr mācību programmas saturs vairāk koncentrējas uz matemātisku darbību apgūšanu, autoresprāt, paralēli būtu vēlams mērķtiecīgi attīstīt tādas prasmes, kā teksta lasīšana ar izpratni, risinājuma plānošana un secinājumu formulēšana, lai turpmākajā mācību procesā skolēniem būtu ieradumi, kas ir noderīgi proporcionālās spriešanas apgūvē. 2.1. tabulā ir apkopoti temati un aktivitātes no mācību programmas, kuras konkrētā tematā ved uz proporcionalitātes izpratni un proporcionālo spriešanas prasmju pilnveidošanu, un pēc tabulas ir veikta analīze kādā veidā šīs aktivitātes ir svarīgas proporcionālās spriešanas attīstīšanai.

2.1. tabula

Temati un aktivitātes proporcionālās spriešanas pilnveidošanai 5. klasē [30]

Temats	Aktivitāte, kas attīsta proporcionālo spriešanu (no temata apguves norises)
5.3. Kā skaidro un lieto daļas pamatīpašību?	Spriež un plāno, kā rīkoties, ja uz vienas skaitļu taisnes jāatliek daļas ar dažādiem saucējiem, piemēram, $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$ un $\frac{7}{8}$.
	Vingrinās saīsināt un paplašināt daļas, mācās veidot pierakstu, kurā parāda reizinājumu/dalījumu gan ar skaitītāju, gan saucēju.
5.4. Kā vienu skaitli izsaka kā otra skaitļa daļu?	No nogriežņa atdala kādu tā daļu; uzzīmē visu nogriezni, ja dota noteikta šī nogriežņa daļa.
	Spriež un secina, kā var salīdzināt divu vai vairāku ģimeņu izdevumus, basketbolistu metienu precizitāti, produktu sastāvu u. tml., vienu lielumu izsakot kā otra lieluma daļu.

5.7. Kā lieto decimāldaļas un procentus?	Plaknes figūrā parāda/iekrāso figūru, kas atbilst noteiktiem procentiem no dotās figūras (sadalot to vienādās daļās) vai no dotās figūras laukuma.
	Vingrinās noteikt aptuvenu rezultātu pirms aprēķinu veikšanas (nosaka procentus no veselā).
	Aprēķina procentus no skaitļa; aprēķina veselo, ja zināma procentu skaitliskā vērtība.
	Lieto prasmi aprēķināt procentus no skaitļa praktiskos kontekstos (situācijas aprakstā izmantoti ne vairāk kā 3 lielumi).
	Spriež par iespējam salīdzināt lielumus, kas izteikti procentos, ja veseli ir vienādi vai dažādi lielumi.
5.8. Kā vizuāli attēlo sakarību starp lielumiem?	Mācās veidot koordinātu plakni, un izvēlēties vienības – grafiski attēlo tabulas veidā uzdotu sakarību, kas apraksta vienmērīgu kustību (dotas divas laika un tām atbilstošās veiktā ceļa skaitliskās vērtības). Spriež par citiem laika momentiem, “neformāli” secina par nepārtrauktību, piemēram, ka veiktais ceļš palielinās ik brīdi. Izsaka domas, kā to parādīt grafikā.
	Izmantojot kustības grafisko attēlojumu (uz horizontālās ass ir laiks, uz vertikālās ass – ceļa garums), vingrinās nolasīt informāciju par lielumiem.
	Spriež, kā tajā pašā koordinātu plaknē attēlot kustību, kuru raksturo 2 reizes lielāks/mazāks ātrums. Domā, ko vēl var secināt no abu sakarību grafikiem.
	Raksturo jaunu/nepazīstamu situāciju pēc tās grafiskā attēla un formulē secinājumus, piemēram, temperatūras maiņa siltumnīcā diennakts laikā; buru laivas attālums no piestātnes atkarībā no laika.

Tematā „Kā skaidro un lieto daļas pamatīpašību?” skolēni apgūst darbības ar daļām un praktiski pēta kā attēlot dažādas daļas, lai tās varētu salīdzināt. Daļskaitļi ir pamatā izpratnei par attiecībām, tādēļ svarīgi ir ne tikai nostiprināt mehāniskas darbības ar daļskaitļiem, bet arī veidot skolēnu izpratni, ko dažādās situācijās apzīmē ar daļskaitli. Vingrinoties uz vienas taisnes atlikt daļas ar dažādiem saucējiem, skolēni saskaras ar proporcionālo dalīšanu. Lai arī tā nav vienīgā stratēģija, ko var izmantot, lai atrisinātu situāciju, bet tā ir iespēja pievērst uzmanību tieši proporcionālai dalīšanai, akcentējot stratēģiju, kas attīsta proporcionālās spriešanas prasmes. Būtiski ir tas, ka temata apguves laikā tiek attīstīta skolēnu skaitļu izjūta un pilnveidotas spriedumu veidošanas un pamatošanas prasmes.

Tematā “Kā vienu skaitli izsaka kā otra skaitļa daļu?” skolēni padziļina izpratni par daļu lietojumu reālos un matemātiskos kontekstos. Lai gan tematā netiek lietots jēdziens proporcionāla palielināšana/ samazināšana, praktiski skolēnu to veic no nogriežņa atdalot kādu tā daļu vai zīmējot visu nogriežni, ja dota noteikta šī nogriežņa daļa. Izsakot vienu lielumu kā otra lieluma daļu, skolēni vingrinās saskatīt un veidot attiecības (jēdzienu “attiecības” vēl nelieto) starp lielumiem, lai veidotu bāzi uz kuras attīstīt prasmes saskatīt sakarības starp lielumiem un tās interpretēt.

Tematā „Kā lieto decimāldaļas un procentus?” skolēni iepazīstas ar jēdzienu procenti un vingrinās tos aprēķināt un salīdzināt, tādā veidā būvējot izpratni par skaitļu attiecībām un neapzināti veido proporcijas un attiecības, lai aprēķinātu nezināmo lielumu jaunās situācijās. Tāpat skolēni vingrinās atpazīt tādas situācijas, kurās procentu lietojums ir pamatots un efektīvs, lai salīdzinātu lielumus, un tālākās klasēs varēs pamatot konkrēta paņēmiena izvēli sadzīves situāciju risināšanā, veidojot procentuālas attiecības starp lielumiem un skaidrojot to nozīmi. Skolēni tematā risina situāciju uzdevumus, kuros veido attiecības starp dažādiem lielumiem un izsaka tās procentos, tādā veidā attīstot ieradumu lielumu salīdzināšanai izmantot arī procentus. Procentu izmantošana ir viena no stratēģijām, ko izmantot proporcionālās situācijās.

Viena no svarīgākajām skolēnu atziņām – procenti “vieni paši” neko neizsaka. Šajā tematā skolēni iemācās aprēķināt procentus no skaitļa, praktiskos kontekstos – no lieluma skaitliskās vērtības. Kompleksus situāciju uzdevumus, kuros, piemēram, vienlaikus jādomā gan par procentiem, gan par sakarībām “par tik vairāk/mazāk”, skolēni apgūs 6. klases tematā “Kā sadzīves situācijās izmanto procentus?” [30].

Tematā “Kā vizuāli attēlo sakarību starp lielumiem?” skolēniem ir iespēja pašiem veidot spriedumus par proporcionāliem lielumiem un atklāt sakarības, tās atveidojot vizuāli. Šis temats ir piemērots, lai ļautu skolēniem pašiem veikt atklājumus par lielumu savstarpējām sakarībām, balstoties uz līdzšinējo pieredzi. Atšķirībā no citiem 5. klases tematiem, kuros lielāka uzmanība tiek pievērsta mehānisku darbību un algoritmu apgūšanai, šajā tematā skolēni vairāk strādā ar savām spriešanas prasmēm, lai izprastu sakarības un prognozētu turpinājumu. Lai gan 5. klasē proporcionalitātes jēdzieni netiek ieviesti, prasme saskatīt un attēlot sakarību starp dažādiem lielumiem tiešā veidā ved uz tiešās un apgrieztas proporcionalitātes izpratni 6. klases pirmajā tematā.

2.3. Proporcionalā spriešana 6. klases mācību programmā

Proporcionalās spriešanas attīstīšanai 6. klase ir nozīmīgs posms. Šajā posmā tiek ieviesti tādi svarīgi jēdzieni, kā skaitļu attiecības, tieši proporcionāli lielumi un apgriezti proporcionāli lielumi. Šajā matemātikas apguves posmā skolēni risina, spriež, domā un skaidro dažādas skaitļu attiecības un kā tās mainās, mainoties dažādiem lielumiem. 6. klasē skolēni ir sasnieguši vecumposmu, kurā mainās viņu domāšana. Lai arī ne visi skolēni jau ir spējīgi spriest abstrakti, tomēr arvien lielāku uzmanību ir vēlams pievērst tieši domāšanas stratēģijai, lai virzītu skolēnu par problēmām domāt padziļināti un situācijas analizēt nevis koncentrēties uz konkrētu algoritmu lietošanu. 2.2. tabulā ir apkopoti temati un aktivitātes no

mācību programmas, kuras konkrētā tematā ved uz proporcionalitātes izpratni un proporcionālās spriešanas pilnveidošanu.

2.2. tabula

Temati un aktivitātes proporcionālās spriešanas pilnveidošanai 6. klasē [30]

Temats	Aktivitāte, kas attīsta proporcionālo spriešanu (no temata apguves norises)
6.1. Kā kopumu sadala noteiktā attiecībā?	Viss temats (Pielikumā Nr.1. pievienota visa temata norises gaita no mācību programmas).
6.4. Kā attēlo un skaitliski raksturo telpiskus ķermeņus?	Spriež, kā mainās taisnstūra paralēlskaldņa tilpums, ja kādu no tā izmēriem palielina/samazina noteiktu skaitu reižu, visus izmērus palielina/samazina noteiktu skaitu reižu, vienu izmēru palielina noteiktu skaitu reižu, bet citu noteiktu skaitu reižu samazina.
6.5. Kā sadzīves situācijās izmanto procentus?	Vingrinās saskatīt un formulēt dažādas sakarības starp lielumiem, ja tie attēloti shematiskā zīmējumā (kā viena figūra, kā divas figūras), lietojot jēdzienus “daļa”, “procenti”, “skaitļu attiecība”.
	Skicē, spriež un veic nepieciešamos aprēķinus, plānojot dārza, dzīvokļa, sporta laukuma u. tml. iekārtošanu, ievērojot nosacījumus, kas raksturoti matemātiski. Veic aprēķinus, lietojot lielumu attiecību, procentus, daļas.
	Lasa autentiskus tekstus un izmanto doto informāciju, lai salīdzinātu divu figūru lielumus pēc iespējas dažādos veidos, lietojot matemātisko valodu un pierakstot salīdzināšanu.
	Lieto procentus, lai atrisinātu uzdevumu ar dabaszinātņu mācību jomas saturu, piemēram, par masas daļām.
	Risina situāciju uzdevumus, kuros vienlaikus izmanto procentus un citas iepriekš apgūtās zināšanas, prasmes, piemēram, matemātiski apraksta sakarības “par tik vairāk/mazāk”, “tik reižu vairāk/mazāk”, veido shematisku zīmējumu situācijas attēlošanai.

Temats „Kā kopumu sadala noteiktā attiecībā?” ir par skaitļu attiecībām, proporcionalitātes izpratni, proporcionālu samazināšanu/palielināšanu, attiecību pielietojumu praktiskos kontekstos, kas tiešā veidā mijiedarbojas ar proporcionālās spriešanas prasmēm. Tas ved skolēnus uz tādiem valsts pamatizglītības standarta sasniedzamajiem rezultātiem kā:

- ✓ 6.4.2.4. Ilustrējot ar piemēriem, skaidro, kas ir tieši proporcionāli lielumi, apgriezti proporcionāli lielumi, risina uzdevumus par proporcionāliem lielumiem, spriežot un veicot secīgas darbības, izvēloties sev piemērotu paņēmieni;
- ✓ 6.4.2.6. Skaitli, lielumu sadala noteiktā attiecībā, piemēram, $a : b : c$, situācijās ar matemātisku, reālu kontekstu;
- ✓ 6.4.2.7. Lieto mērogu matemātiskā, reālā kontekstā.

Šie un citi sasniedzamie rezultāti, pamatskolas kursu beidzot, ved uz sasniedzamo rezultātu: skaidro sakarības starp lielumiem proporcijā, ilustrējot ar piemēriem (9.4.2.4.) [17].

Šajā tematā skolēni darbojas ar skaitļu attiecībām – veido tās, lasa autentiskus tekstus, piemēram, receptes, nosaka attiecības no shematiska zīmējuma un lielumu attiecību pieraksta, kā skaitlisku attiecību. Turpinājumā lieto zināšanas par attiecībām, lai sadalītu nogriezni noteiktās garumu attiecībās vai sadalītu figūras noteiktās laukuma attiecībās. Situācijā ar sadzīvīsku kontekstu lieto lieluma sadalīšanu noteiktā attiecībā (ar nezināmo jebkurā pozīcijā), ko varētu atrisināt ar proporcijas pamatīpašību, bet šajā tematā skolēni vēl tikai spriež par divu attiecību vienādojumu, nelietojot proporcijas matemātisko modeli, tādā veidā attīstot proporcionālo spriešanu nevis izmantojot konkrētu algoritmu. Skolēni iepazīstas ar proporcionālās dalīšanas uzdevumiem, kuros skaitlis jāsadala vairākās daļās tā, lai starp tām pastāvētu prasītā attiecība. Temata ietvaros var veidot ieradumu saskatīt un veidot dažādas vienības, lai efektīvāk atrisinātu proporcionālas problēmas.

Temata turpinājumā skolēni iepazīstas ar tieši proporcionāliem lielumiem jeb sasaista jau esošās zināšanas ar jauno kontekstu un jēdzienu. Skolēni jau 5.klasē sprieda par to, ja palielinās viens lielums, tad palielinās arī kāds cits lielums un grafiski attēloja šādas sakarības, bet tagad lieto jēdzienu tieši proporcionāli lielumi. Skolēni vingrinās aprēķināt nezināmus lielumus, ja zināms, ka lielumi ir tieši proporcionāli un risināt situāciju uzdevumus, kuros lielumi ir tieši proporcionāli, izvēloties paņēmieni un pieraksta veidu. Šajā tematā praktiskā kontekstā tiek apskatīts attiecību lietojums, tai skaitā veidota izpratne par mērogu un veikti praktiski aprēķini, lai pēc mēroga noteiktu attālumu dabā, kas tiešā veidā sasaucas ar proporcijas lietošanu praktiskā kontekstā. Skolēni vingrinās attiecības proporcionāli palielināt un samazināt, nosaucot piemērus skaitļu pāriem, kas savstarpēji attiecas tāpat kā dota attiecība, tādā veidā veidojot patiesas proporcijas.

Temata noslēgumā skolēni apgūst jēdzienu apgriezti proporcionāli lielumi un skaidro kādās situācijās ir novērojami apgriezti proporcionāli lielumi. Skolēni vingrinās aprēķināt nezināmus lielumus, ja zināms, ka lielumi ir apgriezti proporcionāli. Apgūstot tematu „Kā kopumu sadala noteiktā attiecībā?”, skolēniem ir visas nepieciešamās pamatzināšanas, lai nākotnē ar izpratni varētu raksturot proporcionālas attiecības starp lielumiem un tās pielietot. Skolotāja uzdevums temata apguves laikā ir piedāvāt pēc iespējas daudzveidīgākus kontekstus, iekļaut gan kvalitatīvas, gan kvantitatīvas problēmas, ļaut atklāt skolēniem dažādus attiecību attēlošanas veidus un dot laiku domāt par to, ko nozīmē proporcionālas attiecības starp lielumiem.

Tematā „Kā attēlo un skaitliski raksturo telpiskus ķermeņus?” skolēni lieto prasmi proporcionāli palielināt/ samazināt kāda telpiska ķermeņa izmēru un spriež kā mainās ķermeņa tilpums, izmantojot zināšanas par skaitļu attiecībām un tieši un apgriezti

proporcionāliem lielumiem. Skolēni šajā tematā apgūst telpisko spriešanu un sasaista un izmanto iepriekš apgūto praktiskā kontekstā.

Tematā „Kā sadzīves situācijās izmanto procentus?” skolēni padziļina izpratni par procentiem, kuru apguvi uzsāka 5. klasē. Temata ietvaros skolēni apgūst, ka skaitlis a kā skaitļa b procenti nozīmē to pašu, ko skaitlis a kā skaitļa b daļa (a pret b ; $a : b$; $\frac{a}{b}$), lieto jēdzienus daļa, skaitļu attiecība un autentiskās situācijās veido daļu attiecības, lai aprēķinātu procentus no vesela skaitļa vai visu skaitli, ja zināmi to procenti. Tāpat šī temata norises gaita ir vērsta uz iepriekšējo zināšanu bāzes par lielumu attiecībām un to izmantošanu citā pieraksta veidā. Situāciju uzdevumus skolēni risina veidojot attiecību vienādības ar nezināmo lielumu tajās, bet skaitliskai atrisināšanai izmanto paņēmienus ar daļu paplašināšanu. Temata apguves laikā skolēni pielieto zināšanas par proporcionālu palielināšanu/ samazināšanu salīdzinot dažādus lielumus, kuri doti procentos vai izteikti kā attiecība. Sastopoties ar situācijām, kurās jāizsaka spriedumi “par tik vairāk/mazāk” vai “tik reižu vairāk/mazāk”, skolēni sastopas ar atšķirību starp procentuālu pieaugumu no absolūta pieauguma, kas attīsta proporcionālo spriešanu. Temats „Kā sadzīves situācijās izmanto procentus?” attīsta prasmi lietot procentu aprēķinus, kā risināšanas stratēģiju, spriežot par proporcionālām situācijām.

Salīdzinot jauno mācību programmu Skola 2030 [30] ar 2005. gadā veidoto matemātikas mācību programmas paraugu [7], priekšmeta saturs 6. klasē ir būtiski mainījies, jo Skola 2030 vairs neparedz definēt proporciju un iepazīstināt skolēnus ar proporcijas pamatīpašību jau 6. klasē, kā tas bija līdz Skola 2030 mācību programmas ieviešanai skolās. Tā vietā vispirms attīsta izpratni par attiecībām, tieši un apgriezti proporcionāliem lielumiem un to pielietojumu dažādās situācijās, kurās iepriekš skolēni tehniski būtu risinājuši izmantojot proporcijas pamatīpašību, neizprotot sakarību starp lielumiem sadzīviskā kontekstā. Šī izmaiņa attīsta skolēnos proporcionālās spriešanas prasmes ilgtermiņā, vispirms ļaujot pašiem izprast attiecības starp lielumiem, procentiem un skaitliskām attiecībām. Skolēniem ir iespēja vispirms domāt par dažādiem risinājumu veidiem, kā atrast nezināmo lielumu proporcijā pirms tie tiek iepazīstināti ar proporcijas pamatīpašību un tehniski atrisina attiecību vienādības.

2.4. Proporcionālā spriešana 7. klases mācību programmā

Noslēdzot 6. klasi, skolēniem ir zināšanas kā skaitli, lielumu sadala noteiktā attiecībā, piemēram, $a : b : c$, situācijās ar matemātisku, reālu kontekstu. Skolēni ir apguvuši tiešās un apgrieztās proporcionalitātes jēdzienus un mēģinājuši saskatīt sakarības starp proporcionāliem lielumiem. 7. klase aizsāk jaunu posmu un virzību uz sasniedzamajiem rezultātiem 9. klasi beidzot, kā piemēram, skaidro sakarības starp lielumiem proporcijā,

ilustrējot ar piemēriem, un izskata alternatīvas pieejas risinājumam un izvērtē risinājumu efektivitāti, apzinoties, ka iespējami dažādi risinājuma ceļi un dažkārt arī dažādi atrisinājumi [17]. 2.3. tabulā ir apkopoti 7. klases temati un aktivitātes no mācību programmas, kuras palīdz izprast proporcionalitāti un attīsta proporcionalās spriešanas prasmes.

2.3. tabula

Temati un aktivitātes proporcionalās spriešanas pilnveidošanai 7. klasē [30]

Temats	Aktivitāte, kas attīsta proporcionalo spriešanu (no temata apguves norises)
7.3. Kā raksturo sakarību starp mainīgiem lielumiem?	Vingrinās veidot formulas (sakarībai starp tieši proporcionaliem lielumiem) situācijās ar pazīstamu kontekstu vai saistītu ar pieredzi, raksturo burtu izvēli.
	Lasa situācijas aprakstu (sakarība starp tieši proporcionaliem lielumiem), sadarbojas, raksturo lielumus, formulē sakarību starp tiem, attēlo grafiski, pieraksta ar formulu, salīdzina ar citu grupu izveidotajiem grafikiem, pieņemto apzīmējumu, vienību izvēli, formulu pierakstiem.
	Raksturo, kā laikā mainās nobrauktā ceļa garums vienmērīgā kustībā (vidējais ātrums ir nemainīgs/dots), attēlo sakarību grafiski, pieraksta ar formulu. Spriež, kā mainītos grafiks, ja ātrums būtu lielāks, mazāks. Skaidro, kā salīdzināt divu/triju objektu vidējos ātrumus pēc grafikiem, kuros attēlots noteiktā laikā veiktais ceļš.
	Vingrinās raksturot situāciju pēc tās grafiskā attēla, lieto jēdzienus “neatkarīgais mainīgais”, “atkarīgais mainīgais”.
	Apdomā, min piemēru apgriezti proporcionaliem lielumiem, uzklausa klasesbiedru piemērus, spriež par iespējam pierakstīt aplūkotos piemērus ar formulu.
	Apkopo tabulā pēc iespējas vairāk konkrētas taisnstūra malu garumu vērtības, ja dots taisnstūra laukums. Iekārto koordinātu plakni, izvēlas burtus mainīgo apzīmēšanai, sakarību attēlo grafiski, pieraksta ar formulu. Vingrinās nolasīt informāciju no grafika, izsaka domas par lielumu iespējamām vērtībām, kā saprast grafika “tuvošanos” asīm, u. tml.
7.4. Kā pieraksta un pēta funkcijas, kuru grafiks ir taisne?	Vārdiski raksturo lineāras funkcijas īpašības pēc tās grafika, piemēram, nosaka, kā mainās funkcijas vērtība, ja argumentu palielina/samazina par noteiktu skaitli; tās argumenta vērtības, kurām funkcijas vērtība ir pozitīva/negatīva.
	Skaidro sev piemērotāko lineāras funkcijas grafika uzzīmēšanas algoritmu, arī vienību izvēli atkarībā no koeficientu skaitliskajām vērtībām. Nosaka atbilstošus vienību nogriežņus, lai grafiski attēlotu dotas funkcijas, piemēram, $y = 50x + 30$
	Lieto funkcijas definīciju, lai noteiktu, kuras sakarības (tās, piemēram, uzdotas ar tabulu) ir funkcijas. Skaidro, kā grafiskais attēlojums palīdz saprast, vai sakarība ir/nav funkcija. Sakarība starp tieši proporcionaliem lielumiem ir lineāras funkcijas piemērs.
	Interpretē uzdotu lineāru funkciju, vārdiski raksturojot atbilstošu dzīves situāciju, matemātikas vai citas jomas kontekstu.

7.7. Ko nozīmē pārveidot izteiksmi ar mainīgo lielumu?	Daudzveidīgos citu mācību jomu un praktiskos kontekstos skaitļus, lielumus palielina/samazina par noteiktu procentu skaitu. Procentuāli salīdzina, skaidrojot, kas konkrētajā gadījumā ir lielums, attiecībā pret kuru salīdzina (100 %).
	Vārdisku tekstu, kas satur sakarības “par tik vairāk/mazāk”, “tik reižu vairāk/mazāk”, “tik procentu no”, “par tik procentiem vairāk/mazāk/palielinot/ samazinot”, pieraksta algebriskas izteiksmes veidā.
7.8. Kādi ir paņēmieni nezināmā noteikšanai?	Lieto lineāru vienādojumu, modelējot situāciju, kuras aprakstā lietoti jēdzieni “tik reižu vairāk/mazāk”, mācās formulēt jautājumus situācijas izpratnei, precizēšanai.
	Raksturo atšķirību starp reālās situācijas atrisinājumu un atbilstošā vienādojuma atrisinājumu.
	Lieto lineāru vienādojumu, modelējot pazīstamas un jaunas situācijas, kuras raksturotas ar daļām, procentiem, procentuālajām izmaiņām u. tml.
	Nosaka un skaidro, vai lielumi ir tieši proporcionāli. Spriežot, lietojot agrāk apgūtos risināšanas paņēmienus un pieraksta veidus, aprēķina nezināmo lielumu situācijā, ko raksturo proporcionāli lielumi.
	Izmantojot strukturētu informāciju, piemēram, tabulu (2 kolonnas) ar proporcionālu lielumu skaitliskajām vērtībām, spriež par iespējām izveidot vienādojumu nezināmā lieluma aprēķināšanai.
	Lieto proporciju, modelējot situāciju ar reālu, matemātisku kontekstu, starp lielumiem pastāvošo sakarību raksturošanai izmantojot arī procentus, aprēķina proporcijas nezināmo locekli, izvēloties sev piemērotāko paņēmieni – pārveidojot proporciju par lineāru vienādojumu, atrodot skaitliskās attiecības vērtību u. tml.
Vingrinās no dotas skaitļu kopas izvēlēties skaitļus un veidot proporcijas.	

Tematā „Kā raksturo sakarību starp mainīgiem lielumiem?” skolēni veido izpratni par sakarības pierakstu ar formulu, padziļinot izpratni par tieši proporcionāliem un apgriezti proporcionāliem lielumiem, to grafisko attēlojumu. Arvien vairāk skolēnu 7. klasē ir spējīgi uztvert lielumus un to izmaiņas abstrakti, tādēļ šajā tematā svarīgi, lai skolēni sakarības starp lielumiem raksturotu vārdiski nevis tikai ar aprēķiniem, lai demonstrētu savu izpratni un domāšanas stratēģiju par dažādu lielumu mijiedarbību. Pēctecība par tieši un apgriezti proporcionāliem lielumiem matemātikas programmas saturā, veido labu pamatu, lai apgūtās prasmes un sakarības 5.8. tematā “Kā vizuāli attēlo sakarību starp lielumiem?” un 6.1. tematā “Kā kopumu sadala noteiktā attiecībā?” atspoguļotos, kā labas proporcionālās spriešanas prasmes 7. klases tematā „Kā raksturo sakarību starp mainīgiem lielumiem?”.

Tematā „Kā pieraksta un pēta funkcijas, kuru grafiks ir taisne?” skolēni atklāj, ka iepriekšējā tematā aplūkotie tieši proporcionālie lielumi, ir lineāras funkcijas piemērs. Tāpat skolēni vingrinās proporcionāli mainīt dažādus lielumus un pēta, kā mainās funkcijas grafiks atkarībā no izmaiņām. Šis temats ir piemērots, lai vingrinātos saskatīt vienības un uzdevumu risinājums būtu pēc iespējas racionālāks. Pētot lineāras funkcijas $y = kx$ grafiku un īpašības

skolēni var nonākt pie secinājuma, ka visu skaitļu pāru $(x; y)$ dalījumi $\frac{y}{x}$ ir vienādi un jebkuri divi skaitļu pāri veido patiesu proporciju pirms tie ir iepazīnušies ar jēdzienu “proporcija”, kas būtu labs radītājs kvalitatīvām proporcionālās spriešanas prasmēm.

Tematā “Ko nozīmē pārveidot izteiksmi ar mainīgo lielumu?” skolēni vingrinās procentuāli palielināt/ samazināt lielumus un tos procentuāli salīdzināt situācijās ar citu mācību priekšmetu aktuālo kontekstu. Skolēni padziļina izpratni par procentu lietojumu, ko apguvuši 5. un 6. klasē, ar spēju analizēt kvalitatīvas problēmas izmantojot procentuālu salīdzināšanu. Šajā tematā skolēni mācās pierakstīt ar algebriskām izteiksmēm savus spriedumus, lai attīstītu prasmi savas idejas pamatot ar korektiem aprēķiniem.

Tematā „Kādi ir paņēmieni nezināmā noteikšanai?” tiek ieviests proporcijas jēdziens, tas tiek definēts un apgūta arī proporcijas pamatīpašība. Svarīgākais šajā tematā ir likt uzsvāru uz to, ka skolēni proporcijas pamatīpašību atklāj paši – izmantojot zināšanas par daļu paplašināšanu, sasaista to ar funkciju $y = kx$, izmanto vienādojumu īpašības vai kādu citu modeli, veidojot izpratni kā šī proporcijas pamatīpašība veidojas. Proporciju kā matemātisku modeli skolēni tematā izmanto vienādojumu ekvivalentu pārveidojumu veikšanai. Lai padziļinātu spēju saskatīt sakarību starp lielumiem proporcijā, skolēni darbojas ar strukturētām tabulām un paši veido proporcijas, kas ir ļoti noderīga prasme, lai pamanītu proporcijas pielietojumu sadzīviskās situācijās. Liels uzsvārs tematā tiek likts uz situāciju uzdevumiem, kuros, veidojot proporcijas, var atrast nezināmo lielumu. Tāpat tiek sasaistīts proporcijas matemātiskais modelis ar situācijām, kuras raksturo izmantojot procentus un lieto procentus nezināmā lieluma aprēķināšanā.

2.5. Proporcionālā spriešana 8. klases mācību programmā

8. klasē skolēni izmanto proporcionālo spriešanu, lai spriestu par lielumiem, kas ietekmē telpisku ķermeņu tilpumu. Skolēni lieto proporcionālo spriešanu, lai pētītu funkciju, kuru raksturo apgriezti proporcionāli lielumi. 8. klases mācību programma sniedz iespēju paplašināt skolēnu iespējas izmantot proporcionālo spriešanu un pievērst uzmanību savai domāšanas stratēģijai. 2.4. tabulā apkopoti 8. klases temati un aktivitātes, kuras paredz proporcionālās spriešanas lietošanu, un pēc tabulas ir veikta analīze kādā veidā šīs aktivitātes ir svarīgas proporcionālo spriešanas prasmju attīstīšanai.

Temati un aktivitātes proporcionālās spriešanas pilnveidošanai 8. klasē [30]

Temats	Aktivitāte, kas attīsta proporcionālo spriešanu (no temata apguves norises)
8.4. Kā aprēķina laukumu jebkuram trijstūrim, riņķim?	Spriež, salīdzina divu cilindru tilpumus (dots attēls, kurā ievērota lielumu attiecība): abu pamata laukumi ir vienādi, viena cilindra augstums ir 1 cm, bet otra augstums ir 4 cm, viena cilindra augstums ir 1 cm bet otra augstums ir h cm.
	Nosaka, pamato sakarības starp cilindra lielumiem, izmantojot tilpuma formulu, piemēram, nosaka un pamato, kā jāmaina pamata rādiuss (augstums nemainās), lai cilindra tilpums palielinātos 4 reizes.
8.7. Kā dažādas funkcijas izmanto matemātiskai modelēšanai?	Grafiski attēlo sakarību starp apgriezti proporcionāliem lielumiem praktiskā kontekstā; raksturo definīcijas kopu un funkcijas vērtību kopu.
	Vingrinās vārdiski raksturot funkcijas vērtības maiņu, mainoties argumentam.

Tematā „Kā aprēķina laukumu jebkuram trijstūrim, riņķim?” skolēni pēta cilindra tilpumu un spriež par sakarību starp cilindra augstumu un tā tilpumu, veidojot secinājumus, kā mainoties augstumam mainās tilpums. Skolēniem šajā tematā ir iespēja attīstīt telpisko spriešanu, paplašinot skolēnu pieredzi lietot jau zināmas stratēģijas jaunos kontekstos.

Tematā „Kā dažādas funkcijas izmanto matemātiskai modelēšanai?” tiek lietota sakarība starp apgriezti proporcionāliem lielumiem, sakarību attēlojot grafiski. Piemēros ar sadzīvisku kontekstu, skolēni vingrinās izteikt spriedumus balstoties, kā mainoties vienam lielumam, mainās otrs lielums un veido izpratni par funkciju $y = \frac{k}{x}$, kā sakarību starp lielumiem matemātisko modeli. Skolēni vingrinās spriest kā viena lieluma izmaiņas ietekmē cita lieluma izmaiņas.

2.6. Proporcionālā spriešana 9. klases mācību programmā

Mācību programmā 9. klasē proporcionālā spriešana visredzamāk izpaužas iepazīstoties ar proporcionāliem nogriežņiem un līdzīgiem trijstūriem, kā arī pētīt sakarības taisnlenča trijstūrī, lai aprēķinātu nezināmos lielumus. Izpratne par proporcionalitāti ir pamatā tam, lai skolēni, aktualizējot savu iepriekšējo pieredzi, atpazītu līdzīgus trijstūrus un paši nonāktu līdz līdzīgu trijstūru īpašībām. Skolēni neattīsta proporcionālo spriešanu iemācoties līdzīgu trijstūru pazīmes, bet gan, balstoties uz savām zināšanām par attiecībām un proporcionalitāti, tās iegūst paši. Spēja lietot zināšanas jaunā ģeometriskā kontekstā parāda skolēnu spēju spriest proporcionāli. 2.5. tabulā apkopoti 9. klases temati un aktivitātes, kuras konkrētā tematā ved uz proporcionalitātes izpratni un proporcionālās spriešanas pilnveidošanu.

Temati un aktivitātes proporcionālās spriešanas pilnveidošanai 9. klasē [30]

Temats	Aktivitāte, kas attīsta proporcionālo spriešanu (no temata apguves norises)
9.1. Kā definē un raksturo līdzīgus trijstūrus?	Veido un skaidro skaitliskas proporcijas ģeometrisko attēlojumu, izmantojot nogriežņus un to garumu.
	Definē proporcionālus nogriežņus; pirms tam secina: lai spriestu par nogriežņu proporcionalitāti, nepieciešami vismaz 4 nogriežņi. Analizē sakarības starp nogriežņu garumiem plaknes figūru attēlojumos un saskata, pamato proporcionālus nogriežņus.
	Formulē teorēmu par proporcionāliem nogriežņiem, kas veidojas, ja leņķi krusto paralēlas taisnes; lieto teorēmu, lai aprēķinātu nezināmā nogriežņa garumu – vārdiski skaidro savu darbību, lieto jēdzienus “proporcionāli nogriežņi”, “nogriežņu attiecība”.
	Lieto digitālos rīkus, lai veidotu dotai plaknes figūrai līdzīgu figūru; spriež par figūru lielumiem. Analizē 3 vai 4 savstarpēji līdzīgu trijstūru lielumus, izsaka savas domas, kā atšķirt un matemātiski raksturot ik divu trijstūru līdzību; skaidro, kā saprot jēdzienu “līdzības koeficients”.
	Formulē trijstūru līdzības pazīmes, vienu no tām pierāda, izmantojot teorēmu par proporcionāliem nogriežņiem.
	Pirms risinājuma plāno, vārdiski apraksta uzdevuma risinājuma gaitu, lai aprēķinātu nezināmos lielumus, izmantojot trijstūru līdzību. Skaidro savu pieeju atbilstošo malu proporcionalitātes izmantošanā un pieraksta veidošanā aprēķina uzdevumos, piemēram, kā nekļūdīties nogriežņu pierakstā, vai un kad pietiek ar divu atbilstošo malu proporcionalitāti.
	Aplūko konkrētus piemērus, spriež, secina, pamato atbilstošo nogriežņu, piemēram, augstumu, garumu attiecību līdzīgos trijstūros, līdzīgu trijstūru perimetru attiecību. Spriež par sakarībām starp līdzīgu trijstūru laukumiem, nosakot nepieciešamos lielumus rūtiņu tīklā dotiem līdzīgiem taisnleņķa trijstūriem.
	Formulē pieņēmumu par līdzīgu trijstūru laukumu attiecību un to pierāda, izmantojot trijstūra laukuma formulu.
Lieto līdzīgu trijstūru malu, atbilstošo nogriežņu, perimetru un laukumu attiecību, lai noteiktu plaknes figūru nezināmos lielumus. Izmanto zināšanas par trijstūru līdzību spriežot vai praktiski darbojoties.	
9.3. Kā aprēķinos izmanto taisnleņķa trijstūra divu malu attiecību?	Spriež gan konkrēti, gan vispārīgi un secina, ka visi taisnleņķa trijstūri ar vienādu šauro leņķi ir līdzīgi trijstūri – to atbilstošo malu attiecības ir vienādas. Veido izpratni par malu attiecības izmantošanu aprēķinos, vingrinoties noteikt taisnleņķa trijstūra nezināmos lielumus.
	Grupā analizē sakarības starp lielumiem vienādmalu trijstūrī, kurā novilkts augstums un secina, ka garums katetei pret 30° ir puse no hipotenūzas garuma. Vingrinās noteikt taisnleņķa trijstūra nezināmos lielumus, ja dota sinusa, kosinusa vai tangensa skaitliskā vērtība, piemēram, “hipotenūzas garums ir 10 cm, bet viena šaurā leņķa sinuss ir $\frac{3}{5}$; jāaprēķina katešu garumi”.

Tematā „Kā definē un raksturo līdzīgus trijstūrus?” skolēni izmanto proporcionālo spriešanu visa temata garumā, tādēļ temats ir piemērots, lai skolēni atkārtoti pievērstos savas domāšanas analīzei, lai virzītos uz rezultātu. Šajā tematā skolēni zināšanas par attiecībām un

proporcionalitāti pārnes uz ģeometrisku kontekstu. Šajā tematā atspoguļojas iepriekšējos gados apgūtais par proporcionalitāti. Bez izpratnes par attiecībām un vājām proporcionālās spriešanas prasmēm, varētu būt sarežģīti veidot izpratni par to, kas ir proporcionali nogriežņi. Tematā skolēni apgūst Talesa teorēmu, kuras atklāšanai izmanto zināšanas par proporcijām. Turpinājumā skolēni darbojas ar proporcioniāliem nogriežņiem un tos izmantojot, pierāda trijstūru līdzību. Lai skolēni varētu pamatot, kāpēc trijstūri ir līdzīgi un to izmantot nezināmā lieluma aprēķināšanā, svarīga ir katra skolēna izpratne par proporcioniāliem lielumiem. Satura pēctecība temata gaitā ir sakārtota, lai proporcioniālās spriešanas prasmes tiktu pakāpeniski pilnveidotas sākot ar atkārtotānu par attiecībām un nobeidzot ar trijstūru līdzību lietojumu dažādos kontekstos.

Tematā „Kā aprēķinos izmanto taisnleņķa trijstūra divu malu attiecību?” skolēni darbojas ar malu attiecībām un pielieto zināšanas par līdzīgiem trijstūriem un to proporcionalitāti, lai nonāktu pie tik būtiskiem matemātikas jēdzieniem kā tangenss, sinuss un kosinuss, tādā veidā skolēniem ir pamats šo jēdzienu izpratnei padziļināti.

Pamatizglītības matemātikas mācību programma ir noderīgs palīg līdzeklis, lai plānotu ilgtermiņa proporcioniālās spriešanas attīstīšanu, veidojot sabalansētu dažādu kontekstu un prasmju pilnveidošanas plānu vairāku gadu garumā. Lai arī mācību programmā satura pēctecība ir atbilstoša, lai pakāpeniski un ar izpratni būvētu skolēnu domāšanu par proporcioniāliem lielumiem, proporcioniālās spriešanas veiksmīga attīstība ir atkarīga arī no skolotāja iesaistes. Skolotājs ir atbildīgs par to, lai skolēniem būtu iespēja sastapties ar dažādām proporcioniālām problēmām, lai skolēni pievērstu uzmanību savai domāšanai un, lai skolēniem būtu pieredze izmantot dažādas spriešanas stratēģijas proporcioniālās situācijās.

Pēc autores domām atlasītie temati un aktivitātes proporcioniālās spriešanas attīstīšanai ļauj saskatīt satura pēctecību vairāku gadu garumā un var tikt izmantotas, kā bāze ilgtermiņa proporcioniālās spriešanas plāna izveidei, lai pilnvērtīgi pievērstu uzmanību niansēm, kas veido skolēnu proporcioniālo domāšanu. Tai pat laikā arī 2. nodaļā nepieminētajos tematos ir iespējams attīstīt proporcioniālo spriešanu, piedāvājot arvien jaunas situācijas, kur skolēniem būtu iespējams pielietot apgūtās prasmes.

3. PĒTĪJUMS PROPORCIONĀLĀS SPRIEŠANAS ATTĪSTĪŠANAI 6. KLASES MATEMĀTIKĀ

3.1. Pētījuma bāze

Prasme spriest par proporcionāliem lielumiem attīstās laika gaitā, kad, saskaroties ar dažādām situācijām un iegūstot dažādu pieredzi, katrs skolēns izveido savā prātā stratēģiju, kā apstrādāt un interpretēt datus par dažādu lielumu attiecībām. Skolotāja uzdevums ir mācību procesā radīt šīs dažādās situācijas, vadīt mācību procesu tā, lai skolēniem būt laiks un nepieciešamība domāt un spriest, kā arī pakāpeniski caur dažādiem tematiem vairāku gadu garumā sistemātiski sasaistīt skolēnu esošo pieredzi ar jauno kontekstu, kurā skolēnam ir nepieciešamība pielietot proporcionālo spriešanu. Darbs ar skolēnu proporcionālās spriešanas spējām ir konsekvents ilgtermiņa process vairāku gadu garumā, tomēr, ņemot vērā ierobežoto pētījuma laika posmu, darba autore balstoties uz R. Karplus [2] ieteikumiem proporcionālās spriešanas attīstīšanai, kas tika apskatīti 1.4. apakšnodaļā, izveidoja mācīšanās ciklu, kas paredzēts, kā dažādu prasmju apkopojošs atbalsta materiāls proporcionālās spriešanas attīstīšanai 6. klases noslēgumā vai 7. klases sākumā, ar mērķi aicināt skolēnus domāt par savu domāšanu.

Pētījumā piedalījās Latvijas vispārīzglītojošās skolas vienas 6. klases divdesmit skolēni, kuri darba autores vadībā piedalījās mācību materiālu un uzdevumu aprobācijā. Pētījuma laika posms: 2022. gada aprīlis. Pētījuma realizācija tika sadalīta trīs daļās – diagnostika, mācīšanās cikla realizēšana, rezultātu novērtēšana.

Diagnosticējošā darba saturs balstīts uz uzdevumiem, kuri satur tās problēmas ar kurām savos pētījumos ir saskārušies tādi autori, kā S. Lamona [11], L. B. Knoksa [9], M. B. Makintoša [16], kas pētījuši iespējas uzlabot proporcionālās spriešanas prasmes, un darba autores veidotiem uzdevumiem. Diagnostikas mērķis ir izprast skolēnu gatavību procesa sākumā un viņu kognitīvās attīstības pakāpi, kā arī atklāt skolēnu stiprās un vājās puses, lai turpinātu attīstīt proporcionālās spriešanas prasmes.

Plānojot mācīšanās cikla saturu un formātu, par pamatu tika izmantoti diagnosticējošā darba rezultāti un proporcionālās spriešanas kompleksā uzbūve, lai izveidotu visaptverošu proporcionālās spriešanas attīstošu metodisko materiālu, kas pielāgojot attiecīgajai situācijai, izmantojams 6. un 7. klases matemātikas mācību procesā kā nepārtraukts mācīšanās cikls vai sadalot daļās to piedāvāt attiecīgajā tematā, lai dažādotu mācību procesu un bagātinātu skolēnu pieredzi. Ņemot vērā, ka proporcionālo spriešanas prasmju attīstībai jāpievērš

uzmanība ilgtermiņā visas pamatskolas garumā, darba autores izveidotais mācīšanās cikls var tikt izmantots, kā viens posms no ilgtermiņa proporcionālo spriešanas prasmju apguves plāna.

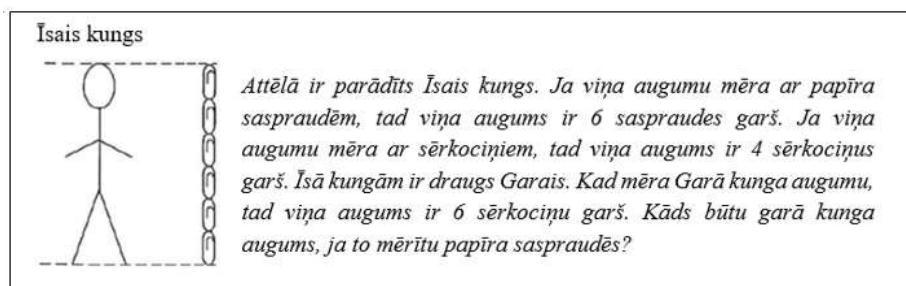
Lai novērtētu īstenotā mācīšanās cikla rezultātus, posma noslēgumā skolēniem tika piedāvāts novērtējuma darbs, lai salīdzinātu katra individuālo izaugsmi un novērtētu katra skolēna proporcionālās spriešanas izmaiņas posma beigās.

3.2. Proporcionālās spriešanas prasmju diagnostika

Pirms mērķtiecīgas proporcionālās spriešanas attīstīšanas uzsākšanas matemātikas stundās, skolēniem tika dots diagnosticējošais darbs (skatīt 2. pielikumu), lai izprastu skolēnu esošo domāšanas veidu un visefektīvāk varētu uzlabot esošās prasmes un piedāvāt plašāku skatu uz dažādām problēmsituācijām. Diagnosticējošo darbu veica divdesmit 6. klases skolēni. Diagnostikas rezultātā tika identificētas vairākas būtiskas problēmas, kuras skolēniem traucē pilnvērtīgi izmantot proporcionālās spriešanas prasmes, lai atrisinātu dažādas situācijas.

Diagnostikas rezultātā atklājās, ka 18 no 20 skolēniem spēj uztvert un spriest par lielumiem abstrakti, kas ir laba pazīme skolēnu gatavībai tikt galā ar proporcionālām situācijām. Tai pat laikā 14 no 20 skolēniem bija spējīgi atpazīt proporcionālu situāciju no neproporcionālas, kas liecina vai skolēns vispār izprot kādās situācijās pastāv proporcionālas attiecības starp lielumiem, kas ir viens no būtiskākajiem jautājumiem, lai jaunā kontekstā spētu pielietot jau zināmās stratēģijas. Lai uzlabotu šos rādītājus, mācīšanās cikla sākumā būtu nepieciešams ar skolēniem atkārtoti izrunāt, kas ir proporcionāli lielumi un kā tos atpazīt.

Lai spriestu par skolēnu spēju saskatīt proporcionālas attiecības starp lielumiem un tās raksturot, diagnostikai tika izmantots uzdevums, kurš attēlots 3.1. attēlā. Uzdevums atspoguļo vienu no visizplatītākajām proporcionālās spriešanas situācijām un paredz dažādas risināšanas stratēģijas.



3.1. att. Uzdevums par spēju spriest par lielumiem proporcijā [22]

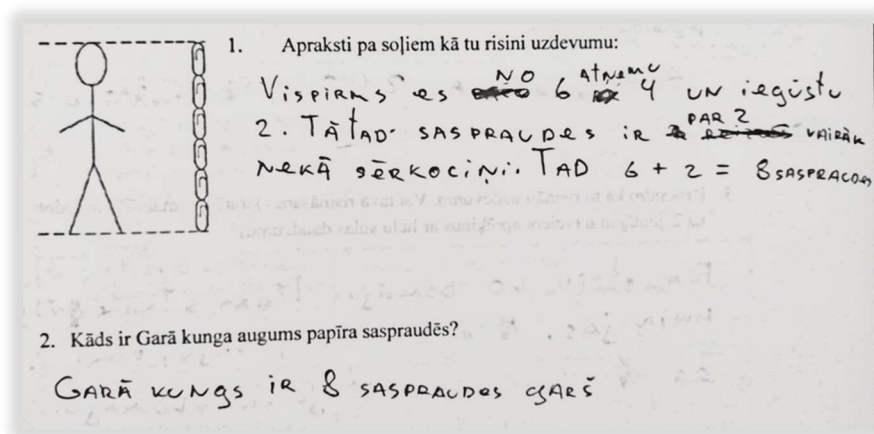
Balstoties uz veikto izpēti, 12 no 20 skolēniem bija grūtības saskatīt un formulēt proporcionālas attiecības starp diviem lielumiem, kas liecina par trūkstošu izpratni par pastāvošajām sakarībām starp lielumiem, kas mēra vienu un to pašu attālumu. Analizējot

skolēnu spēju atrast un lietot attiecības starp lielumiem, skolēnu veikumu darba autore iedalīja trīs kategorijās: nav risinājuma vai neloģisks risinājums, pielietota saskaitīšanas stratēģija, kas noved pie nepareiza rezultāta, un precīzi atrisināta problēma, demonstrējot labas proporcionālās spriešanas prasmes. 3.2. attēlā ir veikts apkopojums par skolēnu izmantotajām stratēģijām, lai tiktu galā ar izvirzīto problēmu.



3.2. att. Skolēnu risināšanas stratēģijas situācijā, kuru raksturo proporcionāli lielumi

25% no visiem skolēnu risinājumiem atklāja, ka skolēnu risināšanas stratēģija balstās uz saskaitīšanas principiem nevis uz reizināšanas, kas attiecīgi noveda pie nepareizu risinājumu izveides un nekorektiem secinājumiem par situāciju. Šāds risināšanas princips attēlots 3.3. attēlā.

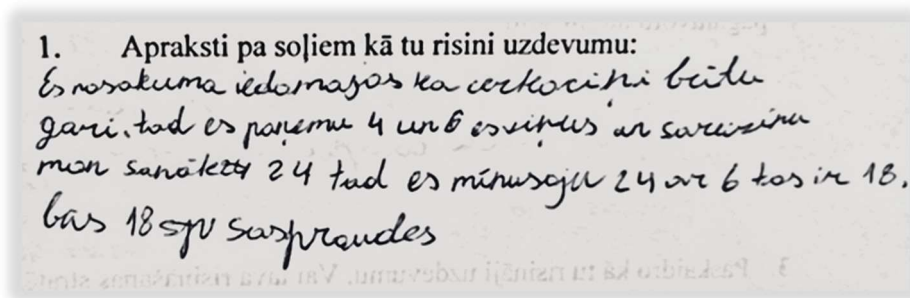


3.3. att. Nekorekts skolēna risinājums, kurš balstīts uz saskaitīšanas principiem

Kā redzams 3.3. attēlā šāds risinājums nav korekts un skolēns veido nepareizus spriedumus par konkrēto situāciju. Skolēni šādā veidā parāda prasmes, kuras ir bieži pielietojusi sākumskolas klasēs risinot problēmas ar kontekstu “par tik vairāk, par tik mazāk”, kad matemātikas saturs ir vairāk balstīts uz saskaitīšanas principiem. Spēja pārslēgties uz reizināšanas principiem liecina jau par augstāku kognitīvās attīstības līmeni, kura sasniegšana 6.klasē ir iesākusies, bet liela daļa skolēnu vēl to nav sasniegusi. Tas ir labs pamats, lai

skolotājs pievērštos proporcionālās spriešanas jautājumiem padziļināti un veiktu mērķtiecīgu mācīšanu, lai pilnveidotu skolēnu domāšanu.

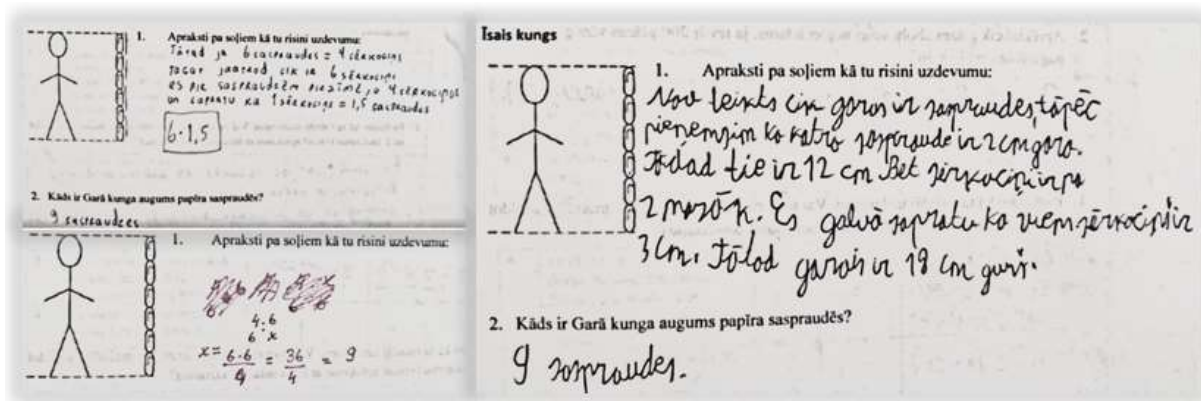
Tomēr lielāka problēma ir skolēnu nespēja vispār formulēt jebkādu risināšanas stratēģiju vai neloģiskas risināšanas stratēģijas pielietošana, kas nav balstīta korektos aprēķinos. Viens risināšanas piemērs ar nekorektu spriešanas prasmju pielietošanu parādīts 3.4. attēlā.



3.4. att. Nekorekts skolēna risinājums, kurš balstīts uz neloģiskiem spriedumiem

Vairumam skolēnu ir grūtības ne tikai saredzēt sakarības, bet arī tās pierakstīt, atsedzot vēl citas problēmas, kas tiešā veidā nav saistītas ar proporcionālās spriešanas jautājumiem, tomēr korekts attiecību pieraksts var palīdzēt gan izprast situāciju, gan to interpretēt pareizā virzienā. Fakts, ka 35% diagnosticējošo darbu atklāja, ka skolēniem vispār nav nekādas izpratnes par divu lielumu savstarpējo sakarību, liecina par daudz un dažādu prasmju un matemātisko zināšanu trūkumu, kā piemēram nespēju lasīt tekstu ar izpratni, lielumu attiecībām, proporcionalitāti un skaitļu interpretāciju dažādās situācijās.

Par proporcionālās spriešanas prasmju korektu pielietošanu var spriest 40% diagnosticējošo darbu. Skolēni, kuru darbos bija vērojama izpratne par proporcionālām attiecībām, demonstrēja dažādas risināšanas stratēģijas, kā piemēram, proporcijas pamatīpašības lietošana, vizuāla interpretācija un citas aprēķināšanas metodes, kuras attēlotas 3.5. attēlā.



3.5. att. Dažādas skolēnu risināšanas stratēģijas, demonstrējot izpratni par proporcionāliem lielumiem

Darbos, kas attēloti 3.5. attēlā, jau redzamas konkrētas domāšanas stratēģijas un var spriest par proporcionālo spriešanas prasmju kvalitatīvu pielietojumu un diskutēt par konkrētu risinājumu priekšrocībām un trūkumiem. Šiem skolēniem ir labs pamats, lai spētu virzīties uz augstākas sarežģītības situācijām un skolotāja uzdevums ir piedāvāt daudzpusīgāku problēmu klāstu, lai skolēnu prasmes uzlabotu. Šo skolēnu veikums parāda, ka viņu kognitīvās attīstības līmenis ir atbilstošs proporcionālās spriešanas attīstīšanai. Veidojot mācīšanās ciklu, skolotājam jāveido vide, kurā skolēniem ir iespēja dalīties ar dažādām idejām, lai paplašinātu un padarītu daudzveidīgu katra skolēna pieredzi.

Salīdzinoši labākas proporcionālās spriešanas prasmes skolēni parādīja uzdevumā ar dotu attiecību starp lielumiem, kuras konteksts skolniekiem bija pazīstams. Tas attēlots 3.6. attēlā. Uzdevums atrisināms gan izmantojot saskaitīšanas stratēģijas, gan reizināšanas stratēģijas, bet par spēju spriest proporcionāli liecina tikai reizināšanas stratēģijas, jo tā ir adaptējama jebkuram sulas daudzumam, tātad skolēns, kurš balstās uz multiplikatīvām attiecībām ir izpratis sakarību starp šiem lielumiem.

Lai pagatavotu augļu sulu, izmantojiet divas glāzes vīnogu sulas uz katrām 3 glāzēm ābolu sulas. Ja jums jau ir 12 glāzes ābolu sulas, cik glāzes vīnogu sulas vajadzēs, lai pagatavotu augļu sulu? Aprēķini cik glāzes vīnogu sulas nepieciešams, ja tev ir 200 glāzes vīnogu sulas.

3.6.att. Uzdevums, lai diagnosticētu skolēna domāšanas veidu

Risinot jautājumu ar maziem sulas daudzumiem, aktivizēt un pielietot esošās zināšanas izdevās 12 no 20 skolēniem, no kuriem 8 bija tie paši skolēni, kuri bija tikuši galā ar “Īsā kunga un Garā kunga” problēmu, kura atspoguļota 3.1. attēlā. Tas liecina, ka šie skolēni ir sasnieguši tādu attīstības līmeni, lai no elementārām matemātikas problēmām pārietu uz komplikētākām matemātikas problēmām, kas sevī ietver abstraktu domāšanu, situācijas analīzi un jēgpilnu problēmu risināšanu. Tāpat visi 12 skolēni bija lietojuši reizināšanas stratēģijas, lai raksturotu proporcionālās attiecības starp lielumiem, kas liecina par skolēnu domāšanas veida atbilstību kvalitatīvai proporcionālās spriešanas prasmei. Tomēr to pašu stratēģiju pielietot un aprēķināt nezināmo lielumu lielākam sulas daudzumam, izdevās vien 6 no 20 skolēniem, kas atklāj būtisku trūkumu skolēnu spējā pielietot jau zināmas stratēģijas atkārtoti. 3.7., 3.8. un 3.9. attēlos ir parādīti 3 dažādi skolēnu risinājumu piemēri, kas atspoguļo nekorektu risinājumu, atrisinātu problēmu mazam sulas daudzumam, bet neprecīzu risinājumu lielam sulas daudzumam, un precīzi atrisinātu problēmu.

1. Parādi ar kādām darbībām tu aprēķināji rezultātu.

$12 \cdot 2 = 10$ (v.s.) vajadzēs 10 glāzes ar vīnogu sulu.

2. Aprēķini cik glāzes ābolu sulas nepieciešams, ja tev ir 200 glāzes vīnogu sulas, lai pagatavotu augļu sulu.

$$200 - 12 = 198 \text{ (ā.s. glāz.)}$$

Vajadzēs 198 glāzes ābolu sulas lai pagatavotu augļu sulu.

3.7. att. Nepareizi atrisināta uzdevuma piemērs

Kā redzams 3.7. attēlā, risinājuma piemērs parāda, ka skolēnam nav izpratnes par doto situāciju un nav spējas korekti interpretēt attiecības starp lielumiem. Šādu un līdzvērtīgu sniegumu šajā uzdevumā uzrādīja 40% skolēnu, kas liecina par skolēnu vājajām pamatzināšanām par lielumu attiecībām, proporcijas jēdzienu un proporcionalitāti, kas ir bijis viens no tematiem 6. klasē.

30 % skolēnu spēja atrisināt uzdevumu mazam sulas daudzumam, bet nespēja tikt galā ar lielu sulas daudzumu, kas attiecīgi atsedz jautājumu, vai skolēns līdz galam izprot situāciju. Šāda risinājuma piemērs attēlots 3.8. attēlā.

1. Parādi ar kādām darbībām tu aprēķināji rezultātu.

$$12 : 3 = 4 \quad 4 \cdot 2 = \underline{8}$$

Atbilde: vajadzēs 8 glāzes

2. Aprēķini cik glāzes ābolu sulas nepieciešams, ja tev ir 200 glāzes vīnogu sulas, lai pagatavotu augļu sulu.

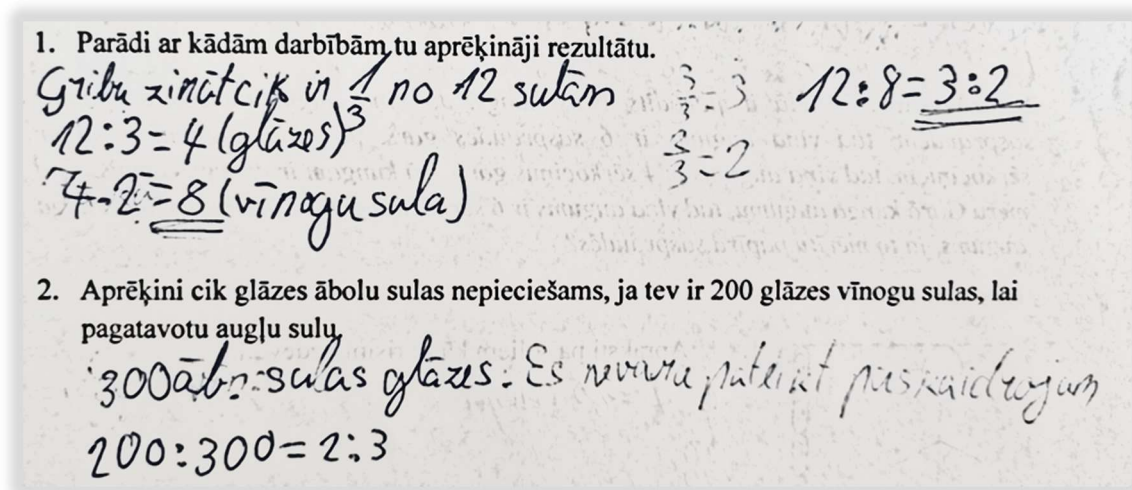
$$200 \cdot 3 = \underline{\underline{600}}$$

Vajadzēs 600 glāzes

3.8. att. Daļēji pareizi atrisināta uzdevuma piemērs

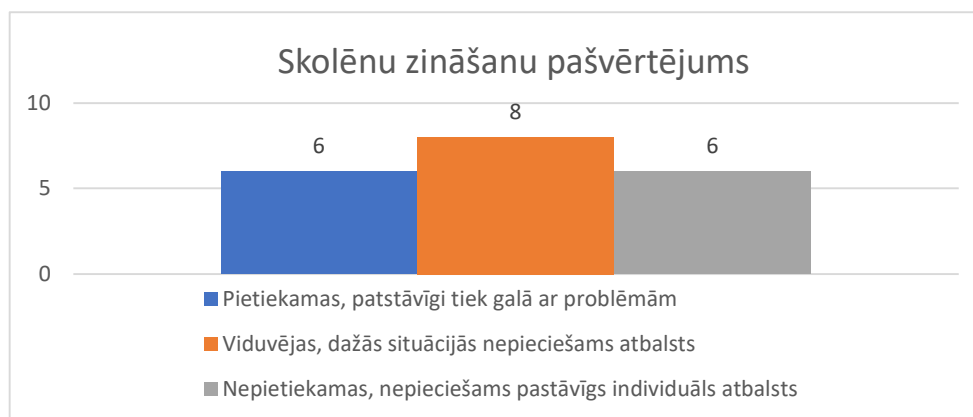
Šiem skolēniem ir pamati, lai turpinātu darbu ar attiecību un proporciju izpratni un pievērstu uzmanību tādiem proporcionālās spriešanas jautājumiem, kā sakarību starp lielumiem interpretāciju un lielumu izmaiņu ietekmi uz citu lielumu.

Pārējie 30% skolēnu klasē uzrādīja līdzvērtīgu risinājumu 3.9. attēlā atspoguļotajam, kas liecina, ka šiem skolēniem ir labas matemātiskās prasmes, lai tiktu galā ar proporcionālām situācijām un ir labs pamats, lai padziļināti pievērstos proporcionālās spriešanas jautājumiem, izvērtējot gan dažādas risināšanas stratēģijas, analizētu situācijas un izveidotu loģiskus spriedumus par situācijām, kas prasa augstāku kognitīvās attīstības līmeni.



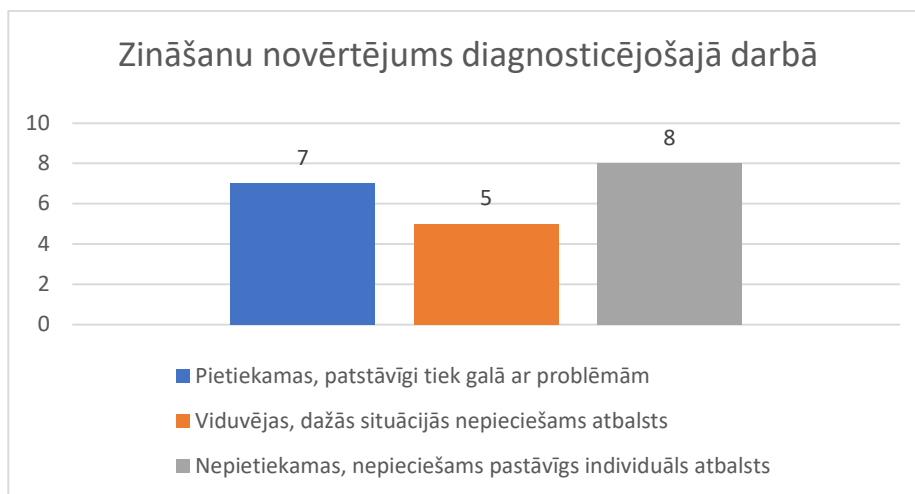
3.9. att. Pareizi atrisināta uzdevuma piemērs

Skolēnu risinājumi parāda, cik dažādi domā viena vecuma skolēni vienas klases ietvaros. Kopumā vērtējot diagnosticējošā darba rezultātus, 95% darbu varēja atrast pazīmes, ka skolēni spēj saskatīt un interpretēt sakarības starp lielumiem kādā no uzdevumiem, kas dod labu sākuma pozīciju, lai dažādos līmeņos attīstītu proporcionālās spriešanas prasmes. Darba noslēgumā skolēni paši novērtēja vai skolēnam ir pietiekošas zināšanas un prasmes, kuras nepieciešamas, lai tiktu galā ar dažādām situācijām, kuras raksturo proporcionāli lielumi un nepieciešamo atbalsta līmeni. Skolēnu pašvērtējums attēlots 3.10. attēlā.



3.10. att. Skolēnu zināšanu pašvērtējums diagnosticējošajā darbā

Lai veidotu jēgpilnu mācīšanās ciklu, arī darba autore izvērtēja diagnosticējošā darba rezultātus un sadalīja skolēnu veikumu trīs grupās atbilstoši esošajām zināšanām un spējām atrisināt dažādas problēmsituācijas. Sadalījums attēlots 3.11. attēlā.



3.11. att. Skolēnu zināšanu novērtējums diagnosticējošajā darbā

Salīdzinot ar skolēnu pašvērtējumu, darba autores novērtējums parāda lielāku atšķirību starp skolēnu zināšanu līmeņiem vienas klases ietvaros, kas padara komplicētāku darbu ar klasi. Attiecīgi atšķirības skolēnu kognitīvās attīstības līmeņos ir tik lielas, ka tās būtiski ietekmē darbu klasē, jo 40% skolēnu netiek līdzī mācību satura apguvei un demonstrē ļoti zemu sniegumu, kamēr citi jau ir gatavi strādāt padziļināti ar problēmu izpēti. Tas ir liels izaicinājums skolotājam, lai sabalansētu mācību procesa gaitu, kurā katrs skolēns saņemtu tam nepieciešamo atbalstu. Lai diferencētu mācīšanās procesu pēc katra skolēna vajadzībām, 3.1. tabulā darba autore atspoguļoja trīs virzienus, uz kuriem virzīt skolēnu mācīšanās procesu, lai pilnveidotu proporcionālās spriešanas prasmes un katrs skolēns būtu ieguvējs.

3.1. tabula

Proportcionālās spriešanas attīstīšanas virzieni atbilstoši zināšanu līmeņim

Zināšanu novērtējums	Skolēna raksturojums	Proportcionālās spriešanas attīstīšanas virziens
Nepietiekamas, nepieciešams pastāvīgs atbalsts	Skolēns nav piedāvājis nekādu risinājumu vai veicis nepareizu minējumu, kuru pamatojis ar neloģiskiem aprēķiniem un spriedumiem. Skolēns nespēj iztēloties lielumu savstarpējo sakarību.	Koncentrēties uz attiecību saskatīšanu un formulēšanu starp diviem lielumiem. Veltīt uzmanību daļskaitļu interpretācijai dažādās situācijās un izprast to nozīmi. Vingrināties lielumus sadalīt daļās un salīdzināt.

Viduvējas, dažās situācijās nepieciešams atbalsts	Skolēns savos risinājumos balstās uz spriedumiem “par tik lielāks” un nekorekti lieto saskaitīšanas stratēģiju proporcionālas situācijas risinājumā, kas raksturīga jaunāko klašu skolēniem, tādēļ bieži risināšanas stratēģija nenostādā un uzdevumu risinājumi nav līdz galam pareizi.	Skolēnu domāšana jāmaina no saskaitīšanas principu lietošanas uz reizināšanas principu lietošanu, formulējot attiecības starp diviem lielumiem. Veltīt uzmanību relatīvai lielumu un izmaiņu salīdzināšanai un sakarību starp lielumiem formulēšanai un korektai interpretācijai.
Pietiekamas, patstāvīgi tiek galā ar problēmām	Skolēns savā risinājumā balstās uz reizināšanas principiem, lai formulētu attiecības starp diviem lielumiem, kurus saista proporcionālas attiecības. Veido loģiskus un pamatotus spriedumus par lielumu izmaiņām un attiecībām.	Piedāvāt jaunus kontekstus, kuros pielietot proporcionālās spriešanas prasmes, lai bagātinātu skolēnu pieredzi. Vingrināties veidot un izvērtēt dažādas risināšanas stratēģijas situācijās, kuras raksturo proporcionāli lielumi. Analizēt viena lieluma izmaiņas, atkarībā no cita lieluma izmaiņām.

Balstoties uz veikto diagnostiku, tika konstatēts, ka, pirmkārt, jāveicina skolēnu domāšanas pārslēgšanās no saskaitīšanas principiem uz reizināšanas principiem situācijās, kuras raksturo proporcionāli lielumi. Otrkārt, papildus uzmanība ir jāpievērš attiecību formulēšanai un interpretēšanai, jāvingrinās nolasīt no teksta attiecības starp lielumiem un pielietot tās konkrētas situācijas atrisināšanai. Treškārt, veidot izpratni par savu un citu skolēnu risinājumiem, pastiprināti pievērt uzmanību skolēnu izpratnei par racionāliem skaitļiem, lai skolēni būtu spējīgi savu uzkrāto pieredzi izmantot komplicētākās situācijās. Ceturtkārt, veicināt skaitļu izjūtu un proporcionālu lielumu atkarību vienam no otra, lai arī bez matemātiska risinājuma, skolēns būtu spējīgs formulēt pamatotus un loģiskus apgalvojumus.

Diagnosticējošā darba rezultāti parāda starta pozīciju, kurā atrodas katrs no skolēniem uzsākot mērķtiecīgi attīstīt proporcionālās spriešanas prasmes un nepieciešamo atbalstu turpmākai attīstībai.

3.3. Mācīšanās cikls proporcionālās spriešanas attīstīšanai

Pēc iepriekš veiktās diagnostikas un literatūras analīzes par pamatskolas skolēnu proporcionālās spriešanas prasmēm, tika izveidots mācīšanās cikls proporcionālās spriešanas attīstīšanai. Mācīšanās cikls sevī iekļauj trīs nozīmīgus posmus – izpēte, stratēģijas ieviešana un pielietošana, lai skolēns attīstītu un nostiprinātu sev nepieciešamās prasmes. Darba autores izveidotā un apbērtā mācīšanās cikla struktūra un nepieciešamie materiāli tā īstenošanai ir apkopoti 3.2. tabulā.

Mācīšanās cikla struktūra un nepieciešamo materiālu pārskats

Posms	Mērķis	Darbības forma klasē	Nepieciešamie materiāli skolēniem
1. Izpētes posms (1 mācību stunda, 40 min)	Virzīt skolēnus domāt par niansēm, kas veido proporcionālās spriešanas prasmes. Atklāt jaunas idejas situāciju risināšanai un interpretēšanai.	Mācību stacijas (mācību materiāls pievienots 3.pielikumā)	Izpētes posma darba lapa nr. 1 (skatīt 4. pielikumu)
2. Stratēģijas ieviešanas, koncepta izgudrošanas posms (2 mācību stundas, 80 min)	Veidot un analizēt dažādas risināšanas stratēģijas situācijās, kuras raksturo proporcionāli lielumi. Iepazīties ar citu skolēnu domāšanas veidu un domāt par savu domāšanu.	Individuāla un kopīga stratēģiju veidošana. Skolēni kopā ar skolotāju būvē mācību procesu.	Stratēģijas ieviešanas posma darba lapa nr. 1 (skatīt 5. pielikumu) un stratēģijas ieviešanas posma darba lapa nr. 2 (skatīt 6. pielikumu)
3. Pielietošanas posms (1 mācību stunda, 40 min)	Lietot apgūtās risināšanas stratēģijas jaunās situācijās un veidot pamatos apgalvojumus par lielumiem situācijās, kurus vieno proporcionālas attiecības.	Skolēnu individuāls darbs ar iespēju izvēlēties nepieciešamo atbalstu.	Pielietošanas posma darba lapa nr. 1 (skatīt 7. pielikumu)

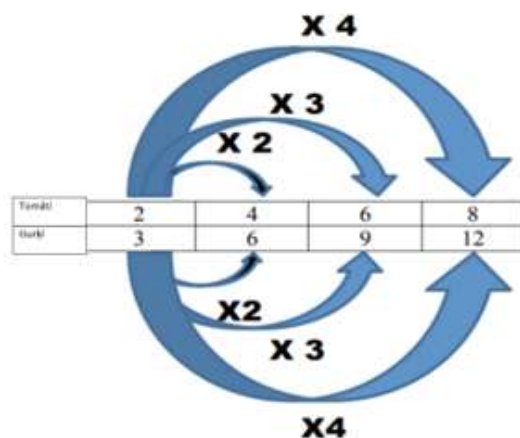
3.3.1. Izpētes posms

Pirmo jeb izpētes posmu darba autore veidoja kā mācību stacijas, jo klasē tika diagnosticēts ļoti atšķirīgs zināšanu līmenis, tādēļ, lai aptvertu maksimāli plašāku prasmju kopumu, kas būtu noderīgs proporcionālās spriešanas attīstīšanai, bet tai pat laikā nekonzertētos padziļināti uz vienu konkrētu aspektu vai matemātisko prasmi, tādā veidā šo mācīšanās ciklu padarot lietojamu plašākam skolēnu lokam. Informācija tika sastrukturizēta sešās atsevišķās stacijās, kur katrā bija īss prasmes apraksts vai doma par ko likt skolēniem aizdomāties, piemērs un īss uzdevums. Mācību stacijas apvieno sekojošas tēmas: apvienošana vienībās, daļskaitļu izpratne, lielumu attiecības, lielumu izmaiņas, sadalīšana daļās un abstraktā domāšana. 3.12. attēlā ir parādīts vienas stacijas piemērs. Visu staciju informatīvais materiāls ir pievienots 3. pielikumā.

3. stacija – Saskati attiecību starp lielumiem.

Savstarpējās attiecības starp dažādiem lielumiem raksturo sakarību, kas pastāv starp šiem lielumiem. Piemēram, mērot attālumu no punkta A līdz punktam B izmantojot pēdas, attālums ir 20 pēdas, bet šo pašu attālumu mērot soļos attālums ir 5 soļi. No tā izriet pēdu un soļu attiecība, jo veiktais attālums ir viens un tas pats. Tātad 5 soļiem atbilst 20 pēdas, jeb veidojas attiecība 5 : 20 vai pārveidojot 1 : 4, no kā var secināt, ka vienam solim atbilst 4 pēdas.

Attiecību saskatīšanas bieži palīdz aprēķināt nezināmo lielumu. Aplūko piemēru: dota tomātu un gurķu salātu recepte, kura paredz, ka uz katriem 2 tomātiem jāpievieno 3 gurķi jeb tomātu un gurķu attiecība ir 2 : 3. Cik gurķi jāpievieno, ja bļodā ir sagriezti 8 tomāti?



Padomā un pārrunā ar grupas biedriem, cik tomātu jāpievieno, ja bļodā ir sagriezti 60 gurķi?

3.12. att. Mācību stacijas piemērs

Mācību stacijas piemērā, kas attēlota 3.12. attēlā, redzams, ka šīs stacijas mērķis ir ievirzīt skolēnu domāšanu par lielumu savstarpējām attiecībām, kā par multiplikatīvām attiecībām un radīt ieradumu proporcionālās situācijās attiecības starp lielumiem formulēt izmantojot reizināšanas nevis saskaitīšanas principus. Līdzīgi akcentējot uzmanību uz proporcionālās spriešanai nepieciešamajām pamatiemaņām, ir izveidotas arī pārējās 5 stacijas.

Pirmais mācīšanās cikla posms jeb darbs mācību stacijās aizņem vienu mācību stundu jeb 40 minūtes. Stundas sākumā skolēni tiek sadalīti grupās, lai katrā stacijā būtu līdzīgs skolēnu skaits, un darbs stacijās veicinātu arī savstarpējās sadarbības prasmes. Katram skolēnam tiek iedota darba lapa (skatīt 4. pielikumu) ar konkrētiem uzdevumiem, kas vērsti uz attiecīgo prasmi. Skolēnu uzdevums ir 4 līdz 5 minūšu laikā iepazīties ar informāciju konkrētā stacijā, kurā viņš atrodas, un kopīgi ar grupas biedriem pārrunāt tur atrodamo informāciju un atrisināt uzdevumu darba lapā. Skolotājs šajā posmā konsultē, atbalsta un atbild uz skolēnu jautājumiem, kas radušies par mācību stacijās atrodamo informāciju. Mācīšanās cikla

aprobācijas rezultātā, darba autore izveidoja ieteikumus skolotājiem, kam pievērst skolēnu uzmanību katrā no stacijām, kas ir apkopoti 3.3.tabulā.

3.3.tabula

Ieteikumi, kam pievērst skolēnu uzmanību mācību stacijās

Mācību stacijas nosaukums	Kam pievērst uzmanību?
1. Apvieno vienā vienībā	Daudziem skolēniem ir asociācija, ka vienība automātiski nozīmē 1, tādēļ ir vērts atkārtot atšķirību starp 1 un vienību.
2. Izproti daļskaitļus	Skolēniem problēmas sagādāja zīmējuma proporcionāla samazināšana, ko ir vērts izrunāt kopīgi, jo iespējams 6.klases skolniekiem ir par mazu pieredze, lai izprastu uzdevuma kontekstu.
3. Saskati attiecību starp lielumiem	Šīs stacijas galvenais uzdevums ir mainīt skolēnu domāšanu no saskaitīšanas principiem uz reizināšanas un parādīt, ka saskaitīšanas stratēģija nestrādās pie lieliem daudzumiem.
4. Lielumi un to izmaiņas	Šajā stacijā skolēni nelabprāt lasa visu informāciju, jo teksts ir garāks nekā citās stacijās un bieži uzdot tos jautājumus, kam atbilde ir atrodama tekstā. Šeit ieteicams veidot ieradumu, ka skolēns lasa vēlreiz nevis meklē ātrāko variantu – jautā skolotājam.
5. Sadalīšana daļās	Svarīgi ir pievērst uzmanību situācijas interpretācijai, lai skolēni risinot uzdevumu daļās nedala bērnus, bet gan picas. Ir vērts mudināt skolēnus lietot vizuālu situācijas atspoguļojumu, ja neizdodas aprēķināt skaitliski.
6. Abstraktā domāšana	Šajā stacijā svarīgi ir uzsvērt atšķirību starp absolūtu vērtību salīdzināšanu un procentuālu salīdzināšanu. Pārrunājot veikumu šajā stacijā ir vērts piedāvāt kontrolpiemēru, vai skolēns ir izpratis atšķirību starp šīm divām vērtībām.

Metodiskie ieteikumi, īstenojot izpēti posmu:

1. Skolotāja uzdevums ir virzīt skolēnus uz sadarbību savā starpā, lai visi skolēni būtu ieguvēji no mācību procesa. Mācīšanās cikla aprobācijas laikā tika novērots, ka ir ļoti atšķirīgs izpratnes līmenis par dažādiem matemātikas jautājumiem, tādēļ noderīgi ir grupās sajaukt dažādu zināšanu līmeņu skolēnus, lai grupās ir gan skolēni, kas var paskaidrot citiem jautājuma būtību, tādā veidā padziļinot savu izpratnes līmeni un atklājot jau zināmo no cita skatu punkta, gan skolēni, kuriem nepieciešams atbalsts, lai izprastu ideju un virzītos uz priekšu. Sadarbojoties, katrs skolēns saņem informāciju tādā līmenī, kādā viņš attiecīgajā brīdī ir gatavs to saņemt.

2. Būtiski klasē ir pievērst uzmanību skolēnu spējām lasīt, izprast un interpretēt dotu tekstu. Aprobācijas laikā tika novērots, ka skolēniem ir zemas teksta izpratnes prasmes un daudz labprātāk skolēni vispirms mēģina atrast atbildi uz uzdevumu neiedziļinoties dotajā informācijā un neturpināt meklēt informāciju, ja risinājumu neizdodas atrast uzreiz.

3. Pēc visu mācību staciju apmeklēšanas, ir ieteicams katram skolēnam dot laiku individuāli apdomāt tikko iegūto informāciju, saprast, kas bija jauna informācija un kas jau zināma, un ļaut dalīties ar atgriezenisko saiti par procesu.

3.3.2. Stratēģijas ieviešanas, koncepta izgudrošanas posms

Otrais mācīšanās cikla posms paredz savu risināšanas paņēmieni izveidi un stratēģijas ieviešanu. Darba autore šo posmu izveidoja, kā dažādu uzdevumu un sarunu komplektu, kurā mainot sadarbības formas, skolēni veido gan savas, gan iepazīstas ar citu veidotām stratēģijām. Skolotājam šajā posmā ir ļoti svarīga loma, lai veiksmīgi virzītu mācīšanos. Posma mērķis ir skolēniem dod laiku un iespēju domāt par savu domāšanu, organizējot mērķtiecīgas mācību aktivitātes. Skolēni posma laikā pierakstus veido darba lapās, kuras ir pievienotas 5. un 6. pielikumā. Jautājumi, atbildes un sarunas ir neatņemama šī posma sastāvdaļa, kas var paplašināt katra skolēna pieredzi. Stratēģijas ieviešanas posma realizēšana plānota 2 mācību stundām jeb 80 minūtēm. Mācīšanās cikla 2. posma plāns un ieteikumi, kam pievērst uzmanību katrā no posma aktivitātēm, ir apkopoti 3.4. tabulā.

3.4. tabula

Stratēģijas ieviešanas posma gaita

Aktivitāte	Darbības forma	Kam pievērst uzmanību?	Uzdevums darba lapā (Skatīt 5. un 6. pielikumu)
1. Veidot sasaisti ar izpētes posmu.	Skolēni pāros salīdzina un pārrunā veikumu izpētes posmā.	Būtiski ir skolēnam dod laiku apdomāt, ko jaunu priekš sevis ir atklājis izgudrošanas posmā un tad rosināt sarunu ar pārinieku. Ieteicams, lai pāri veidotos no atšķirīgām grupām nekā bija izgudrošanas posmā.	1. uzdevums
2. Veidot savu stratēģiju. Uzklaut dažādus risināšanas paņēmienus.	Individuāli veido risināšanas stratēģiju, kuras pēc tam apvienojoties grupās salīdzina un izvērtē. Klasē kopīga saruna par dažādām risināšanas stratēģijām.	Veidot tādas grupas, lai tajās apvienotu dažādas risināšanas stratēģijas. Pievērst uzmanību, lai kopīgā sarunā būtu formulētas dažādas stratēģijas. Aicināt izvērtēt arī "nepareizās" stratēģijas, kuras uzdevumu neatrisināja, lai izanalizētu, kāpēc šīs stratēģijas nestrādāja.	2.1. un 2.2. uzdevumi
3. Veidot situācijas vizuālo attēlojumu.	Individuāli mēģina situāciju attēlot ar zīmējumu un nolasīt datus.	Ja skolēniem nav ieradums situācijas attēlot shematiski, skolotājam jābūt gatavam parādīt piemēru vai ierosināt darbu pāros.	2. uzdevums
Klasē kopīgi veido sarunu par izveidotajiem zīmējumiem un vai var nolasīt atrisinājumu pēc zīmējuma. Skolēni saņem jaunu darba lapu (5.pielikums) un turpina strādāt ar vizuālām risināšanas stratēģijām.			

4. Pētīt un analizēt dažādus vizuālos risinājumus.	Grupās spriež kā nolasīt risinājumus un kādu stratēģiju izmantot, lai nonāktu pie šādiem risinājumiem.	Šai aktivitātei ir nepieciešams skaidrojums, lai ievirzītu skolēnu domāšanu. Jautāt skolēnam, ko šajā kontekstā nozīmē saucēju vienādošana? Šis uzdevums ļoti labi parāda, kā sasaistīt situācijas kontekstu ar dažādām matemātiskām darbībām.	2.3. un 2.4. uzdevumi
5. Saskatīt un interpretēt attiecības starp proporcionāliem lielumiem.	Individuāli vai pāros veido risināšanas stratēģijas, lai atrisinātu uzdevumu. Salīdzina risinājumus.	Skolēniem jau ir pieredze ar līdzīgiem uzdevumiem, tādēļ lielai daļai skolēnu šis uzdevums nesagādās nekādas problēmas, tāpēc šos skolēnus var lūgt sniegt atbalstu klasesbiedriem. Skaidrojot uzdevumu citam, var gadīties, ka jāizmanto vairākas risināšanas stratēģijas, lai tas būtu saprotams, tādā veidā gan skaidrotājam būs jāpadomā par dažādām stratēģijām, gan klasesbiedrs saņems vairākas iespējas, kā tikt galā ar problēmu.	3. uzdevums
6. Dažādu stratēģiju izveide un spēja tās formulēt.	Individuāli veido risināšanas stratēģijas. Analizē kā situāciju var atrisināt ar aprēķiniem un kā neveidojot aprēķinus.	Pēc uzdevuma atrisinājuma būtu ieteicams katram skolēnam padomāt, kas noderēja vairāk risinot uzdevumu. Vai zīmējums palīdzēja veikt aprēķinus vai aprēķini palīdzēja uzzīmēt zīmējumu, lai līdzīgā situācijā spētu izvēlēties labāko stratēģiju.	4. uzdevums
7. Novērtē savu veikumu atbilstoši dotajam snieguma līmeņa aprakstam.	Individuāli veic pašvērtējumu par veikumu posma laikā.	Pēc pašvērtējuma veikšanas skolotājs sniedz savu atgriezenisko saiti par procesu un ieteikumus skolēniem, ko darīt tālāk, lai attīstītu prasmes.	Darba lapas apakšā

Stratēģijas ieviešanas posmā galvenā uzmanība tiek pievērsta tam, lai skolēniem būtu pēc iespējas plašāks kontekstu klāsts, kur pielietot izpēti posmā gūtos atklājumus, un uzdevumu saturs paredzētu iespējas pielietot dažādas risināšanas stratēģijas, kuras būtu vērtīgi analizēt un salīdzināt. Skolēni ne tikai mācās veidot savas stratēģijas, bet pieņem arī citu risinājumus. Kā piemēru var minēt uzdevumu, kas attēlots 3.13. attēlā, kur ir ļoti daudz un dažādas iespējas kā nonākt pie atbildes un kā to pamatot.

2. uzdevums. Zane uz klases vakaru ir apsolījusi atnest pašgatavotu apelsīnu sulu, kuras sastāvā ir ūdens un apelsīnu sulas koncentrāts. Lai atrastu visgaršīgāko sulas recepti, Zane vispirms testē vairākas iespējas.

Recepte A 2 glāzes sulas koncentrāts 3 glāzes ūdens	Recepte B 1 glāzes sulas koncentrāts 4 glāzes ūdens
Recepte C 4 glāzes sulas koncentrāts 8 glāzes ūdens	Recepte D 3 glāzes sulas koncentrāts 5 glāzes ūdens

Atbildi uz jautājumiem uz atsevišķas lapas.

- 2.1. Kura sulas recepte satur visvairāk apelsīnu sulas koncentrātu? Paskaidro kāpēc.
- 2.2. Kura sulas recepte satur vismazāk apelsīnu sulas koncentrātu? Paskaidro kāpēc.

3.13. att. Uzdevuma piemērs, kas pieļauj dažādas risināšanas stratēģijas

Mācīšanās cikla aprobācijas laikā, skolēni veidoja savas stratēģijas un demonstrēja dažādību, kā tikt galā ar problēmu, kas atspoguļota uzdevumā 3.13. attēlā. Dažādie uzdevumu risinājumi veidoja produktīvu sarunu par risinājumu trūkumiem un priekšrocībām un skolēniem bija iespēja iegūt jaunas idejas, kā iespējams efektīvāk atrisināt uzdevumu. Tāpat bija skolēni, kas atrada pareizas atbildes, bet nespēja formulēt kā domāja, lai pie tām tiktu. Šiem skolēniem saruna bija vērtīgs instruments, lai spētu formulēt stratēģiju, kā skolēns ir domājis, lai tiktu līdz rezultātam. Domājot par savu domāšanu, skolēns attīsta ieradumu, kā rīkoties līdzīgās situācijās. 3.14. attēlā ir parādītas dažas risināšanas stratēģijas, kuras skolēni pielietoja, lai atrisinātu problēmu.

Recepte A	Recepte B	
2 glāzes sulas koncentrāts 3 glāzes ūdens $\frac{2^{14} 80}{3} = \frac{80}{120}$	1 glāzes sulas koncentrāts 4 glāzes ūdens $\frac{1 \cdot 30}{4} = \frac{30}{120}$	$\frac{2}{3} > \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$
Recepte C	Recepte D	$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ $\frac{1}{4} < \frac{3}{5}$ 1. A
4 glāzes sulas koncentrāts 8 glāzes ūdens $\frac{4 \cdot 15}{8} = \frac{60}{120}$	3 glāzes sulas koncentrāts 5 glāzes ūdens $\frac{3 \cdot 24}{5} = \frac{72}{120}$	$\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$ $\frac{1}{2} < \frac{3}{5}$ 2. B 3. C 4. B

A $2:3 = 1:1,5$
 B $1:4$
 C $4:8 = 1:2$
 D $3:5 = 1:1,66$

2.1. A, jo satur vismazāk ūdens.
 2.2. B, jo satur visvairāk ūdens.

A $100 : 3 \cdot 2 = 66,6\%$
 D $100 : 5 \cdot 3 = 60\%$
 C $100 : 8 \cdot 4 = 12,5 \cdot 4 = 50\%$
 B $100 : 4 \cdot 1 = 25\%$

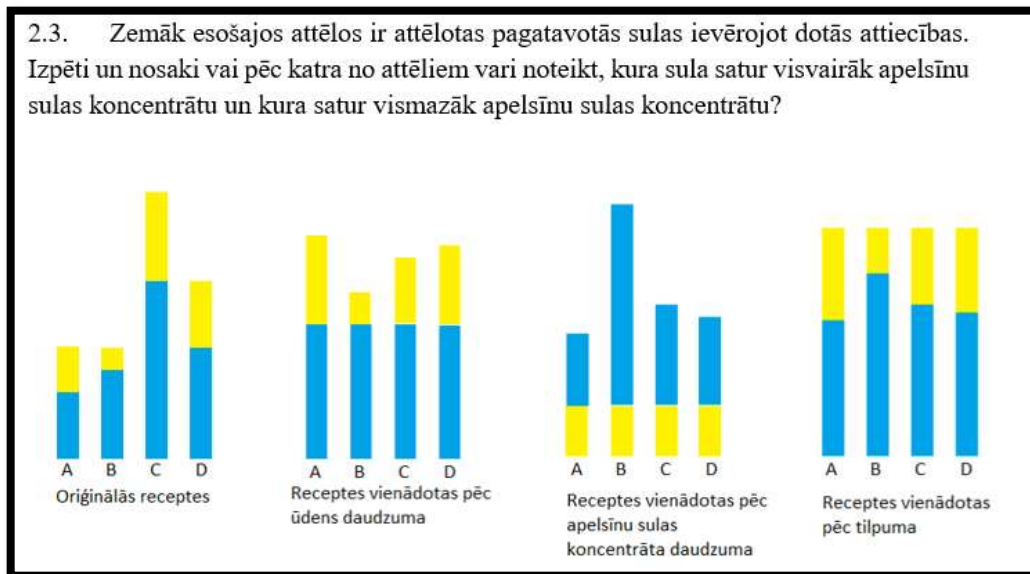
~~A = 2:5 = $\frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$~~
 B = 1:5 = 20%
 C = 4:12 = $\frac{1}{3} = 33\%$
 D = 3:8 = $0,375 = 37,5\%$

A = 30
 B = 60

Vispirms es dabijēju sulas konc. attiecību
 pēc kopējo šķīduma daudzuma. A=25.
 Tad es pārveidēju to attiecību uz procentuālo
 daļām un tad šo pārveidēju %. Tagad
 man bija redzama procentuāla attiecība
 starp sulas konc. un kopējo šķīduma daudzumu.

3.14. att. Skolēnu risinājumi 2. uzdevumam

3.14. attēlā redzams, ka skolēni izmantoja gan daļu salīdzināšanu, gan procentu aprēķinus. Daļu salīdzināšanas paņēmieni arī bija dažādi, tāpēc klasē radās labs pamats diskusijai par efektīvāko risināšanas paņēmieni un kā no aprēķinātā nolasīt atbildi. Jau diagnostikas laikā tika novērots, ka skolēni ļoti retos gadījumos izmanto vizuālu situācijas attēlojumu, lai atrisinātu uzdevumu, jo skolēniem nav ierasts šāds uzdevumu risināšanas paņēmieni. Lai pievienotu papildus risināšanas stratēģijas, kas varētu bagātināt skolēnu pieredzi, uzdevumam tika izveidots papildinājums un skolēniem pašiem bija jāmēģina veidot situācijas vizuālais attēlojums un jāmēģina nolasīt atbildi no sava zīmējuma. Skolēnu risinājumi bija vienveidīgi, jo skolēni bija spējīgi attēlot tikai oriģinālās receptes no kurām nolasīt atbildes nav acīmredzami, tādēļ iespējams viegli kļūdīties. Tā kā trūkstošais ieradums situācijas attēlot shematiski tika diagnosticēts savlaicīgi, tad darba autore bija paredzējusi, ka noderīgi šajā posmā būtu piedāvāt jau sagatavotas dažādas vizuālās atrisināšanas stratēģijas, lai skolēniem sniegtu skolēniem jaunas idejas situāciju interpretēšanai un kādam skolēnam palīdzētu izprast doto situāciju bez aprēķinu veikšanas. Dažādas vizuālās atrisināšanas metodes ir parādītas 3.15. attēlā.



3.15. att. Dažādas uzdevuma vizuālās atrisināšanas stratēģijas

Skolēnu uzdevums pētīt vizuālās atrisināšanas stratēģijas, kuras attēlotas 3.15. attēlā, ir, pirmkārt, izprast un spēt paskaidrot, kā no kura attēla var nolasīt uzdevuma atrisinājumu un otrkārt, kādas matemātiskās darbības ir jāveic, lai varētu izveidot šādu vizuālo atrisinājumu. Būtiski ir veikt arī salīdzinājumu, kura atrisināšanas metode, katram skolēnam šķiet efektīvākā un ērtākā. Vizuālās risināšanas stratēģijas būtu efektīvāk izmantojamas, ja uzdevums tiktu digitalizēts un katram skolēnam būtu pašam iespēja ērti modificēt oriģinālās receptes attēlojumu dažādos virzienos, lai atrisinātu uzdevumu, kas radītu labāku vidi domāšanas stratēģiju daudzveidībai, ko aprobācijas laikā, resursu trūkuma dēļ, neizdevās īstenot. Dodot iespēju risināt uzdevumu digitāli, skolēniem būtu iespēja tikt galā ar problēmu ērti un ātri arī tad, ja nav zināms, kā salīdzināt daļas vai kā izteikt un salīdzināt lielumus procentos, kas attiecīgi atbilst proporcionālās spriešanas pamatdomai, ka svarīgāk par konkrētu algoritmu iegūmēšanu, ir spēja domāt un izprast proporcionalitāti.

Metodiskie ieteikumi, īstenojot izgudrošanas posmu:

1. Mācīšanās cikla aprobācijas laikā tika novērots, ka posma gaita ir atkarīga no daudz un dažādām skolēnu prasmēm, kā piemēram, sadarbības, pamatošanas, skaidrošanas, analizēšanas un citām prasmēm, kuru mērķtiecīgas attīstības trūkums, var kavēt attiecīgi proporcionālās spriešanas attīstīšanas procesu.
2. Lai sasniegtu vislabāko rezultātu posma beigās, skolotājam ir jāpārskata vai darba autores ieteiktās sadarbības formas konkrētā klasē ir atbalstošas vai tomēr traucējošas attīstībai, un jāizvērtē vai klases vide ir skolēnu sarunu, jautājumu un kļūdu atbalstoša, lai skolēni nebaidītos veidot dažādas stratēģijas par kurām ir vērts apsprieties.

3. Skolotājam šajā posmā ir jābūt ļoti elastīgam, jo darba process mainās atkarībā no skolēnu veikuma un aktuālajiem jautājumiem. Skolēni ir tie, kas veido stratēģijas un tās vērtē un analizē, sarunājas par dažādiem risinājumiem, bet skolotājs sniedz atbalstu un piedāvā dažādus risināšanas virzienus, lai klasē būtu daudzveidība.

3.3.3. Pielietošanas posms

Trešais mācīšanās cikla posms jeb pielietošanas posms paredz iespējas lietot jaunās stratēģijas. Darba autore šo posmu veidoja, kā individuāli veicamus uzdevumus, kas saglabā tās pašas idejas ar ko skolēni darbojās gan pirmajā, gan otrajā mācīšanās cikla posmā, bet pievienojot jaunus nezināmus faktorus, kā piemēram, analizēt attiecības ne tikai starp diviem lielumiem, bet jau trīs lielumiem, kurus saista proporcionālas attiecības. Pielietošanas posmā skolēni risina patstāvīgi uzdevumus darba lapā, kura pievienota 7. pielikumā. Būtiski ir atzīmēt, ka pielietošanas posms nav pārbaudes darbs, bet gan mācību procesa sastāvdaļa, tādēļ nepieciešamības gadījumā ir pieejams skolotāja atbalsts stratēģijas izveidē. Pielietošanas posms paredzēts 1 mācību stundai jeb 40 minūtēm, kurās skolēns velta laiku arī apkopojumam par visu mācīšanās ciklu. Posma plāns un ieteikumi, kas radušies aprobācijas rezultātā, ir apkopoti 3.5. tabulā.

3.5.tabula

Pielietošanas posma gaita

Aktivitāte	Darbības forma	Kam pievērst uzmanību?	Uzdevums darba lapā (skatīt 7. pielikumu)
1. Sasaiste ar izgudrošanas posmu.	Saruna klasē par atlikušajiem jautājumiem par iepriekšējiem diviem posmiem.	Pirms sarunas vēlams ir noskaidrot, kas skolēniem visvairāk ir palicis atmiņā un par ko viņi ir aizdomājušies pēc izgudrošanas posma.	
2. Proportionalitātes izpratnes demonstrēšana.	Individuāli pabeidz iesāktos apgalvojumus.	Skolēni strādā individuāli, bet nepieciešamības gadījumā var strādāt pāros vai lielākās grupās. Daļa skolēnu pabeigs uzdevumus ātrāk, tādēļ šos skolēnus var piesaistīt, lai palīdz skolēniem, kam nepieciešams atbalsts.	1. uzdevums
3. Lieto proporcionālai situācijai piemērotu risināšanas stratēģiju.	Individuāli veido savu risināšanas stratēģiju un to realizē.		2. uzdevums
4. Demonstrē spēju pamatot savu apgalvojumu situācijā, kuru raksturo proporcionāli lielumi.	Individuāli spriež par doto situāciju un pamato savu atbildi.		3. uzdevums

5. Veic klasesbiedra darba izvērtējamu un veido sarunu, novērtē klasesbiedra veikumu pēc dotā snieguma līmeņa apraksta.	Skolēni mainās ar savām darba lapā un izvērtē otra skolēna risinājumus. Sarunājas par kopīgajām un atšķirīgajām risināšanas metodēm.	Skolēni salīdzina savus darbus ar klasesbiedriem un ne tikai novērtē otra darbu, bet arī sniedz ieteikumus, kā savu sniegumu uzlabot. Klasē kopīgi ir vērts pārrunāt un parādīt dažādus risināšanas paņēmienus.	Visa darba lapa
6. Kopsavilkums par visu mācīšanās ciklu.	Saruna klasē	Veiksmīga saruna var izdoties tikai tad, ja skolēni nebaidās klasē uzdot jautājumus un kļūdīties, tādēļ būtiski ir, lai klasē būtu atbalstoša vide.	

Pielietošanas posms nav pārbaudes posms par to, ko skolēns zina, bet gan iespēja skolēnam izmēģināt dažādas stratēģijas un izvērtēt, kā tās strādā arī jaunos kontekstos. Šajā posmā ir iespēja praktiski izprast, vai skolēniem ir izveidojusies izpratne par proporcionālām situācijām un spēja izdomāt stratēģiju, kā virzīties uz priekšu, lai nonāktu pie atbildes. Mācīšanās cikla aprobācijas laikā tika novērots, ka skolēni veiksmīgi tiek galā ar pielietošanas posma uzdevumiem un spēj savā starpā sadarboties un sniegt viens otram gan atbalstu, atbildot uz citu skolēnu jautājumiem, gan atgriezenisko saiti par klasesbiedru veikumu.

Metodiskais ieteikums, īstenojot pielietošanas posmu: Mācīšanās cikla aprobācijas laikā tika novērots, ka skolēnu risināšanas temps būtiski atšķiras, tādēļ ir ieteicams aicināt skolēnus, kuri risina ātrāk, izaicināt, lai uzdevumus atrisina vēl kādā citā veidā un izvērtē risināšanas stratēģijas.

Mācīšanās cikls var tikt izmantots ne tikai proporcionālās spriešanas attīstīšanai, bet sadalīts pa daļām, tas var tikt izmantots attiecīgā tematā, lai attīstītu dažādas citas prasmes, kā, piemēram, sadarbības, analizēšanas, skaidrošanas utt. Mācīšanās cikls ir noderīgs, lai paplašinātu skolēnu pieredzi, kā risināt proporcionālas situācijas, jo bieži vien kāda temata ietvaros skolēni iemācās vienu risināšanas veidu un jaunā kontekstā nespēj to pielietot, tādēļ ir nepieciešams strādāt tieši ar skolēnu domāšanu, dot viņiem laiku domāt un to izvērtēt.

3.4. Rezultātu analīze

Lai novērtētu mācīšanās cikla pienesumu skolēnu proporcionālās spriešanas attīstībā, pētījuma nobeigumā tika piedāvāts novērtējuma darbs (skatīt 8. pielikumu), lai izvērtētu, kā progresējušas skolēnu proporcionālās spriešanas prasmes. Katra skolēna veikums tika izvērtēts individuāli un iedalīts kādā no trīs kategorijām attiecībā pret novērotajiem uzlabojumiem:

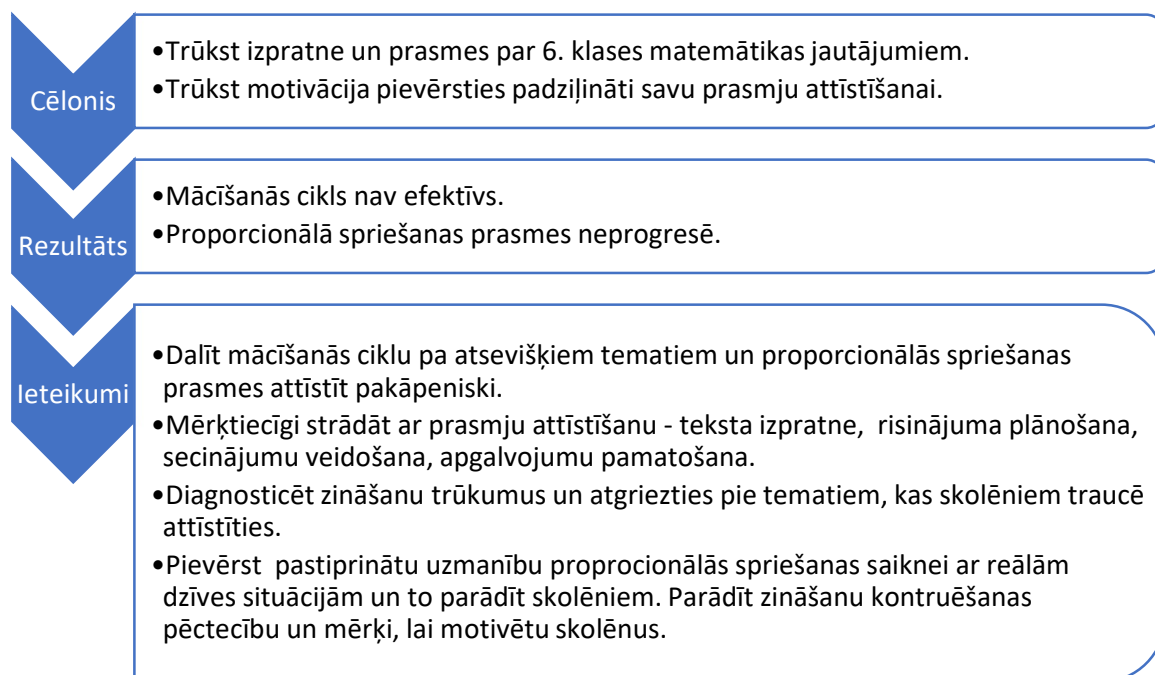
1. kategorija - nav novērota proporcionālās spriešanas attīstība. Skolēna proporcionālās spriešanas prasmes ir tādā pašā līmenī kā pirms mācīšanās cikla. Nav novērotas izmaiņas domāšanā un nav novēroti uzlabojumi.
2. kategorija – novērotas uzlabotas matemātiskās prasmes. Skolēns ir uzlabojis kādu no proporcionālās spriešanai nepieciešamajām pamatiemaņām un demonstrē izmaiņas savā domāšanas veidā par attiecībām. Pielieto konkrētas stratēģijas, lai tiktu galā ar proporcionālām situācijām.
3. kategorija – novērota uzlabota proporcionālās spriešanas kvalitāte. Skolēns, demonstrē kvalitatīvas proporcionālās spriešanas prasmes parādot padziļinātu izpratni par lielumu sakarībām, posma noslēgumā atrisina problēmas balstoties jaunās zināšanās. Skolēns ir uzlabojis nevis prasmi skaitliski atrisināt situāciju, bet gan prasmi izvēlēties piemērotāko stratēģiju, pamatot savu izvēli un spriest kvalitatīvi par proporcionālām situācijām.

Balstoties uz novērtējuma darba rezultātiem un novērojumiem mācīšanās cikla laikā, pētījumā iesaistīto skolēnu snieguma sadalījums kategorijās attēlots 3.16. attēlā.



3.16. att. Skolēnu proporcionālās spriešanas attīstības rezultāti pēc mācīšanās cikla realizēšanas

Analizējot skolēnu darbus un ņemot vērā darba autores novērojumus mācīšanās cikla laikā, tika novērtēts, ka 11 no 20 skolēniem nav demonstrējuši nekādus proporcionālās spriešanas uzlabojumus. Šajā kategorijā ietilpst gan 5 skolēni, kuri sākotnēji ir uzrādījuši pietiekamas un vidējas proporcionālās spriešanas prasmes, bet tās nav izdevies uzlabot, gan 6 skolēni, kuri sākotnēji ir uzrādījuši zemas proporcionālās spriešanas prasmes un tās nav izdevies attīstīt arī mācīšanās cikla laikā. Šāds rezultāts nav pārsteidzošs, jo proporcionālās spriešanas prasmju attīstīšana ir ilgtermiņa process un rezultāts veidojas daudzu gadu laikā, bet darba autores piedāvātais mācīšanās cikls ir īstermiņa projekts, kas pēc būtības var būt noderīgs tad, kad ir jau kaut kādas iestrādes proporcionālās spriešanas attīstībai. Šajā kategorijā 6 skolēnu darbos tika novērots dažādu matemātikas zināšanu trūkums, kas traucē pievērsties jautājumiem, kas prasa dziļāku kognitīvās attīstības līmeni, tādēļ, lai mācīšanās cikls sniegtu pēc iespējas labākus rezultātus, vispirms ir jāsakārto tie jautājumi, kas skolēniem līdz šim nav izprotami, lai virzītos tālāk. Šajā kategorijā ir 5 skolēni, kam ir pietiekošas matemātikas zināšanas, lai varētu tikt galā ar piedāvātajām proporcionālajām situācijām, bet tālāks progress nav novērots. Novērojot šo skolēnu darbības mācīšanās cikla laikā, varēja pamanīt, ka skolēni ir apguvuši konkrētus paņēmienus, kā risināt konkrētus uzdevumus, bet neredz vajadzību, lai apskatītu kādus citus risināšanas variantus vai diskutētu par proporcionālām attiecībām, izteiktu apgalvojumus par lielumu attiecībām, kas savukārt apgrūtina esošās zināšanas un prasmes veiksmīgi pielietot jaunās situācijās un nezināmos kontekstos. Tas atspoguļojās novērtējuma darbā, kurā netika demonstrēts proporcionālo spriešanas prasmju progress, tomēr jebkurš mēģinājums paplašināt skolēnu pieredzi, var parādīt savus rezultātus vēlāk, kad jauniegūtā informācija ir noglabāta ilgtermiņa atmiņā un parādās situācija, kad nepieciešams aktivizēt šīs zināšanas. Visiem šīs kategorijas skolēniem, neatkarīgi no matemātisko spēju līmeņa, nav efektīvs īstermiņa, kampaņveidīgs proporcionālās spriešanas prasmju attīstīšanai domāts mācīšanās cikls, jo pie katra no proporcionālās spriešanas attīstošajām iemaņām būtu nepieciešams strādāt atsevišķi konkrēta temata ietvaros un ilgtermiņā apgūtās zināšanas integrēt jaunu zināšanu apgūvē. Attiecīgi darba autores veidoto mācīšanās ciklu šiem skolēniem lietderīgāk būtu dalīt pa atsevišķiem tematiem nevis piedāvāt visu ciklu vienā laikā. Vienai daļai skolēnu tas palīdzētu vispār izprast lielumu proporcionālās attiecības, bet otrai daļai skolēnu tas palīdzētu saskatīt lietojuma plašo kontekstu loku un mērķi, kā tas, ko mācāmies tagad, būs noderīgs vēlāk. 3.17. attēlā ir apkopotas cēloņseku sakarības un ieteikumi, kas varētu dod labākus rezultātus attīstot proporcionālās spriešanas prasmes, strādājot ar skolēniem, kuru veikums šī pētījuma laikā atbilda 1. kategorijai.



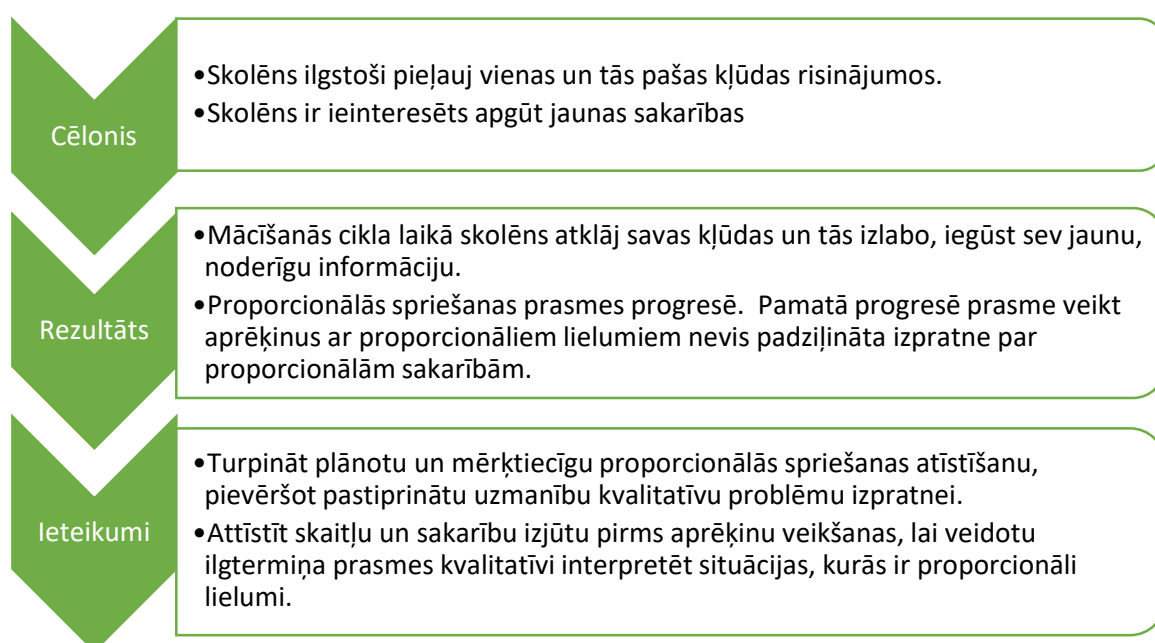
3.17. att. 1.kategorijas rezultātu cēloņseku sakarības un ieteikumi

Lai gan tūlītējas izmaiņas skolēnu proporcionālās spriešanas attīstībā pēc mācīšanās cikla realizēšanas nav novērotas lielākajai daļai skolēnu, darba autores aprobētais mācīšanās cikls šiem skolēniem var tikt uzskatīts kā pirmais solis mērķtiecīgā proporcionālās spriešanas attīstīšanas procesā, kura turpinājums caurvijas vēl daudziem tematiem turpmākajās klasēs. Iegūtie rezultāti liecina, ka daļa skolēnu vēl nav sasnieguši tādu kognitīvās attīstības līmeni, kas nepieciešams, lai demonstrētu kvalitatīvas proporcionālās spriešanas prasmes un darba autores piedāvātais mācīšanās cikls varētu būt efektīvāks vēlākā vecumposmā.

Atbilstoši veiktā pētījuma rezultātiem, 6 no 20 skolēniem uzrādīja uzlabotas matemātiskās prasmes saskaroties ar proporcionālām situācijām. 2. kategorijā tika ievietoti to skolēnu darbi, kuros bija pamanāmas izmaiņas kādā atsevišķā proporcionālās spriešanas aspektā vai izlabotas kādas nepilnības, kas traucēja precīzi interpretēt proporcionālas attiecības. Izvērtējot skolēnu darbus, ir novērojams, ka šie skolēni mācīšanās cikla laikā ir paši atraduši kādu savu kļūdu, kuru iepriekš regulāri ir pieļāvuši veicot darbības ar proporcionāliem lielumiem, vai atklājuši sev jaunu stratēģiju, kā tikt galā ar proporcionālām situācijām, ar kurām iepriekš nebija izdevies tikt galā. Nozīmīgākās izmaiņas skolēnu proporcionālās spriešanas prasmē tika novērotas tieši domājot kādas sakarības pastāv starp lielumiem un proporcionālās situācijās tās formulējot izmantojot reizināšanas nevis saskaitīšanas principus, kā to skolēni bija darījuši iepriekš, tādā veidā tiekot pie situāciju atrisinājuma. Četri skolēni, kuriem uzsākot mācīšanās ciklu, bija grūtības atpazīt un izveidot proporcionālas attiecības, posma noslēgumā tās patstāvīgi gan veidoja, gan aprēķināja nezināmos lielumus, gan spēja pamatot savus spriedumus. Šie skolēni mācīšanās cikla laikā

bija atkārtējuši un izpratuši, kas ir proporcionāli lielumi un kādas sakarības pastāv starp šiem lielumiem. Skolēni demonstrēja izpratni par proporcionālām attiecībām proporcionāli palielinot, samazinot attēlu, ko bija apguvuši mācīšanās cikla laikā. Viens skolēns demonstrēja uzlabotas proporcionālās dalīšanas prasmes, pie kā bija strādāts mācīšanās cikla izpētes posmā un uzlabojumus pamatojot savus aprēķinus ar apgalvojumiem par attiecībām starp lielumiem. Vēl viens skolēns vairākkārt demonstrēja jaunas risināšanas stratēģijas, kas iepriekš šim skolēnam nebija raksturīgas, kā piemēram situācijas attēlošana ar zīmējuma palīdzību un proporcijas veidošana un nezināmā aprēķināšana izmantojot proporcijas pamatīpašību. Lai gan iepriekš teorijas apskatā tika minēts, ka konkrēta algoritma lietošana neparāda spēju spriest proporcionāli, tomēr šajā gadījumā, kad skolēns pats spēj izveidot proporciju un to aprēķināt, darba autore uzskata, ka tas liecina par proporcionālās spriešanas izaugsmi, jo iepriekš šis skolēns vispār nespēja aprakstīt attiecības starp lielumiem un konkrētais algoritms netika mērķtiecīgi mācīts, bet tikai īslaicīgi parādījās citu skolēnu risinājumos.

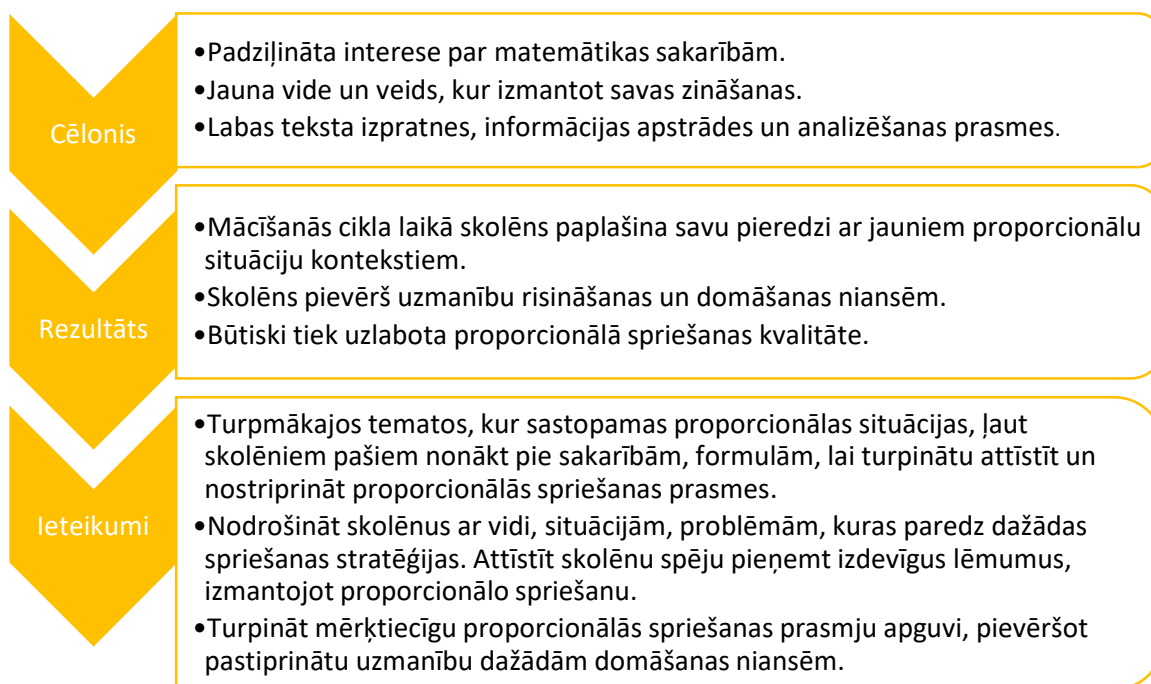
Lai gan katra skolēna veikums tika vērtēts individuāli, tomēr tika novērotas arī kopīgas tendences kāpēc šie 6 skolēni progresēja mācīšanās cikla laikā un apkopoti ieteikumi, kā turpināt iesākto procesu, lai proporcionālās spriešanas prasmes attīstītu arī turpmāk. 3.18. attēlā ir apkopotas cēloņseku sakarības un ieteikumi, kas varētu dod labākus rezultātus attīstot proporcionālās spriešanas prasmes, strādājot ar skolēniem, kuru veikums šī pētījuma laikā atbilda 2. kategorijai.



3.18. att. 2.kategorijas rezultātu cēloņseku sakarības un ieteikumi

Skolēni, kuru matemātiskās prasmes proporcionālās situācijās progresēja, lielāko ieguvumu sev guva mācīšanās cikla izpētes posmā, kur katrs paņēma sev nepieciešamo no plašā informācijas klāsta. Šiem skolēniem ir atbilstošas matemātiskās prasmes, lai do to informāciju izprastu un piedomājot par savu domāšanu, atklātu savas kļūdas un tās izlabotu. Šiem skolēniem izdevās uzrādīt salīdzinoši labāku sniegumu posma beigās nekā sākumā, jo bija nepieciešams pavisam nedaudz atkārtot kādu niānsi, lai tik īsā laikā uzlabotu savus rezultātus. Šobrīd nevar spriest vai mācīšanās cikls šiem skolēniem atstās paliekošu ietekmi uz proporcionālās spriešanas kvalitāti vai arī nākamajā reizē, saskaroties ar proporcionāliem lielumiem, skolēniem būs nepieciešams atkārtojums, bet jebkurā gadījumā mācīšanās cikls ir devis šiem skolēniem iespēju un laiku pievērst uzmanību savai domāšanai un risināšanas stratēģijai. Šiem skolēniem ir labs pamats, lai turpinātu kvalitatīvi attīstīt proporcionālo spriešanu un pieredzētu nozīmīgus uzlabojumus turpinot mācīties.

Atbilstoši pētījuma rezultātiem, trešajai kategorijai atbilda jeb proporcionālās spriešanas kvalitātes uzlabojumus varēja novērot 3 no 20 skolēnu darbiem. Visi trīs skolēni ir ar ļoti labām matemātikas prasmēm, kas attiecīgi nerada šķēršļus dziļākai problēmu izpētei un analizēšanai. Atšķirībā no citiem skolēniem, kas arī ir uzrādījuši pietiekami labus rezultātus, bet nav demonstrējuši uzlabojumus, šie skolēni ir parādījuši, ka mācīšanās cikla laikā ir ieguvuši dziļāku izpratni par proporcionālām attiecībām spējot kvalitatīvi pamatot risinājumus un analizēt dotās situācijas. Vērojot šos skolēnus visa mācīšanās cikla laikā, bija vērojama interese par dažādām stratēģijām un situācijas interpretācijām, kas attiecīgi atspoguļojās novērtējuma darbā, kurā šie skolēni parādīja iegūtas prasmes veidot secinājumus, pamatot aprēķinus ar kvalitatīviem spriedumiem, kas liecina par nozīmīgu soli uz priekšu proporcionālās spriešanas attīstībā. Šo skolēnu darbos varēja novērot izpratni par procentuāla pieauguma atšķirību no absolūta pieauguma, kas liecina, ka skolēni izprot dažādus veidus kā sakarības var interpretēt un spēj novērtēt izmaiņu būtiskumu, kas 6. klasē ir nozīmīgs rādītājs, lai spriestu par proporcionālās spriešanas kvalitāti. Šie skolēni demonstrēja dažādību risinot proporcionālas problēmas, kas liecina par skolēnu zināšanu bagātību un spēju pielietot atšķirīgus modeļus dažādās situācijās. Tomēr viena no lielākajām atšķirībām no pārējiem klases skolēniem, kas ļāva šiem trīs skolēniem virzīties nozīmīgu soli uz priekšu proporcionālās spriešanas attīstīšanā, ir vēlme iedziļināties domāt par savu domāšanu, interese par matemātikas sakarībām un jau esošas labas sadarbības, analizēšanas, informācijas apstrādes prasmes, kas atvieglo mācību procesu gan skolotājam, gan pašiem skolēniem. Kopīgās tendences kāpēc šie skolēni būtiski uzlaboja savas proporcionālās spriešanas prasmes un ieteikumi turpmākajām darbībām ir apkopoti 3.19. attēlā.



3.19. att. 3.kategorijas rezultātu cēloņseku sakarības un ieteikumi

Lai skolēns uzlabotu proporcionālās spriešanas prasmes, ir jārada tāda vide un situācijas, lai skolēnam būtu nepieciešams to darīt. Līdzīgi kā pati proporcionālas spriešanas struktūra, kas ir kā tīmeklis, kur savijas kopā dažādi matemātikas koncepti, tā arī attīstot proporcionālo spriešanu ir jārada izaicinošas situācijas, kuras prasa izmantot prasmju kopumu nevis atsevišķu algoritmu vai sakarību. Mācīšanās cikla aprobācijas rezultāti rāda, ka būtiski uzlabot proporcionālās spriešanas kvalitāti var tie skolēni, kuriem ir labas matemātiskās prasmes, tai pat laikā tas nav vienīgais nepieciešamais priekšnoteikums un, lai notiktu attīstība, ir jābūt arī prasmēm šīs zināšanas savienot un pielietot, lai aprakstītu konkrētu situāciju. Proporcionālās spriešana ir domāšanas veids un, lai to attīstītu, nepieciešams regulāri dot impulsus, virzienu, situācijas, lai skolēns būtu izaicināts domāt un analizēt savu domāšanu.

Pētījuma laikā skolēni bija 12 – 13 gadus veci, kas attiecīgi ir starpposms, kurā mainās domāšana un skolēna kognitīvā attīstība sasniedz tādu līmeni, lai izprastu proporcionālas attiecības. 6. klasē skolēns ir ceļa sākumā, lai apgūtās matemātikas sakarības sāktu apvienot vienotā domā un stratēģijas izveidē. To parāda arī mācīšanās cikla aprobācijas dažādie rezultāti, ka ir skolēni, kuri vēl nav sasnieguši šo robežu un ir skolēni, kuri ir pāri robežai un kuru domāšana ir gatava situācijas uztvert abstrakti, domāt kritiski un izvērtēt dažādus ietekmējošos situācijas aspektus. Kas savukārt, norāda uz nepieciešamību domāt par mācību procesa diferenciaciju, lai visi skolēni virzītos uz priekšu neatkarīgi no šī brīža gatavības attīstīt proporcionālās spriešanas prasmes. Būvējot skolēnu proporcionālās spriešanas

prasmes, 6. klasē ir ļoti svarīgi nostiprināt pamatus izpratnei par to, kas ir proporcionāli lielumi, kā lasāmas dažādas attiecības starp lielumiem un interpretējamas proporcionālas situācijas. Tikpat svarīgi ir strādāt pie dažādām prasmēm, kā izprast un izmantot doto informāciju, kā lasīt tekstu ar izpratni un kā veidot risinājumu, lai sākot ar 7. klases tematu “Kā raksturo sakarību starp mainīgiem lielumiem?” veidotu ieradumu, kā sasaistīt dažādas proporcionālās spriešanas nianšes, lai kvalitatīvi spriestu par proporcionālu lielumu attiecībām un lietojumu. Apkopojot aprobācijas rezultātus un novērojumus, darba autore secina, ka realizējot īstermiņa projektu proporcionālās spriešanas attīstīšanai, kā darba autores veidotais mācīšanās cikls 6. klasei, var diagnosticēt zināšanu un prasmju trūkumus, kas traucē skolēniem virzīties uz priekšu, izlabot mazas nianšes un pārpratumus, kurus skolēni līdz šim proporcionālās situācijās ir interpretējuši nekorekti, kā arī izaicinātu skolēnus domāt par savu domāšanu. Lai proporcionālo spriešanu attīstītu, kā domāšanas stratēģiju, ir jābūt konkrētam plānam un darbībām visas pamatskolas garumā, kad un kādas konkrētas prasmes attīstīt, lai skolēns veidotu savu domāšanu. Darba autore iesaka aprobētos mācību materiālus izmantot kā daļu no ilgtermiņa proporcionālās spriešanas attīstīšanas plāna, kas bagātinātu skolēnu pieredzi, bet negaidīt būtisku, strauju lēcieni proporcionālās spriešanas attīstībā tūlīt pēc tā realizēšanas.

SECINĀJUMI

1. Proporcionālā spriešana ir domāšanas process par proporcionālām attiecībām starp lielumiem, lielumu mijiedarbību un prasme izprast, konstruēt, un izmantot multiplikatīvas attiecības starp mainīgajiem lielumiem. Spēja spriest proporcionāli ir domāšanas stratēģija proporcionālās situācijās nevis konkrēta algoritma lietošana.
2. Skolēni no 12 – 15 gadiem sasniedz tādu kognitīvās attīstības līmeni, lai spētu domāt abstrakti un risināt dažādas kompleksas problēmsituācijas, kas paredz izvērtēt vairākas problēmu risināšanas stratēģijas un pieņemt pamatotus lēmumus.
3. Proporcionālai spriešanai ir komplicēta uzbūve, kas sevī ietvert tādas darbības kā spēju izprast racionālus skaitļus, proporcionālu dalīšanu, apvienošanu vienībās, attiecību izjūtu, lielumu mijiedarbību, abstrakto domāšanu, kas katra atsevišķi un visas kopā ir pamats izpratnei par matemātiku.
4. Skolēni neattīsta proporcionālu spriešanu vienā mācību stundā, tēmā, tematā vai pat mācību gadā. Tas ir ilgtermiņa process, kura laikā konsekventi dažādos kontekstos skolēni sastopas ar situācijām, kuras raksturo proporcionāli lielumi.
5. Pamatizglītības mācību programma ir izveidota tā, lai vispirms skolēnos attīstītu spējas saskatīt proporcionālus lielumus un skaidrot attiecības starp lielumiem, un tikai pēc tam iepazīstinātu ar proporcijas matemātisko modeli. Tas, savukārt, vispirms rada skolēnos izpratni par proporcionalitātes būtību un attīstīta spēju raksturot situāciju, nevis rada ieradumu bez izpratnes lietot konkrētu algoritmu proporcionālu problēmu risināšanā.
6. Salīdzinot matemātikas priekšmeta programmu dažādām klašu grupām, proporcionālās spriešanas pamatizpratnei visnozīmīgākā ir 6. klase, kurā sāk izprast attiecības starp lielumiem un par tām domāt padziļināti, tomēr arī 7. klase, kurā tiek ieviesta proporcija kā matemātikas modelis un pētīta lineāra funkcija, ir nozīmīgs pagrieziens, lai turpmākajās klasēs veiksmīgi attīstītu proporcionālo spriešanu kā domāšanas stratēģiju.
7. Proporcionālās spriešanas diagnostikas rezultātā tika secināts, ka 6. klases skolēniem ir ļoti atšķirīgs izpratnes līmenis par proporcionāliem lielumiem, kas turpmāko proporcionālās spriešanas attīstīšanas procesu padara komplicētu, un, lai veiksmīgi turpinātu mērķtiecīgu attīstību, ir jādiferencē gan mācību process, gan mērķi, ko katrā tematā ir vēlams apgūt.
8. Īstermiņā realizēts darba autores veidotais mācīšanās cikls proporcionālās spriešanas attīstīšanai sniedz labākus rezultātus, ja skolēniem ir nepieciešams salīdzinoši mazs atbalsts jaunu prasmju apguvē, ir pietiekami labas matemātiskās prasmes vai nepieciešams atkārtot un

izlabot kādu iepriekš apgūtu niansi. Skolēniem ar zemākām matemātikas prasmēm mācīšanās ciklu nepieciešams sadalīt pa vairākiem tematiem, lai katru proporcionālās spriešanas daļu izprastu atsevišķi un pakāpeniski būvētu domāšanas stratēģiju.

9. Lai skolēns demonstrētu kvalitatīvas proporcionālās spriešanas prasmes, nepieciešama ne tikai laba izpratne par matemātikas sakarībām, bet arī interese par tām. Lai veicinātu skolēnu motivāciju attīstīties, ir jārada tāda mācību vide, lai skolēns jūt nepieciešamību pilnveidoties un redz konkrētas kopsakarības matemātikas saturā ilgtermiņā.

10. Lai veiksmīgi attīstītu proporcionālās spriešanas prasmes, skolotājam skolēniem ir jāpiedāvā situācijas ar daudzveidīgu kontekstu, situācijas, kas atspoguļo gan kvantitatīvas, gan kvalitatīvas problēmas un ietver dažādas risināšanas stratēģijas, lai bagātinātu skolēnu pieredzi, kas ir pamatā tālāku komplicētāku problēmu risināšanai. Skolotājam ir jādod laiks skolēniem domāt par savu domāšanu.

11. Proporcionālās spriešanas mācīšana pamatskolas matemātikas kursā un izpratnes radīšana par proporcionālām attiecībām starp lielumiem ir ilgtermiņa mērķtiecīgs darbs ar skolēnu domāšanu, regulāri novērojot katra skolēnu proporcionālās spriešanas attīstības virzienu un identificējot nepieciešamās darbības tālākai prasmju pilnveidei. Lai panāktu katra skolēna ilgtermiņa progresu, skolotājam ir jābūt gan plānam kad un kā tiks pievērsta uzmanība proporcionālās spriešana attīstīšanai, gan jāredz skaidras kopsakarības pamatskolas matemātikas saturā un jānodod šī ziņa arī skolēniem.

IZMANTOTĀS LITERATŪRAS UN AVOTU SARAKSTS

1. Cambridge University Press. *Cambridge dictionary*.
<https://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/>
2. Campbell T.C. & Fuller R. (1982) *A Teachers Guide to the Learning*.
<https://digitalcommons.unl.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1010&context=adaptessays>
3. Dooren W.V., Vamvakoussi X., Verschaffel L. (2018) *Educational Practices Series: Proportional reasoning*. IBE.
http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/resources/30_educational_practices_30-v9_002.pdf
4. France I. (2010) *Matemātika skolā: Pieejas skolas matemātikas kursa veidošanai*. Lielvārds.
5. Government of Ontario, Ministry of Education. (2012) *Paying Attention to Proportional Reasoning*. Queen`s Printer for Ontario.
<http://www.edu.gov.on.ca/eng/teachers/studentssuccess/proportionreason.pdf>
6. Inhelder B. & Piaget J. (1958) *The Growth Of Logical Thinking: From childhood to adolescence*. Basic Book Inc.
7. Izglītības satura un eksaminācijas centrs, *Matemātika 1. – 9. klasei, Mācību priekšmeta programmas paraugs*. <https://www.visc.gov.lv/lv/media/2665/download>,
8. Karplus, R., Pulos, S., Stage, E. K. (1983). *Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems*. Educational Studies in Mathematics.
9. Knox L.B., (2017) *Improving Students proportional reasoning ability in the context of Algebra I*. University of Pittsburgh. <https://core.ac.uk/download/pdf/95407344.pdf>
10. Lamon S. (1996) *The development of unitizing: Its role in children`s partitioning strategies*. Journal for Research in Mathematics Education.
11. Lamon S. (2012) *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers (3rd ed.)*. Erlbaum.
12. Lanius C.S. & Williams S.E. (2003), *Proportionality: A Unifying Theme for the Middle Grades*. – Mathematics Teaching in the Middle school Vol.8.No.8.
https://www.jstor.org/stable/41181344?read-now=1&seq=4#page_scan_tab_contents.
13. Larson K., *Developing Children`s Proportional Reasoning: Instructional Strategies That Go the Distance*. Ohio Journal of School Mathematics 67.
https://kb.osu.edu/bitstream/handle/1811/78172/OJSM_67_Spring2013_42.pdf
14. Lesh, R., Post, T., Behr, M. (1988). *Proportional reasoning. Number concepts & operations for middle graders*. National Council of Teachers of Mathematics.

15. Mathematics Assessment Resource Service University of Nottingham & UC Berkeley (2015), *Classifying Proportion and Non-proportion Situations*.
<https://www.stem.org.uk/system/files/elibrary-resources/2018/06/183%20Classifying%20proportional%20and%20non-proportional%20situations%20lesson.pdf>
16. McIntosh M.B. (2013) *Developing proportional reasoning in middle school students*. The University of Utah. <https://csme.utah.edu/wp-content/uploads/2013/06/Marcie-McIntosh.pdf>
17. Ministru kabineta noteikumi Nr. 747. (1.09.2020) *Noteikumi par valsts pamatizglītības standartu un pamatizglītības programmu paraugiem. Sasniedzamie rezultāti matemātikas mācību jomā, beidzot 3., 6., 9. klasi.* Latvijas Vēstnesis
<https://likumi.lv/ta/id/303768#piel6>
18. Nasir R. (2018) *Identifying the students' proportional reasoning*. International Journal of Educational Science and Research, Vol. 8, Issue 2.
https://www.researchgate.net/publication/323963428_Identifying_the_Students'_Proportional_Reasoning
19. Pandiscio E.A. (2004) *Using Proportional Reasoning to Solve Geometric Problems*. - *National Council of Teachers of Mathematics*. The Mathematics Teacher Vol. 98, No. 1.
https://www.jstor.org/stable/27971609?seq=1#metadata_info_tab_contents
20. Park J.S., Park J.H., Kwon O.N. *Characterizing the Proportional Reasoning of Middle School Student*. The SNU journal of education research. https://space.snu.ac.kr/bitstream/10371/72999/1/vol19_5.pdf
21. Ramsey A. (2020) *What is Cognitive Development?* Cincinnati Children's
<https://www.cincinnatichildrens.org/health/c/cognitive>
22. Riehl S. M., Steinhorsdottir B. (2014) *Revisiting Mr. Tall and Mr. Short*. Mathematics teaching in the middle school, Vol. 20, No. 4
https://www.kentuckymathematics.org/docs/kcm_virtual/KCM_Virtual_Middle_School-Dee_Crescitelli-handouts.pdf
23. Spencer Pulaski M. A. (1971) *Understanding Piaget: An Introduction to Children's Cognitive Development*. Harper&Row Publishers
24. STEM learning, *Proportional reasoning*.
<https://www.stem.org.uk/resources/community/collection/22427/proportional-reasoning>
25. Sweetland R. (2021) *The Learning Cycle as an Instructional Theory or Model*.
<https://www.homeofbob.com/pedagogy/theories/instructnl/lernCycle/learnCclEsa.html#exploration>

26. TESS India. *Creative thinking in mathematics: proportional reasoning*.
https://www.open.edu/openlearncreate/pluginfile.php/134965/mod_resource/content/3/EM15_AIE_Final.pdf
27. The math learning center Mathnasium. *Focus on Math: Proportional Thinking*.
<https://www.mathnasium.com/www-mathnasium-com-littleton-news-focus-on-math-proportional-thinking>
28. The National Council of Teachers of Mathematics. (2000) *Principles and Standards for School Mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics.
29. Valsts Izglītības satura centrs. *Caurviju prasmes*. ESF projekts Nr.8.3.1.1/16/I/002 Kompetenču pieeja mācību saturā, Skola2030. <https://skola2030.lv/lv/macibu-saturs/merki-skolenam/caurviju-prasmes>
30. Valsts Izglītības satura centrs. *Matemātika 1.-9. klasei. Mācību priekšmeta programma*. ESF projekts Nr.8.3.1.1/16/I/002 Kompetenču pieeja mācību saturā. Skola 2030. <https://mape.skola2030.lv/resources/159>
31. Watson A., Jones K., Pratt D. (2013) *Key Ideas in Teaching Mathematics*. Oxford University Press.

PIELIKUMI

Pielikums Nr. 1

Temata 6.1. Kā kopumu sadala noteiktā attiecībā? apguves norise [30]

Temata apguves norise

Skaitļu attiecība	<p>Lasa autentisku tekstu, piemēram, lietošanas pamācību, recepti, kur lietota lielumu attiecība, un saviem vārdiem skaidro, kā to saprot.</p> <p>Min piemērus, kuros izmantota lielumu attiecība.</p> <p>Vingrinās divu lielumu attiecību attēlot shematiskā zīmējumā dažādi – kā vienu figūru, kā divas figūras –, izvēlas sev piemērotāko veidu.</p> <p>Nosaka lielumu attiecību, ja lielumi attēloti shematiskā zīmējumā.</p> <p>Lielumu attiecību pieraksta kā skaitlisku attiecību, un otrādi – min piemērus, kādi lielumi veido doto attiecību, piemēram, 1 : 10; 1 : 60.</p> <p>Nosauc piemērus skaitļu pāriem, kas savstarpēji attiecas tāpat kā dota attiecība.</p> <p>Vingrinās aptuveni noteikt figūru, apkārtnes objektu lielumu (garumi, laukumi) attiecību, pārbaudei izmanto digitālos rīkus un mērījumus.</p>
Kopuma sadalīšana noteiktā attiecībā (2 vai 3 lielumi)	<p>Spriež par informāciju, ko var iegūt no attiecības pieraksta, piemēram, 1 : 3 : 4.</p> <p>Apdomā un skaidro, kā jārikojas, lai izveidotu maisījumu dotā attiecībā, ja tam ir divas sastāvdaļas, trīs sastāvdaļas; skaidro saviem vārdiem.</p> <p>Sadala nogriezni divos vai trīs nogriežņos, ja dota nogriežņu garumu attiecība.</p> <p>Rūtiņu lapā sadala figūru divās vai trīs daļās, ja dota daļu laukumu attiecība.</p> <p>Situācijā ar sadzīvīsku kontekstu lieto lieluma sadalīšanu noteiktā attiecībā (ar nezināmo jebkurā pozīcijā).</p>
Tieši proporcionāli lielumi	<p>Lasa doto situāciju aprakstus, saskata un atšķir situācijas, kurās, vienu lielumu palielinot vairākas reizes, otrs lielums palielinās tikpat reizi, bet kurās – ne. Min citus piemērus, kas raksturo katru no gadījumiem.</p> <p>Spriež, kā jārikojas, ja recepte pierakstīta kādam noteiktam daudzumam produkta, bet nepieciešams iegūt informāciju par citu daudzumu. Veic nepieciešamos aprēķinus.</p> <p>Apkopo tabulā datus par diviem vai vairāk tieši proporcionāliem lielumiem. Stāsta, ko ievēro.</p> <p>Izmanto dotu proporcionālu lielumu grafisko attēlojumu (lielumi doti kā punkti) un stāsta, ko var uzzināt no grafiskā attēlojuma.</p> <p>Grafiski attēlo sakarību starp tieši proporcionāliem lielumiem. Mācās no grafika nolasīt lielumus.</p> <p>Aplūko dažādus risinājumus nezināma lieluma (situācija raksturota ar proporcionāliem lielumiem) noteikšanai, skaidro situācijas attēlošanu shematiskā zīmējumā, komentē katrā risinājuma solī veikto.</p> <p>Situāciju uzdevumos aprēķina nezināmo lielumu (lielumi ir tieši proporcionāli), izvēloties paņēmieni un pieraksta veidu.</p>
Mērogs	<p>Aplūko dažāda veida kartes, atrod tajās mērogu, komentē kopīgo un atšķirīgo to pierakstā. Aprēķina noteiktam attālumam kartē atbilstošo attālumu dabā, vai otrādi.</p> <p>Sadarbojas grupā – plāno, veic mērījumus, izveido klases telpas, skolas puķu dobes vai tml. plānu (divdimensionālu) norādītajā vai pašā izvēlētajā mērogā.</p>
Apgriezti proporcionāli lielumi	<p>Tabulā apkopo datus par diviem apgriezti proporcionāliem lielumiem. Skaidro, ko ievēro.</p> <p>Situāciju uzdevumos aprēķina nezināmo lielumu (lielumi ir apgriezti proporcionāli), izvēloties paņēmieni un pieraksta veidu.</p>

Diagnosticējošais darbs

1. uzdevums. *Dotas divas figūras a un b. Nosaki, kuras figūras laukums ir zilāks (atzīmē atbilstošo) un atbildi uz jautājumiem.*

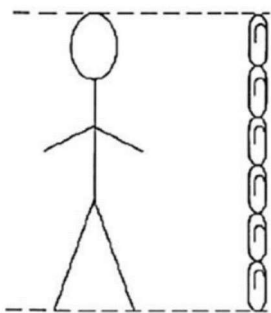


1. Uzraksti, kāpēc tu domā, ka tieši šī figūra ir zilāka nekā otra figūra?

2. Kā tu paskaidrotu citiem, kā risināt šādu uzdevumu?

2. uzdevums. *Attēlā ir parādīts Īsais kungs. Ja viņa augumu mēra ar papīra saspraudēm, tad viņa augums ir 6 saspraudes garš. Ja viņa augumu mēra ar sērkociņiem, tad viņa augums ir 4 sērkociņus garš. Īsā kungam ir draugs Garais. Kad mēra Garā kunga augumu, tad viņa augums ir 6 sērkociņu garš. Kāds būtu Garā kunga augums, ja to mērītu papīra saspraudēs?*

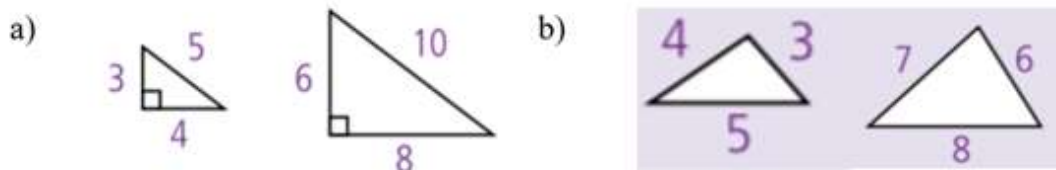
Īsais kungs



1. Apraksti pa soļiem, kā tu risini uzdevumu:

2. Kāds ir Garā kunga augums papīra saspraudēs?

3. **uzdevums.** Dotas divas situācijas a un b, kurās parādīti dažādi trijstūri.



1. Kuru situāciju raksturo proporcionāli lielumi?
2. Paskaidro, kāpēc tu tā domā?

4. **uzdevums.** Lai pagatavotu augļu sulu, izmantojiet divas glāzes vīnogu sulas uz katrām 3 glāzēm ābolu sulas. Ja jums jau ir 12 glāzes ābolu sulas, cik glāzes vīnogu sulas vajadzēs, lai pagatavotu augļu sulu?

1. Parādi ar kādām darbībām tu aprēķināji rezultātu.
2. Aprēķini, cik glāzes ābolu sulas nepieciešams, ja tev ir 200 glāzes vīnogu sulas, lai pagatavotu augļu sulu.
3. Paskaidro, kā tu risināji uzdevumu. Vai tava risināšanas stratēģija mainījās atbildot uz 2. jautājumu (veicot aprēķinus ar lielu sulas daudzumu)?

5. uzdevums. Dota sekojoša situācija: Vecāki tev katru nedēļu dod kabatas naudu. Viņi piedāvā to palielināt, bet tev jāizvēlas viens no kabatas naudas palielināšanas modeļiem - 20% no esošās kabatas naudas vai 3 eiro.

1. Kuru modeli tu izvēlētos? (Raksti atbildi pirms aprēķinu veikšanas balstoties uz savu intuīciju). Kāpēc?

2. Veic aprēķinus, lai pamatotu, kāpēc tavs izvēlētais modelis varētu būt izdevīgāks?

3. Vai otrs modelis varētu kādreiz būt izdevīgāks nekā tavs sākotnēji izvēlētais? Pamato atbildi ar piemēru.

6. uzdevums. Nosaki, kurš apgalvojums ir patiess un kurš nepatiess. Pamato, kāpēc tu tā domā.

Nr.	Apgalvojums	Patiess	Nepatiess	Pamatojums
1.	Ja viena meitene var aiziet uz skolu 10 minūtēs, tad ejot divatā uz skolu viņas aizies 20 minūtēs.			
2.	Ja viens saldējums maksā 40 centus, tad divi saldējumi maksā 80 centu.			
3.	Ja viens zēns var uztaisīt vienu Lego mašīnu 2 stundās, tad viņš var uztaisīt 3 tādas mašīnas 6 stundās.			
4.	Ja Jānis var nokrāsot sētu divās dienās, tad Jānis, Pēteris un Artūrs var nokrāsot to pašu sētu 6 dienās.			
5.	Ja mašīna var nobraukt 50 km stundā, tad tā var nobraukt 200 km 4 stundās.			

Mācību stacijas





1. stacija – Apvienošana vienībās.

Apvienošana vienībās ietver spēju iedomāties noteiktu daudzumu vienāda lieluma grupās un spēj tās uztvert kā vienības. Piemēram, taisnstūri 1. attēlā var uzskatīt gan par 1 taisnstūri (vienību), gan 4 kvadrātiem vienlaicīgi. Tur ir 5 vienības, katrā ir 4 kvadrāti.



1.attēls. Kvadrātu apvienošana vienībās.

Padomā un pārrunā ar grupas biedriem, cik vienības ir attēlotas attēlā, ja par vienību tiek uzskatīts dažāds daudzums trijstūru.

Nosaki vienību skaitu, kas ir attēlotas šajā  attēlā,
ja  ir vienība...
ja  ir vienība...
ja  ir vienība...

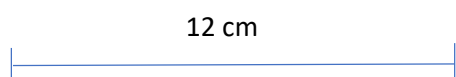
2. stacija – Izproti daļskaitli un tā kontekstu.

Mums ir zināms, ka daļskaitlis ir skaitlis, kas apzīmē noteiktu daļu no viena veseluma. Tomēr, vai esi aizdomājies cik daudz un dažādos kontekstos var lietot vienu un to pašu daļu, bet katrā reizē tas apzīmē kaut ko citu?

Piemēram,

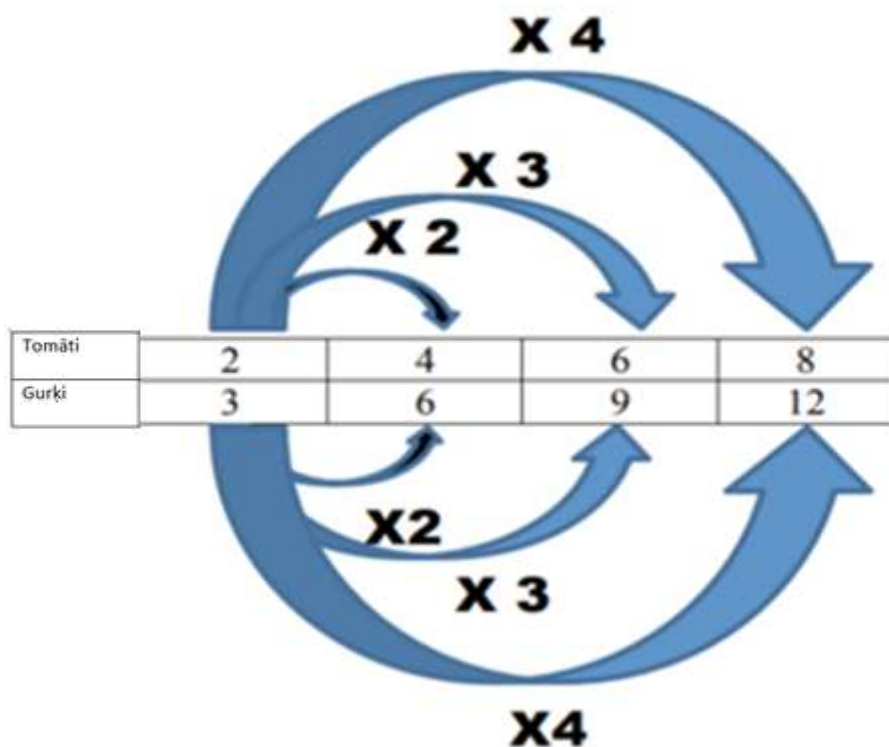
- No mājām līdz skolai Jānim ir jāiet 45 minūtes jeb $\frac{3}{4}$ no stundas. (Šajā gadījumā $\frac{3}{4}$ apzīmē daļu no stundas).
- Šo bildi es gribētu samazināt līdz $\frac{3}{4}$ no oriģinālā izmēra. (Šajā gadījumā $\frac{3}{4}$ darbojas kā reizinātājs, lai mainītu izmēru).
- Skudra noiet 6 m 8 minūtēs. (Šajā gadījumā $\frac{3}{4}$ apzīmē attiecību jeb ātrumu. Skudra noiet $\frac{3}{4}$ m vienā minūtē).

Padomā un pārrunā ar grupas biedriem, kā varētu uzzīmēt nogriezni, kas atbilstu $\frac{3}{4}$ no attēlā redzamā nogriežņa.



3. stacija – Saskati attiecību starp lielumiem.

Savstarpējās attiecības starp dažādiem lielumiem raksturo sakarību, kas pastāv starp šiem lielumiem. Piemēram, mērot attālumu no punkta A līdz punktam B izmantojot pēdas, attālums ir 20 pēdas, bet šo pašu attālumu mērot soļos attālums ir 5 soļi. No tā izriet pēdu un soļu attiecība, jo veiktais attālums ir viens un tas pats. Tātad 5 soļiem atbilst 20 pēdas, jeb veidojas attiecība $5 : 20$ vai pārveidojot $1 : 4$, no kā var secināt, ka vienam solim atbilst 4 pēdas.



Attiecību saskatīšana bieži palīdz aprēķināt nezināmo lielumu. Aplūko piemēru: dota tomātu un gurķu salātu recepte, kura paredz, ka uz katriem 2 tomātiem jāpievieno 3 gurķi jeb tomātu un gurķu attiecība ir $2 : 3$. Cik gurķi jāpievieno, ja bļodā ir sagriezti 8 tomāti?

Padomā un pārrunā ar grupas biedriem, cik tomātu jāpievieno, ja bļodā ir sagriezti 60 gurķi?

4. stacija – Lielumi un to izmaiņas.

Izpratni par lielumu attiecībām parāda tādi jēdzieni kā tieši proporcionāli lielumi un apgriezti proporcionāli lielumi.

Tiešo proporcionalitāti starp diviem mainīgajiem lielumiem (ja to vērtības ir pozitīvas) mēdz izteikt: cik reižu palielinās viena lieluma vērtība, tik reižu palielinās arī otra lieluma vērtība.

Apgriezto proporcionalitāti starp diviem mainīgajiem lielumiem (ja to vērtības ir pozitīvas) izsaka: cik reižu palielinās viena lieluma vērtība, tik reižu pamazinās arī otra lieluma vērtība.

Izpratne kā lielumi ir savstarpēji saistīti, mainās vai mainās atkarībā viens no otra palīdz izdarīt izvēli un veikt nākotnes prognozes.

Piemēram, mobilā tālruņa plānam ir noteikta ikmēneša bāzes maksa un maksa par lietošanas minūti. Bāzes izmaksas ir nemainīgas. “Lietošanas minūtes” ir mainīgs lielums, kam ir proporcionālas izmaksas, pamatojoties uz izmantošanu. Jo vairāk minūtes tiks norunātas, jo lielākas būs izmaksas.

Padomā un pārrunā ar grupas biedriem, kurš no dotajiem piemēriem raksturo tiešo proporcionalitāti, apgriezto proporcionāli vai vispār nav proporcionāli lielumi.

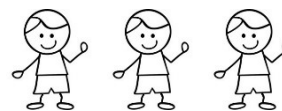
Piemēri:		
Viens strādnieks sētu nokrāso 3 dienās, trīs strādnieki strādājot tādā pašā ātrumā to nokrāso 1 dienā.	Veikalā 0,5 l Coca-cola pudele maksā 0,95 EUR. Tajā pašā veikalā 2 l Coca-cola pudele maksā 1,70 EUR.	Anna lasa 100 vārdus minūtē. 5 minūtēs Anna izlasīja 500 vārdus.

5. stacija – Sadalīšana daļās

Sadalīšana daļās ietver spriešanu par vienlīdzīgu veseluma sadalīšanu, relatīvās atrašanās vietas noteikšanu un divu dažādu lietu mēru salīdzināšanu. Tas var ietvert spriešanu par diviem lielumiem, lai atrastu trešo. Sadalīšana daļās var noderēt, lai precīzi aprēķinātu kāda lieluma vērtību vai arī palīdzēt intuitīvi noteikt aptuveno vērtību

Piemēram, trīs tenisa bumbas maksā 3,60 EUR, sešas maksā 7,20 EUR. Cik maksā 7? Jau sākumā var intuitīvi spriest, ka 7 bumbas maksās vairāk par 7,20 EUR, tomēr precīziem aprēķiniem nepieciešams atrast, cik maksā 1 bumba.

Padomā un pārrunā ar grupas biedriem, kurš bērns dabūs vairāk picas (visas picas ir vienāda lieluma), ja 5 meitenes dala 3 picas, bet 3 puisi 2 picas?

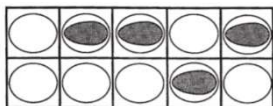


6. stacija – Abstraktā domāšana

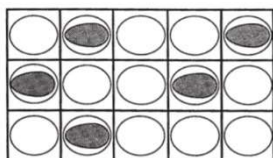
Lielumus var salīdzināt pēc to absolūtās vērtības un pēc to procentuālās vērtības. Piemēram, dziedāšanas grupā dziedātāju skaits palielinājās no 3 uz 9 dziedātājiem. Šo pieaugumu var novērtēt absolūtā vērtībā jeb palielinājās par 6 dziedātājiem vai arī novērtēt procentuālo pieaugumu jeb dziedātāju skaits palielinājās 3 reizes. Salīdzinot lielumu procentuālās vērtības, var novērtēt lielumu izmaiņu būtiskumu.

Padomā un pārrunā ar grupas biedriem doto uzdevumu: attēlā ir parādītas 2 konfekšu kārbas

ar konfektēm, kas satur riekstus  un konfektēm, kas riekstus nesatur 



Kāda daļa no visas kastes ir riekstu konfektes?



Novērtē kura konfekšu kaste ir riekstaināka?





Skolēna darba lapa izpētes posmā

1. posms - Izpēte

Apmeklē sešas mācību stacijas un izpēti tur atrodamo informāciju par dažādām situācijām.

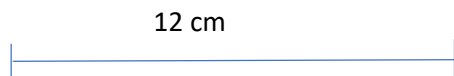
Pārrunā ar grupas biedriem un atrisiniet mācību stacijās dotos uzdevumus. Raksti risinājumu šajā lapā.

1. stacija – Apvienošana vienībās.

	Atbilde
Nosaki vienību skaitu, kas ir attēlotas šajā  attēlā	
ja  ir vienība.	
ja  ir vienība.	
ja  ir vienība.	

2. stacija – Izproti daļskaitli un tā kontekstu.

Aprēķini un uzzīmē nogriežni, kas atbilstu $\frac{3}{4}$ no attēlā redzamā nogriežņa.



Aprēķini	Zīmējums (ievēro, lai tas atbilstu $\frac{3}{4}$ no dotā zīmējuma)

3. stacija – Saskati attiecību starp lielumiem.

Salātos uz katrām 2 tomātiem jāpievieno 3 gurķi jeb tomātu un gurķu attiecība ir 2 : 3. Cik tomātu jāpievieno, ja bļodā ir sagriezti 60 gurķi? Parādi kā tu to aprēķināji?

4. stacija – Lielumi un to izmaiņas.



Kurš no dotajiem piemēriem raksturo tiešo proporcionalitāti, apgriezto proporcionali vai vispār nav proporcionali lielumi.

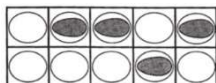
Piemēri	Viens strādnieks sētu nokrāso 3 dienās, trīs strādnieki strādājot tādā pašā ātrumā to nokrāso 1 dienā.	Veikalā 0,5 l Coca-cola pudele maksā 0,95 EUR. Tajā pašā veikalā 2 l Coca-cola pudele maksā 1,70 EUR.	Anna lasa 100 vārdus minūtē. 5 minūtēs Anna izlasīja 500 vārdus.
Proporcionalitātes veids			

5. stacija – Sadalīšana daļās.

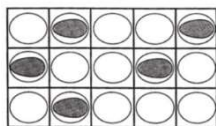
Kurš bērns dabūs vairāk picas (visas picas ir vienāda lieluma), ja 5 meitenes daļa 3 picas, bet 3 puīši 2 picas? Parādi aprēķinus.

6. stacija – Abstraktā domāšana.

Attēlā ir parādītas 2 konfekšu kārbas ar konfektēm, kas satur riekstus  un konfektēm, kas riekstus nesatur .



1. Kāda daļa no visas kastes ir riekstu konfektes?



2. Novērtē kura konfekšu kaste ir riekstaināka?

Vērtējums posma beigās. Atzīmē snieguma līmeni, kas tevi vislabāk raksturo apmeklējot mācību stacijas un pildot uzdevumus, attiecībā pret tavu prasmi spriest proporcionali situācijās ar pazīstamu kontekstu.

Sācis apgūt	Turpinu apgūt	Apguvis	Apguvis padziļināti
Aprakstītās situācijas man ir daļēji pazīstamas. Neizpratu uzdevumu risinājumus, ko apsprieda citi grupas dalībnieki.	Aprakstītās situācijas man ir daļēji pazīstamas. Risināju uzdevumus ar grupas biedru palīdzību.	Dotās situācijas man ir saprotamas un spēju pielietot dotās vai savas stratēģijas, lai patstāvīgi atrisinātu uzdevumus.	Dotās situācijas man ir saprotamas un redzu iespēju tās pielietot jaunās situācijās. Skaidroju uzdevumu atrisinājumus citiem.

Skolēna darba lapa Nr. 1 stratēģijas ieviešanas posmā

1. uzdevums. Salīdzini ar savu pārinieku atbildes uz jautājumiem mācību stacijās.
Pārrunājiet, kā katrs domājāt, lai tiktu pie šādas atbildes.

1.1. Uzrakstiet vienu piemēru, kur jums domas atšķirās un aprakstiet savu domu gaitu.

1.2. Uzrakstiet vienu piemēru, kur jums domas sakrita un aprakstiet savu domu gaitu.

2. uzdevums. Zane uz klases vakaru ir apsolījusi atnest pašgatavotu apelsīnu sulu, kuras sastāvā ir ūdens un apelsīnu sulas koncentrāts. Lai atrastu visgaršīgāko sulas recepti, Zane vispirms testē vairākas iespējas.

Recepte A 2 glāzes sulas koncentrāts 3 glāzes ūdens	Recepte B 1 glāzes sulas koncentrāts 4 glāzes ūdens
Recepte C 4 glāzes sulas koncentrāts 8 glāzes ūdens	Recepte D 3 glāzes sulas koncentrāts 5 glāzes ūdens

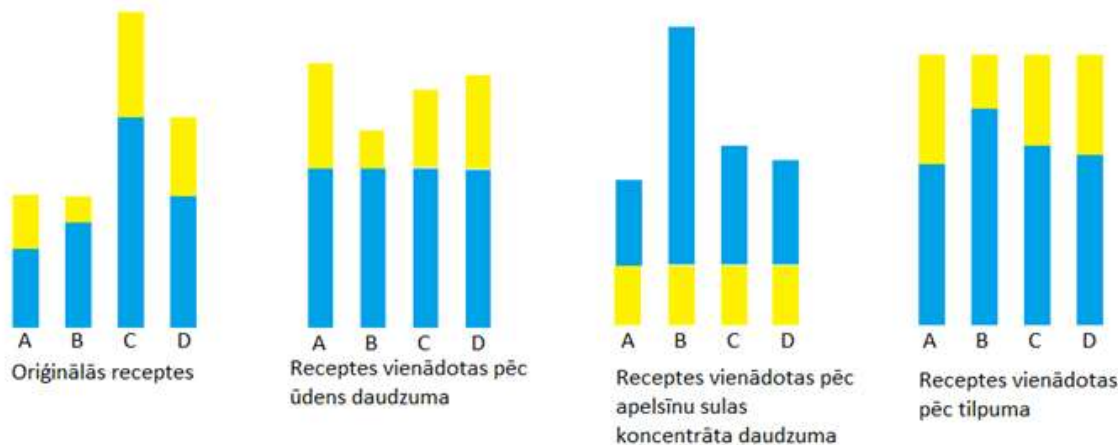
Atbildi uz jautājumiem uz atsevišķas lapas.

2.1. Kura sulas recepte satur visvairāk apelsīnu sulas koncentrātu? Paskaidro kāpēc.

2.2. Kura sulas recepte satur vismazāk apelsīnu sulas koncentrātu? Paskaidro kāpēc.

Skolēna darba lapa Nr. 2 stratēģijas ieviešanas posmā

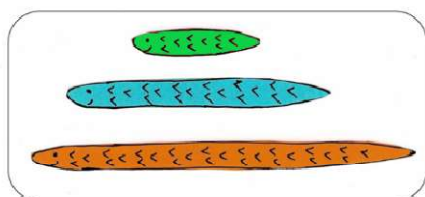
2.3. Zemāk esošajos attēlos ir attēlotas pagatavotās sulas ievērojot dotās attiecības. Izpēti un nosaki vai pēc katra no attēliem vari noteikt, kura sula satur visvairāk apelsīnu sulas koncentrātu un kura satur vismazāk apelsīnu sulas koncentrātu?



2.4. Uzraksti 3 secinājumus, ko tu novēroji aplūkojot attēlus.

- 1.
- 2.
- 3.

3. uzdevums.



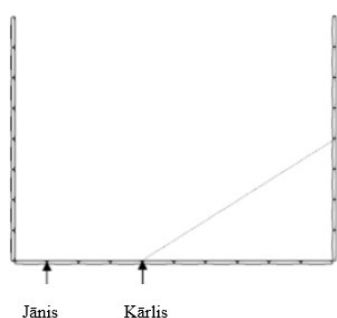
Šajā kartītē ir attēloti trīs zuši. Zilais zutis ir divreiz garāks par zaļo zuti un oranžais zutis ir trīs reizes garāks par zaļo zuti. Zuši tiek baroti ar barības granulām atbilstoši to garumam.

3.1. Ja zaļais zutis saņem 2 barības granulas, cik granulu tiktu izbarotas pārējiem diviem zušiem?

3.2. Ja zilais zutis saņems 14 barības granulas, cik granulas tiks izbarotas pārējiem diviem zušiem?

3.3. Ja oranžais zutis saņem 18 barības granulas, cik granulas tiks izbarotas pārējiem diviem zušiem kopā?

4. uzdevums.



Jānis apgalvo, ka viņš var uzvest savu virvi tieši tādā pašā slīpumā pret sienu kā Kārlis. Kārļa metiens un Jāņa pozīcija ir attēlota attēlā. Uz kuriem Jānim ir jāmērķē, lai viņam tas izdotos? Uzzīmē Jāņa virvi dotajā attēlā.

Paskaidro, kā tu to izdomāji. Kāda sakarība pastāv starp Kārļa attālumu no sienas un viņa mestās virves augstumu?

Vērtējums posma beigās. Atzīmē snieguma līmeni, kas tevi vislabāk raksturo risinot 2. posma uzdevumus, attiecībā pret tavu prasmi veidot jaunas stratēģijas situācijās, kuras raksturo proporcionāli lielumi.

Sācis apgūt	Turpinu apgūt	Apguvis	Apguvis padziļināti
Neizpratu uzdevumu risinājumus, ko apsprieda citi grupas dalībnieki. Daļēji spēju saskatīt attiecības starp lielumiem, bet nevaru tās noformulēt.	Risināju uzdevumus ar grupas biedru palīdzību. Lai saskatītu un formulētu sakarības starp lielumiem, man ir nepieciešama palīdzība.	Izpratu uzdevumu risinājumus un spēju atrisināt uzdevumus. Spēju saskatīt un formulēt attiecības starp lielumiem. Piedalījos kopīgā risināšanas stratēģiju izveidē.	Uzņēmos iniciatīvu grupā/ pāri veidojot stratēģijas kā risināt uzdevumus. Spēju pamatot kāpēc izvēlēta risināšanas stratēģija ir labāka par kādu citu.

Skolēna darba lapa pielietošanas posmā

1. uzdevums. Pabeidz apgalvojumus:

1.1. Gatavojot piena kokteili, sulas un piena attiecība ir 4 : 5. Ja glāzē ir ielietas 2 sulas devas, tad tajā ir jāielej vēl piena devas, lai sanāktu piena kokteilis.

1.2. Artūrs var apēst 21 hotdogu 63 minūtēs. Turot to pašu tempu, 35 hotdogus viņš var apēst ... minūtēs.

1.3. Visi cilvēki krāso istabu vienādā tempā. Ja 8 cilvēki var nokrāsot istabu 5 stundās, tad 2 cilvēki to var nokrāsot...

Samazinoties cilvēku skaitam, krāsošanas laiks.

2. uzdevums. Fizika mums saka, ka objektu svars uz Mēness ir proporcionāls tā paša objekta svaram uz Zemes. Ja 60 kg smags cilvēks uz Mēness sver 3 kg, tad kāds būs 80 kg smaga cilvēka svars uz Mēness?

Izsaki spriedumus, kā mainās cilvēka svars uz Mēness?

3. uzdevums. Salāti sastāv no čili pipariem, tomātiem, salātlapām. Salīdzini divas salātu receptes, kuri salāti būs mazāk asi? Kāpēc?

Recepte A	Recepte B
1 deva čili piparu	2 devas čili piparu
3 devas tomātu	5 devas tomātu
5 devas salātlapu	7 devas salātlapu

Vērtējums posma beigās. Atzīmē snieguma līmeni, kas tevi vislabāk raksturo risinot 3. posma uzdevumus, attiecībā pret tavu prasmi lietot proporcionālās spriešanas prasmes situācijās ar jaunu nezināmu kontekstu.

Sācis apgūt	Turpinu apgūt	Apguvis	Apguvis padziļināti
Varu saskatīt vienkāršas sakarības starp lielumiem, tomēr nespēju aprēķināt konkrētas vērtības.	Varu saskatīt vienkāršas sakarības starp lielumiem un aprēķināt dažas vērtības, tomēr neizprotu situāciju kontekstu, lai izteiktu konkrētus spriedumus.	Saskatu un lietoju sakarības starp lielumiem, lai noteiktu nezināmā vērtību. Spēju pamatot kā mainās lielumi atkarībā viens no otra.	Saskatu sakarības starp lielumiem un redzu vairākas risināšanas stratēģijas nezināmā noteikšanai. Izvēlos optimālāko risināšanas variantu. Spēju pamatot kā mainās lielumi atkarībā viens no otra.

Nobeiguma darbs

1. uzdevums. Atzīmē atbilstošos atbilžu variantus un pamato savas izvēlētās atbildes.

1.1. Atzīmē, kurās tabulās ir parādītas proporcionālas attiecības starp lielumiem x un y .

a)	b)	c)	d)																																
<table border="1"><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>9</td><td>6</td></tr></table>	x	y	3	2	6	4	9	6	<table border="1"><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>8</td><td>9</td></tr><tr><td>9</td><td>10</td></tr></table>	x	y	7	8	8	9	9	10	<table border="1"><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>1</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>18</td></tr><tr><td>12</td><td>72</td></tr></table>	x	y	1	6	3	18	12	72	<table border="1"><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>3.2</td><td>1.6</td></tr><tr><td>6.8</td><td>3.4</td></tr><tr><td>5.6</td><td>2.8</td></tr></table>	x	y	3.2	1.6	6.8	3.4	5.6	2.8
x	y																																		
3	2																																		
6	4																																		
9	6																																		
x	y																																		
7	8																																		
8	9																																		
9	10																																		
x	y																																		
1	6																																		
3	18																																		
12	72																																		
x	y																																		
3.2	1.6																																		
6.8	3.4																																		
5.6	2.8																																		

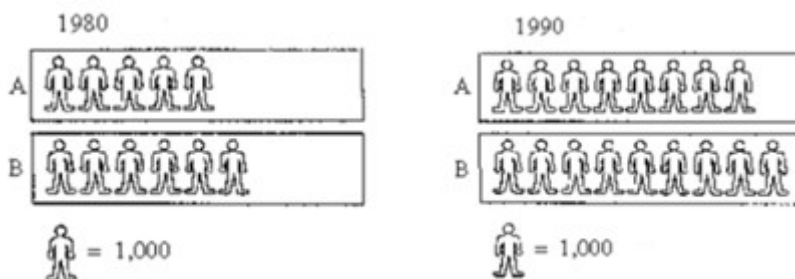
Pamatojums:

1.2. Attiecība starp x un y ir $2 : 5$. Atzīmē, kurās tabulās ir atspoguļota šī attiecība.

a)	b)	c)	d)																																
<table border="1"><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>4</td><td>7</td></tr></table>	x	y	2	5	3	6	4	7	<table border="1"><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>4</td><td>10</td></tr><tr><td>8</td><td>20</td></tr><tr><td>12</td><td>30</td></tr></table>	x	y	4	10	8	20	12	30	<table border="1"><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>6</td><td>15</td></tr><tr><td>14</td><td>35</td></tr></table>	x	y	2	5	6	15	14	35	<table border="1"><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>10</td><td>4</td></tr><tr><td>15</td><td>6</td></tr></table>	x	y	5	2	10	4	15	6
x	y																																		
2	5																																		
3	6																																		
4	7																																		
x	y																																		
4	10																																		
8	20																																		
12	30																																		
x	y																																		
2	5																																		
6	15																																		
14	35																																		
x	y																																		
5	2																																		
10	4																																		
15	6																																		

Pamatojums:

2. uzdevums. 1980. gadā iedzīvotāju skaits pilsētā A bija 5000 un pilsētā B bija 6000. Desmit gadus vēlāk 1990. gadā pilsētas A iedzīvotāju skaits bija 8000, bet pilsētas B iedzīvotāju skaits bija 9000.



2.1. Jānis apgalvo, ka no 1980. gada līdz 1990. gadam abās pilsētās iedzīvotāju skaits pieauga vienādi. Lietojot matemātiskus aprēķinus, paskaidro, kā Jāņa apgalvojums var būt pareizs.

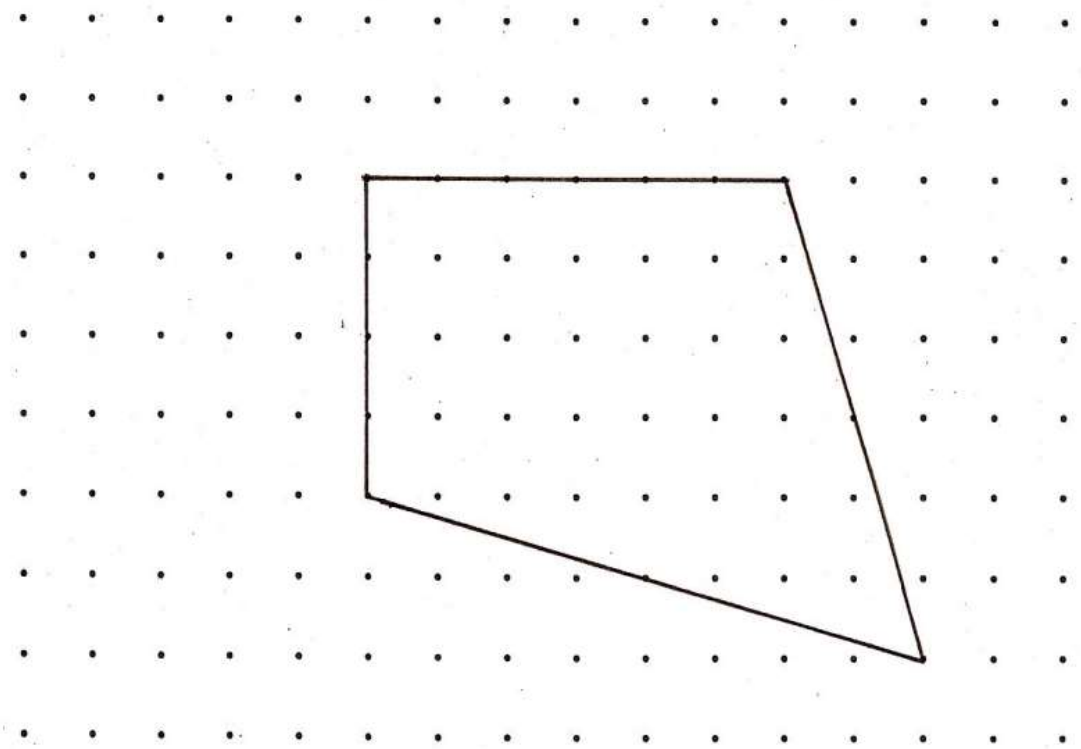
2.2. Kristīne apgalvo, ka no 1980. gada līdz 1990. gadam pilsētā A iedzīvotāju skaits pieauga vairāk. Lietojot matemātiskus aprēķinus, paskaidro, kā Kristīnes apgalvojums var būt pareizs.

3. uzdevums. Doti divi mobilo sakaru tarifu plāni. Pirmais tarifs paredz samaksu par pieslēguma izmantošanu 3 EUR un 0,10 EUR par katru sarunas minūti. Otrais tarifs neparedz samaksu par pieslēguma izmantošanu, bet tas maksā 0,15 EUR par katru sarunas minūti.

3.1. Kurš tarifa plāns ir izdevīgāks, ja mēnesī plānots norunāt 60 minūtes? Pamato ar aprēķiniem.

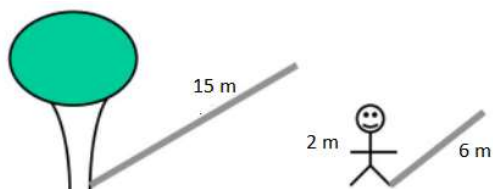
3.2. Kurš tarifa plāns ir izdevīgāks, ja mēnesī plānots norunāt 70 minūtes? Pamato ar aprēķiniem.

4. uzdevums. Uzzīmē figūru, kas ir proporcionāla dotajai figūrai.



5. uzdevums. 24 cilvēku kompānija aiziet uz kafejnīcu un pasūta 18 picas. Kompānija tiek izsēdināta pie 4 dažādiem galdiņiem tā, ka pie pirmā galdiņa sēž 12 cilvēki, pie otrā 6 cilvēki, pie trešā 4 cilvēki un pie ceturta galda sēž 2 cilvēki. Nosaki, kā būtu jāsadala picas pa galdiņiem, lai katrs cilvēks dabūtu vienādu daudzumu picas. Paskaidro, kā risināji uzdevumu.

6. uzdevums. Nākot mājās no darba Kārlis pamanīja, ka viņa 2 m garais augums veido ēnu, kas ir 6 m gara. Blakus atradās koks, kurš veidoja 15 m garu ēnu. Vai tu vari noteikt aptuveno koka augstumu? Parādi kādus aprēķinus tu veici, lai iegūtu koka augstumu.



Bakalaura darbs „Proporcionālās spriešanas attīstīšana pamatskolas matemātikas kursā”
izstrādāts LU Ķīmijas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie
informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Arta Linde
vārds, uzvārds

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītājs: Mg. paed. Aira Kumerdanka
amats, zina. grāds, vārds, uzvārds

Recenzents: Dr. math. Jānis Mencis
amats, zina. grāds, vārds, uzvārds

Darbs iesniegts Ķīmijas fakultātē

Dekāna pilnvarotā persona, sekretāre:

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē

_____ prot. Nr. _____

Komisijas sekretāre:
