LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

CENTRA VARIETĀTES AUTONOMIEM UN NEAUTONOMIEM DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMIEM

DIPLOMDARBS

Autors: **Darja Kļimakova**

Stud. apl. dk08183

Darba vadītājs: Dr. habil. math., prof. Andrejs Reinfelds

RĪGA 2013

Anotācija

Darbā ir aplūkota Lipšica gludas centra varietātes eksistence autonomam un neautonomam diferenciālvienādojumām. Tika uzrakstīts pierādījums centra varietātes eksistences teorēmai, izmantojot materiālu no *Jack Carr* grāmatas "*Applications of Centre Manifold Theory* ". Pierādījumā gaitā iegūti precizāki pietiekamie nosacījumi centra varietātes eksistencei, izmantojot atrisinājumu integrālo starpību. Aplūkoti konkrēti piemēri.

Atslēgas vārdi: centra varietāte, autonoma diferenciālvienādojuma sistēma, neautonoma diferenciālvienādojuma sistēma.

Abstract

The subject of this thesis is Lipschitz smooth center manifold for autonomous and nonautonomous differential equations. The proof of the center manifold theorem was written using an information from *Jack Carr* book named "*Applications of Centre Manifold Theory* ". We obtained more explicit sufficient conditions for the existence of center manifold using the integral difference of solutions. We considered some particular examples.

Keywords: center manifold, autonomous differential equation, nonautonomous differential equation.

Saturs

Ievads

Centra varietāte ir svarīgs objekts diferenciālvienādojumu teorijas un dinamisko sistēmu pētīšanā. Visa netriviāla sistēmas dinamika kāda īpaša punkta apkartnē tiek koncentrēta tieši uz centra varitātes, t.i., vienādojums uz centra varietātes nosaka pilna vienādojumu atrisinājuma asimptotisko uzvēdību. Sava darbā es apskatīju Lipšica gludas centra varietātes eksistenci autonomam diferenciālvienādojumam, ka arī neautonomam diferenciālvienādojumam. Par darba pamatu tika izmantota *Jack Carr* grāmata "*Applications of Centre Manifold Theory* ", papildus interneta resursi, grāmatas un lekciju konspekti.

Darbs sastāv no četrām daļām. Pirmajā daļā tika uzrakstīts ievads par centra varietātes eksistenci. Otrajā daļā tika aplūkota teorēma par centra varietātes lokālo un globālo eksistenci autonomām diferenciālvienādojumu sistēmām, ka arī tās pierādījums. Trešajā daļā tika aplūkota teorēma neautonomai diferenciālvienādojumu sistēmai un ceturtajā-dažas teorēmas un piemēri.

1. Centra varietātes eksistence autonomām diferenciālvienādojumam

Pirmie, kas saka rakstīt par centra varietāti bija *V. Pliss* un *A. Kelley*, respektīvi, 1964. un 1967. gadā. [1] [2]

1.1. Ievads centra varitātes teorijā

Apskatīsim sistēmu

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^3, \\ \dot{y} = -y + y^2, \end{cases} \tag{1.1}$$

kur a ir konstante. Tā kā vienādojumi ir sadalīti, vienādojuma (1.1) nulles atrisinājums ir asimptotiski stabils, tad un tikai tad, ja a<0. Apskatām tagad citu vienādojumu

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^3 + x^2y, \\ \dot{y} = -y + y^2 + xy - x^3. \end{cases} \tag{1.2}$$

Tā kā vienādojumi ir nesadalīti, mēs nevaram uzreiz pateikt vai (1.2) sistēmas nulles atrisinājums ir asimptotiski stabils vai nē, bet mēs varam izteikt hipotēzi, ka tas ir, ja a<0.

Definīcija 1. Līkni, $y = h(x)$ sauc par autonomas diferenciālvienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \tag{1.3}$$

invariantu varietāti, ja (1.3) sistēmas atrisinājumi $(x(t), y(t))$ caur $(x_0(t), y_0(t))$ atrodas uz līknes $y = h(x)$, $y(t) = h(x(t))$.

Sistēmai (1.1) $y = 0$ ir invariante varitāte.

Vienādojumu sistēmai (1.3) ir invarianta varietāte $y = h(x)$ maziem $|x|$ ar $h(x) = O(x^2)$, kad $x \to 0$. Sistēmas (1.2) nulles atrisinājumu asimptotiskā stabilitāte var būt pierādīta izmēklējot pirmās pakāpes vienādojumu. Šis vienādojums ir

$$\dot{u} = au^3 + u^2h(u) = au^3 + O(u^4), \tag{1.4}$$

(1.4) vienādojuma nulles atrisinājums ir asimptotiski stabils, ja a<0 un nestabils, ja a>0. Tas mums savukārt saka, ka (1.2) sistēmas nulles atrisinājums ir asimptotiski stabils, ja a<0 un nestabils, ja a>0.

Pirms centra varietātes definīcijas, no sākuma uzrakstīsim vienādojumam

$$\dot{x} = N(x) \tag{1.5}$$

invariantas varietātes definīciju, kur $x \in \mathbb{R}^n$.

Definīcija 2. Kopa $S \subset \mathbb{R}^n$ tiek nosaukta par *lokālo invariantu varietāti* vienādojumam (1.5), ja priekš $x_0 \in S$, vienādojuma (1.5) atrisinājums $x(t)$ ar $x(0) = x_0$ iekļaujas S priekš $|t| < T$, kur $T > 0$.

Ja mēs vienmēr varam izvelēties $T \to \infty$, tad S ir saukta par *invarianto varietāti.*

Uzrakstīsim sistēmu

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x,y) \\ \dot{y} = By + g(x,y), \end{cases} \tag{1.6}$$

kur $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ un A un B ir konstanšu matricas tādas, ka visām A īpašvērtībām reālas daļas ir nulle, savukārt visām B īpašvērtībām reālas daļas ir negatīvas. Funkcijas f un g ir C^2 ar $f(0,0) = 0$, $f'(0,0) = 0$, $g(0,0) = 0$, $g'(0,0) = 0$, kur f' ir f Jakobiāna matrica.

Pieņemsim, ka f un g ir vienādi ar nulli. Tad sistēma (1.6) izskātas kā

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ \dot{y} = By, \end{cases} \tag{1.7}$$

un to var pierakstīt matricu formā

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Ja mēs analizējam sistēmu $\mathbb{R}^3$ kopā ar $n = 2$ un $m = 1$, tad x_1, x_2-ass un x_3-ass parāda attiecīgi centra varietāti un stabilo varitāti. Kopumā lieneārai sistēmai (1.7) ir divas invariantas varitātes, $x = 0$, kas ir stabila varitāte un $y = 0$, kas ir centra varietāte. [3] [4]

2. Centra varietātes eksistences teorēma autonomai diferenciālvienādojumu sistēmai

2.1. Globālās centra varietātes eksistence

Apskātam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y) \\ \dot{y} = By + g(x, y), \end{cases} \tag{2.1}$$

kur $x \in \mathbb{R}^n$ un $y \in \mathbb{R}^m$, visu matricas A īpašvērtību reālas daļas ir vienādas ar nulli, un visu matricas B īpašvērtību reālas daļas ir negatīvas. Funkcijas f un g apmierina Lipšica nosacījumus.

No sākuma mēs konstruēsim sistēmu, kas sakrīt nulles apkārtnē ar sistēmu (2.1), bet ir vienkāršota ārpus šīs apkārtnes. Jaunai sistēmai mēs pierādīsim centra varietātes eksistenci, kas sistēmai (2.1) būs lokāla centra varietāte.

Ievadīsim pietiekami glūdas funkcijas $\psi_1 : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, kur $\psi_1(x) = 1$, ja $|x| \leq 1$ un $\psi_1(x) = 0$, ja $|x| \geq 2$, un $\psi_2 : \mathbb{R}^m \to [0, 1]$, kur $\psi_2(y) = 1$, ja $|y| \leq 1$ un $\psi_2(y) = 0$, ja $|y| \geq 2$. Piefiksēsim parametru $\eta > 0$ un definēsim jaunas nelinearitātes:

$$F(x, y) = f(x\psi_1(\frac{x}{\eta}), y\psi_2(\frac{y}{\eta})) \tag{2.2}$$

$$G(x, y) = g(x\psi_1(\frac{x}{\eta}), y\psi_2(\frac{y}{\eta})). \tag{2.3}$$

Apskātam autonomu diferenciālvienādojumu

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + F(x, y) \\ \dot{y} = By + G(x, y) \end{cases} \tag{2.4}$$

Funkcijas F un G sakrīt ar f un g, ja $|x| \leq \eta$ un $|y| \leq \eta$ un nav atkarīgas no x, ja $|x| \geq 2\eta$ un $|y| \geq 2\eta$, un A ir $n \times n$ un B ir $m \times m$ matricas, attēlojumi $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ un $G : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ apmierina Lipšica nosacījumus ar mazu Lipšica konstanti $\varepsilon > 0$

$$|F(x, y) - F(x', y')| \leq \varepsilon(|x - x'| + |y - y'|) \tag{2.5}$$

$$|G(x, y) - G(x', y')| \leq \varepsilon(|x - x'| + |y - y'|) \tag{2.6}$$

un $\sup_{x,y}|G(x,y)| = N < +\infty$. Precizēsim nosacījumus attiecībā pret diferenciālvienādojuma (2.4) lineāro daļu. Pieņemsim, ka matricu A un B īpašvērtībam izpildās nosacījums: $Re\lambda_i(A) = 0$ un $Re\lambda_i(B) < 0$.

Dotie nosacījumi garantē integrāļu

$$\nu = \int_{-\infty}^{0} |e^{-Bt}||e^{At}|dt = \int_{0}^{+\infty} |e^{Bt}||e^{-At}|dt \tag{2.7}$$

un

$$\mu = \int_{-\infty}^{0} |e^{-Bt}|dt = \int_{0}^{+\infty} |e^{Bt}|dt \tag{2.8}$$

konverģenci. Aplūkojam nepārtrauktu ierobežotu attēlojumu kopu

$$\mathbb{M} = \{h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \sup_x |h(x)| < +\infty\} \tag{2.9}$$

Ja normu definē ar vienādību

$$\|h\| = \sup_x |h(x)|, \tag{2.10}$$

tad $\mathbb{M}$ ir Banaha telpa. Attiecīgi $\mathbb{M}$ apakškopa

$$\mathbb{M}(k) = \{h \in \mathbb{M}||h(x) - h(x^{'})| \leq k|x - x^{'}|\} \tag{2.11}$$

ir slēgta Banaha telpas M apakškopa. Pieņemam, ka $h \in \mathbb{M}(k)$ un apskatām Košī problēmu

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + F(x, h(x)) \\ x(0, x_0, h) = x_0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Tā ir ekvivalenta integrālvienādojumam

$$x(t, x_0, h) = x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}F(x(s), h(x(s)))ds. \tag{2.13}$$

Ērtības dēļ apzīmējumu $x(t, x_0, h)$ vietā lietosim apzīmējumu $x(t)$. Lai papildinātu pierādījumu izdarīsim sekojošo. Paņemsim patvaļīgu ierobežotu funkciju h un ieliksim to (2.4) sistēmas pirmajā vienādojumā y vietā:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + F(x, h(x)) \\ x(0, x_0, h) = x_0 \end{cases} \tag{2.14}$$

Tā kā (2.14) vienādojuma laba puse apmierina Lipšica nosacījumu, tad tai eksistē visiem t Košī problēmas atrisinājums. Fiksējam sākuma nosacījumu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un apzīmēsim (2.14) vienādojuma atrisinājumu

$$x(t, x_0, h) = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-As}F(x(s, x_0, h), h(x(s, x_0, h)))ds, \tag{2.15}$$

kur $y(t) = h(x(t, x_0, h))$ ir (2.14) sistēmas otrā vienādojuma atrisinājums. Tāpēc

$$\frac{d}{dt}h(x(t, x_0, h)) = Bh(x(t, x_0, h)) + G(x(t, x_0, h), h(x(t, x_0, h))). \tag{2.16}$$

Lai atrastu centra varietāti priekš (2.4) mums vajag izvēlēties speciālu vienādojuma (2.16) atrisinājumu. Vienādojuma (2.16) atrisinājums izskatās šāda formā:

$$h(x(t, x_0, h)) = e^{Bt}h(x_0) + e^{Bt}\int_0^t e^{-Bs}G(x(s, x_0, h), h(x(s, x_0, h)))ds. \tag{2.17}$$

Centra varietātei jābūt ierobežotai, tāpēc mums vajag iekļaut vienādojumam (2.17) nosacījumu $\lim_{t\to-\infty} e^{-Bt}h(x(t, x_0, h)) = 0$. Pareizinot (2.17) ar e^{-Bt} un pārejot uz robežu, kad $t \to -\infty$ mēs dabūjam

$$0 = \lim_{t\to-\infty} e^{-Bt}h(x(t, x_0, h)) = \lim_{t\to-\infty} h(x_0) - \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^{-Bs}G(x(s, x_0, h), h(x(s, x_0, h)))ds \tag{2.18}$$

$$0 = h(x_0) - \int_{-\infty}^0 e^{-Bs}G(x(s, x_0, h), h(x(s, x_0, h)))ds \tag{2.19}$$

Tas nozīme, ka lai atrastu centra varietātes attēlojumu $h(x_0)$ mums vajag atrisināt funkcionālvienādojumu

$$h(x_0) = \int_{-\infty}^0 e^{-Bs}G(x(s, x_0, h), h(x(s, x_0, h)))ds \tag{2.20}$$

Mūsu mērķis ir iegūt precizāku novērtējumu Lipšica konstantei ε. Tādēļ atradīsim novērtējumu integrālvienādojuma (2.13) divu atrisinājumu integrālai starpībai $\int_{-\infty}^0 |e^{-Bt}||x(t) - x^{'}(t)|dt$.

Lemma 1. *Pieņemam, ka $h, h^{'} \in \mathbb{M}(k)$ un $\varepsilon\nu(k+1) < 1$. Tad ir spēkā novērtējums*

$$\int_{-\infty}^0 |e^{-Bt}||x(t) - x^{'}(t)|dt \le \nu(1 - \varepsilon\nu(k+1))^{-1}(|x_0 - x_0^{'}| \tag{2.21}$$

$$+\varepsilon\mu\|h-h^{'}\|).$$

Novērtējam starpību starp diviem integrālvienādojuma (2.13) atrisinājumiem, ja $t \leq 0$

$$|x(t)-x^{'}(t)| \leq |e^{At}||x_0-x_0^{'}|+\varepsilon\int_t^0 |e^{A(t-s)}|(|x(s)-x^{'}(s)| \tag{2.22}$$

$$+|h(x(s))-h^{'}(x^{'}(s))|)ds \leq |e^{At}||x_0-x_0^{'}|+\varepsilon(k+1)\int_t^0 |e^{A(t-s)}||x(s)-x^{'}(s)|ds$$

$$+\varepsilon\|h-h^{'}\|\int_t^0 |e^{A(t-s)}|ds.$$

Pareizinam nevienādības abas puses ar $|e^{-Bt}|$ un integrējam robežās $T \leq t \leq 0$. Iegūstam

$$\int_T^0 |e^{-Bt}||x(t)-x^{'}(t)|dt \leq \int_T^0 |e^{-Bt}||e^{At}||x_0-x_0^{'}|dt \tag{2.23}$$

$$+\varepsilon(k+1)\int_T^0 |e^{-Bt}|dt\int_t^0 |e^{A(t-s)}||x(s)-x^{'}(s)|ds$$

$$+\varepsilon\|h-h^{'}\|\int_T^0 |e^{-Bt}|dt\int_t^0 |e^{A(t-s)}|ds.$$

Maināmm integrācijas kārtību divkāršajos integrāļos. Seko

$$\int_T^0 |e^{-Bt}||x(t)-x^{'}(t)|dt \leq \nu|x_0-x_0^{'}|+\varepsilon(k+1)\int_T^0 |e^{-Bs}||x(s)-x^{'}(s)|ds\int_T^s |e^{-B(t-s)}||e^{A(t-s)}|dt \tag{2.24}$$

$$+\varepsilon\|h-h^{'}\|\int_T^0 |e^{-Bs}|ds\int_T^s |e^{-B(t-s)}||e^{A(t-s)}|dt$$

$$\leq \nu|x_0-x_0^{'}|+\varepsilon(k+1)\int_T^0 |e^{-Bs}||x(s)-x^{'}(s)|ds\int_{T-s}^0 |e^{-Bt}||e^{At}|dt$$

$$+\varepsilon\|h-h^{'}\|\int_T^0 |e^{-Bs}|ds\int_{T-s}^0 |e^{-Bt}||e^{At}|dt$$

$$\leq \nu(|x_0-x_0^{'}|+\varepsilon(k+1)\int_T^0 |e^{-Bs}||x(s)-x^{'}(s)|ds+\varepsilon\mu\|h-h^{'}\|).$$

No šejienes

$$\int_T^0 |e^{-Bt}||x(t)-x^{'}(t)|dt \leq \nu(1-\varepsilon(k+1)\nu)^{-1}(|x_0-x_0^{'}|+ \tag{2.25}$$

$$\varepsilon\mu\|h - h'\|).$$

Pārejot uz robežu, kad $T \to -\infty$ mēs iegūstām formulu (2.21). Līdz ar to Lemma (1) ir pierādīta. [5]

Teorēma 2. *Ja $4\nu\varepsilon \le 1$ un $2\varepsilon\mu < 1 + \sqrt{1 - 4\nu\varepsilon}$, tad sistēmai (2.4) eksistē globālā centra varietāte.*

Teorēmas nosacījumi izpildās, ja $\varepsilon > 0$ ir pietiekami mazs.

□ Definējam operatoru $\mathcal{T} : \mathbb{M}(k) \to \mathbb{M}$ ar vienādības palīdzību

$$(\mathcal{T}h)(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{-Bs} G(x(s), h(x(s)))ds \tag{2.26}$$

kur

$$x(t, x_0, h) = x(t) = e^{At}x_0 + \int_{0}^{t} e^{A(t-s)} F(x(s), h(x(s)))ds. \tag{2.27}$$

Vispirms pārbaudam, ka $\mathcal{T}h \in \mathbb{M}$.

$$\begin{aligned} |(\mathcal{T}h)(x)| &= |\int_{-\infty}^{0} e^{-Bs} G(x(s), h(x(s)))ds| \\ &\le |\int_{-\infty}^{0} |e^{-Bs}| \sup_{x,y} |G(x, y)ds| \\ &\le N \int_{-\infty}^{0} |e^{-Bs}|ds \le \mu N < +\infty \end{aligned} \tag{2.28}$$

Izvēlamies $h' \in \mathbb{M}(k)$. Izlietojot Lemmu (1) iegūstam novērtējumu

$$\begin{aligned} |(\mathcal{T}h)(x) - (\mathcal{T}h')(x')| &\le \varepsilon(k+1) \int_{-\infty}^{0} |e^{-Bs}||x(s) - x'(s)|ds \\ &+\varepsilon\|h - h'\| \int_{-\infty}^{0} |e^{-Bs}|ds \\ &\le \varepsilon(k+1) \int_{-\infty}^{0} |e^{-Bs}||x(s) - x'(s)|ds + \varepsilon\mu\|h - h'\| \\ &\le \varepsilon(k+1)[\nu(1 - \varepsilon(k+1)\nu)^{-1}(|x_0 - x_0'| + \varepsilon\mu\|h - h'\|)] \\ &+\varepsilon\mu\|h - h'\| \\ &\le \frac{\varepsilon(k+1)\nu}{1 - \varepsilon(k+1)\nu}|x_0 - x_0'| + \varepsilon\mu(\frac{\varepsilon(k+1)\nu}{1 - \varepsilon(k+1)\nu} + 1)\|h - h'\| \end{aligned} \tag{2.29}$$

Jānosaka k, lai

$$k = \frac{\varepsilon(k+1)\nu}{1 - \varepsilon(k+1)\nu}.$$

Tad

$$|(\mathcal{T}h)(x) - (\mathcal{T}h^{'})(x^{'})| \leq k|x_0 - x_0^{'}| + \varepsilon\mu(k+1)\|h - h^{'}\|$$

un

$$\varepsilon\mu(k+1) < 1$$

Tas nozīme, ka $\mathcal{T}h \in \mathbb{M}(k)$ un $\mathcal{T}$ ir saspiešanas operators slēgtā Banaha telpas apakškopā $\mathbb{M}(k)$.

$$(\mathcal{T}h)(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{-Bs} G(x(s, x_0, h), h(x(s, x_0, h)))ds \tag{2.30}$$

Citiem vārdiem operatoram $\mathcal{T}$ ir nekustīgs punkts, kas reizē ir centra varietātes vienādojums.

Tad apskatīsim teorēmā minētos nosacījumus:

$$k = \frac{\varepsilon(k+1)\nu}{1 - \varepsilon(k+1)\nu}$$

vai

$$k + 1 = \frac{1}{1 - \varepsilon(k+1)\nu}$$

Iegūstam kvadrātvienādojumu k aprēķināšanai.

$$\varepsilon\nu(k+1)^2 - (k+1) + 1 = 0$$
$$k + 1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu}}{2\varepsilon\nu}.$$

Jāizvēlas mazāka sakne

$$k + 1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu}}{2\varepsilon\nu} = \frac{1 - (1 - 4\varepsilon\nu)}{2\varepsilon\nu(1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu})} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu}}$$

Sakne būs reāls skaitlis, ja

$$4\varepsilon\nu \leq 1.$$

Tad $k = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu}} - 1 \leq 1$. Pārliecināmies, ka

$$\varepsilon\mu(1+k) < 1.$$

$$\varepsilon\mu(1+k) = \frac{2\varepsilon\mu}{1+\sqrt{1-4\varepsilon\nu}} < 1$$

vai

$$2\varepsilon\mu < 1 + \sqrt{1-4\varepsilon\nu}.$$

Tātad nosacījums, ka $\mathcal{T}h$ apmierina ar konstanti k, $4\varepsilon\nu \leq 1$ garantē Lipšica nosacījumu bet nosacījums $2\varepsilon\mu < 1 + \sqrt{1-4\varepsilon\nu}$ garantē, ka operators $\mathcal{T}$ ir saspiešanas operators.

2.2. Lokālās centra varietātes eksistence

Tātad apskātam sistēmu

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x,y) \\ \dot{y} = By + g(x,y), \end{cases}$$

kur $x \in \mathbb{R}^n$ un $y \in \mathbb{R}^m$, visas matricas A īpašvērtību reālas daļas ir nulle, un visas matricas B īpašvērtību reālas daļas ir negatīvas. Funkcijas f un g ar mazu Lipšica konstanti apmierina Lipšica nosacījumus. Atzīmēsim, ka f un g vispārīgā gadījumā netiek definētas visā telpā. Tādēļ

Teorēma 3. *Ja $4\nu\varepsilon \leq 1$ un $2\varepsilon\mu < 1 + \sqrt{1-4\nu\varepsilon}$, tad sistēmai* (2.1) *nulles apkārtnē ir lokālā centra varietāte $y = h(x)$, $|x| < 1$, kur h ir Lipšica nepārtraukta.*

□ Nulles punkta apkārtnē divas sistēmas (2.1) un (2.4) sakrīt. Pēc globālas varietātes teorēmas eksistē centra varietāte un tā reizē ir arī lokāla centra varietāte sistēmai (2.1). Ja diferenciālvienādojumu sistēma (2.1) ir C^k gluda, tad var pierādīt, ka centra varietāte arī ir C^k gluda. [3] [5] ■

3. Centra varietātes eksistences teorēma neautonomai diferenciālvienādojumu sistēmai

n-dimensionālu neautonomu periodisku sistēmu pieraksta kā

$$\dot{x} = F(x,t), \tag{3.1}$$

kur $F = (x, t + 2\pi) = F(x,t)$. Atrisinajuma nosacījumi izpildās $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ telpā vai $\mathbb{R}^n \times D$, kur D ir kāda $\mathbb{R}^n$ telpas daļa. Pie jebkādiem sākuma nosacījumiem (x_0, t_0) atrisinājumu var turpināt uz $[t_0, t_0 + 2\pi]$ intervāla. Sistēmu (3.1) var paplašināt līdz autonomai sistēmai, ievadot jaunu ciklisku mainīgu Θ tādu, ka $\dot{\Theta} = 1$. Bet tam ir vajadzīgs, lai abiem mainīgajiem x un Θ bija vienāds status, t.i., funkcija $F(x, \Theta)$ jābūt $\mathbb{C}^r$-gludai ($r \geq 1$) attiecībā pret visiem saviem argumentiem. Neautonomu sistēmu īpatnība ir tas, ka funkcija F ir nepārtraukta tikai pēc t. [6]

Lai gan neautonomu sistēmu var pārveidot par autonomu sistēmu telpā $\mathbb{R}^{n+1}$, tomēr bieži ērtāk ir nepārveidot to par autonomu diferenciālvienādojumu.

Tad apskatām neautonomu vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + F(t,x,y) \\ \dot{y} = B(t)y + G(t,x,y) \end{cases} \tag{3.2}$$

kur A ir $n \times n$ un B ir $m \times m$ matricas un matricu koeficienti ir nepārtrauktas $t \in \mathbb{R}$ funkcijas, attēlojumi $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ un $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ apmierina Lipšica nosacījumus ar mazu Lipšica konstanti $\varepsilon > 0$

$$|F(t,x,y) - F(t,x',y')| \leq \varepsilon(|x - x'| + |y - y'|) \tag{3.3}$$

$$|G(t,x,y) - G(t,x',y')| \leq \varepsilon(|x - x'| + |y - y'|) \tag{3.4}$$

un $\sup_{t,x,y} |G(t,x,y)| = N < +\infty$. Precizēsim nosacījumus attiecībā pret diferenciālvienādojuma (3.2) lineāro daļu.

Apzīmēsim neautonoma diferenciālvienādojuma

$$\dot{x} = A(t)x \tag{3.5}$$

fundamentalo atrisinājuma matricu ar $U(t, t_0)$, kur $U(t_0, t_0) = E$ un E- vienības matrica. Attiecīgi neautonoma diferenciālvienādojuma

$$\dot{y} = B(t)y$$

fundamentalo atrisinājuma matricu apzīmēsim ar $V(t, t_0)$, kur $V(t_0, t_0) = E$.

Pieņem, ka integrāļi

$$\nu = \sup_{t_0} \int_{-\infty}^{t_0} |V(t, t_0)||U(t, t_0)|dt \tag{3.6}$$

un

$$\mu = \sup_{t_0} \int_{-\infty}^{t_0} |V(t, t_0)|dt \tag{3.7}$$

konverģē. Tie ir nosacījumu (2.7) un (2.8) vispārinājumi neautonomai lineārai diferenciālvienādojuma sistēmai. Aplūkojam nepārtrauktu ierobežotu attēlojumu kopu

$$\mathbb{M} = \{h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \sup_{t,x} |h(t, x)| < +\infty\} \tag{3.8}$$

Ja normu definē ar vienādību

$$\|h\| = \sup_{t,x} |h(t, x)|, \tag{3.9}$$

tad $\mathbb{M}$ ir Banaha telpa. Attiecīgi $\mathbb{M}$ apakškopa

$$\mathbb{M}(k) = \{h \in \mathbb{M}||h(t, x) - h(t, x^{'})| \leq k|x - x^{'}|\} \tag{3.10}$$

ir slēgta Banaha telpas M apakškopa. Pieņemam, ka $h \in \mathbb{M}(k)$ un apskātam Košī problēmu

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + F(t, x, h(t, x)) \\ x(t, t_0, x_0, h) = x_0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Tā ir ekvivalenta integrālvienādojumam

$$x(t, t_0, x_0, h) = x(t) = U(t, t_0)x_0 + \int_0^t U(t, s)F(t, x(s), h(x(s)))ds. \tag{3.12}$$

Atradīsim novērtējumu integrālvienādojuma (3.12) divu atrisinājumu integrālai starpībai $\int_{-\infty}^{t_0} |V(t, t_0)||x(t) - x^{'}(t)|dt$.

Lemma 4. *Pieņemam, ka $h, h^{'} \in \mathbb{M}(k)$ un $\varepsilon\nu(k+1) < 1$. Tad ir spēkā novērtējums*

$$\int_{-\infty}^{t_0} |V(t_0, t||x(t) - x^{'}(t)|dt \leq \nu(1 - \varepsilon\nu(k+1))^{-1}(|x_0 - x_0^{'}| \qquad (3.13)$$
$$+\varepsilon\mu\|h - h^{'}\|).$$

Novērtējam starpību starp diviem integrālvienādojuma (3.12) atrisinājumiem, ja $t \leq t_0$

$$|x(t) - x^{'}(t)| \qquad (3.14)$$
$$\leq |U(t, t_0)||x_0 - x_0^{'}| + \varepsilon \int_t^{t_0} |U(t, s)|(|x(s) - x^{'}(s)|$$
$$+|h(x(s)) - h^{'}(x^{'}(s))|)ds$$
$$\leq |U(t, t_0)||x_0 - x_0^{'}| + \varepsilon(k+1) \int_t^{t_0} |U(t, s)||x(s) - x^{'}(s)|ds$$
$$+\varepsilon\|h - h^{'}\| \int_t^{t_0} |U(t, s)|ds$$

Pareizinam nevienādības abas puses ar $|V(t_0, t)|$ un integrējam robežās $T \leq t \leq t_0$. Iegūstam

$$\int_T^{t_0} |V(t_0, t)||x(t) - x^{'}(t)|dt \leq \int_T^{t_0} |V(t_0, t)||U(t, t_0)||x_0 - x_0^{'}|dt \qquad (3.15)$$
$$+\varepsilon(k+1) \int_T^{t_0} |V(t_0, t)|dt \int_t^{t_0} |U(t, s)||x(s) - x^{'}(s)|ds$$
$$+\varepsilon\|h - h^{'}\| \int_T^{t_0} |V(t_0, t)|dt \int_t^{t_0} |U(t, s)|ds$$

Maināmm integrācijas kārtību divkāršajos integrāļos. Seko

$$\int_T^{t_0} |V(t_0, t)||x(t) - x^{'}(t)|dt \leq \nu|x_0 - x_0^{'}| + \varepsilon(k+1) \int_T^{t_0} |V(t_0, s)||x(s) - x^{'}(s)|ds \int_T^{s} |V(t, s)||U(t, s)|dt \qquad (3.16)$$
$$+\varepsilon\|h - h^{'}\| \int_T^{t_0} |V(t_0, s)|ds \int_T^{s} |V(t, s)||U(t, s)|dt$$
$$\leq \nu|x_0 - x_0^{'}| + \varepsilon(k+1) \int_T^{t_0} |V(t_0, s)||x(s) - x^{'}(s)|ds \int_{T-s}^{t_0} |V(t_0, t)||U(t, t_0)|dt$$
$$+\varepsilon\|h - h^{'}\| \int_T^{t_0} |V(t_0, s)|ds \int_{T-s}^{t_0} |V(t_0, t)||U(t, t_0)|dt$$

$$\leq \nu(|x_0 - x_0^{'}| + \varepsilon(k+1)\int_T^{t_0} |V(t_0,s)||x(s) - x^{'}(s)|ds + \varepsilon\mu\|h - h^{'}\|).$$

No šejienes

$$\int_T^{t_0} |V(t_0,t)||x(t) - x^{'}(t)|dt \leq \nu(1 - \varepsilon(k+1)\nu)^{-1}(|x_0 - x_0^{'}| + \varepsilon\mu\|h - h^{'}\|). \tag{3.17}$$

Ja $T \to -\infty$, tad iegūstam formulu (3.13) un līdz ar to lemma (4) ir pierādīta.

Teorēma 5. *Ja* $4\nu\varepsilon \leq 1$ *un* $2\varepsilon\mu < 1 + \sqrt{1 - 4\nu\varepsilon}$, *tad sistēmai* (3.2) *eksistē globāla centra varietāte.*

□ Definējam operatoru $\mathcal{T} : \mathbb{M}(k) \to \mathbb{M}$ ar vienādības palīdzību

$$(\mathcal{T}h)(x) = \int_{-\infty}^{t_0} V(t_0,s)G(x(s), h(s,x(s)))ds \tag{3.18}$$

kur

$$x(t,t_0,x_0,h) = x(t) = U(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} U(t,s)F(x(s), h(s,x(s)))ds. \tag{3.19}$$

robežās $T \leq t \leq t_0$.

Vispirms pārbaudam, ka $\mathcal{T}h \in \mathbb{M}$.

$$\begin{aligned} |(\mathcal{T}h)(x)| &= |\int_{-\infty}^{t_0} V(t_0,s)G(s,x(s),h(s,x(s)))ds| \qquad (3.20)\\ &\leq |\int_{-\infty}^{t_0} |V(t_0,s)| \sup_{s,x,y} |G(s,x,y)ds| \\ &\leq N\int_{-\infty}^{t_0} |V(t_0,s)|ds \leq \mu N < +\infty \end{aligned}$$

Izvēlamies $h^{'} \in \mathbb{M}(k)$. Izlietojot Lemmu (4) iegūstam novērtējumu

$$\begin{aligned} |(\mathcal{T}h)(x) - (\mathcal{T}h^{'})(x^{'})| &\leq \varepsilon(k+1)\int_{-\infty}^{t_0} |V(t_0,s)||x(s) - x^{'}(s)|ds \qquad (3.21)\\ &+\varepsilon\|h - h^{'}\|\int_{-\infty}^{t_0} |V(t_0,s)|ds \\ &\leq \varepsilon(k+1)\int_{-\infty}^{t_0} |V(t_0,s)||x(s) - x^{'}(s)|ds + \varepsilon\mu\|h - h^{'}\| \\ &\leq \varepsilon(k+1)[\nu(1 - \varepsilon(k+1)\nu)^{-1}(|x_0 - x_0^{'}| + \varepsilon\mu\|h - h^{'}\|)] \\ &+\varepsilon\mu\|h - h^{'}\| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon(k+1)\nu}{1-\varepsilon(k+1)\nu}|x_0 - x_0^{'}| + \varepsilon\mu(\frac{\varepsilon(k+1)\nu}{1-\varepsilon(k+1)\nu} + 1)\|h - h^{'}\|$$

Tas nozīme, ka $\mathcal{T}h \in \mathbb{M}$. Tātad $\mathcal{T}h \in \mathbb{M}(k)$ un $\mathcal{T}$ ir saspiešanas operators kopā $\mathbb{M}(k)$.

$$(\mathcal{T}h)(x) = \int_{-\infty}^{t_0} V(t_0, s)G(s, x(s, x_0, h), h(s, x(s, x_0, h)))ds \tag{3.22}$$

Analoģiski kā iepriekšējā paragrāfā varam aprakstīt lokālo gadījumu.

4. Dažas teorēmas un piemēri

Teorēma 6. *Vienādojumu sistēmai* (1.6) *eksistē centra varietāte* $y = h(x)$, $|x| < \delta$, *kur* h *ir* C^2.

Plūsma uz centra varietātes tiek kontrolēta ar

$$\dot{u} = Au + f(u, h(u)) \tag{4.1}$$

n-dimensionālo sistēmu, kura vispārina (1.7) sistēmas pirmā vienādojuma problēmu priekš lineāriem gadījumiem. Sekojoša teorēma paradīs, ka (4.1) sistēma satur visu nepieciešamo informāciju, kas ir vajadzīga, lai noteikt asimptotisko uzvēdību priekš maziem sistemas (1.6) atrisinājumiem.

Teorēma 7. *(a) Pieņemsim, ka sistēmas* (4.1) *nulles atrisinājums ir stabils (asimptotiski stabils) (nestabils), tad* (1.6) *sistēmas nulles atrisinājums ir stabils (asimptotiski stabils) (nestabils).*
(b) Pieņemsim, ka sistēmas (4.1) *nulles atrisinājums ir stabils. Lai* $(x(t), y(t))$ *ir sistēmas* (1.6) *atrisinājums ar* $(x(0), y(0))$ *pietiekami maziem. Tad eksistē sistēmas* (4.1) *atrisinājums* $u(t)$, *ja* $t \to \infty$,

$$\begin{cases} x(t) = u(t) + O(e^{-\gamma t}) \\ y(t) = h(u(t)) + O(e^{-\gamma t}) \end{cases} \tag{4.2}$$

kur $\gamma > 0$ *ir konstante.*

Ja mēs ieliksim $y(t) = h(x(t))$ sistēmas (1.6) otrajā vienadojumā, mēs dabūsim

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x}[Ax + f(x, h(x))] = Bh(x) + g(x, h(x)). \tag{4.3}$$

Vienādojums (4.3) kopā ar $h(0) = 0$ nosācījumu ir sistēma, kura jāatrisina priekš centra varietātes. Vispārīgi tas ir ļoti sarežģīts uzdevums, tā kā tas ir tas pats kā rēķināt sistēmu (1.6). Nākamais rezultāts rada, ka centra varietāte var būt pietuvināta līdz jebkurai precizitātes pakāpei.

Funkcijai $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kura ir sākuma funkcijas robežās definē

$$(M\phi)(x) = \phi^{'}(x)[Ax + f(x, \phi(x))] - B\phi(x) - g(x, \phi(x)). \tag{4.4}$$

Vienādojumā (4.3) $(Mh)(x) = 0$.

Teorēma 8. *Lai ϕ ir C^1 un attēlota sākuma funkcijas robežās no $\mathbb{R}^n$ uz $\mathbb{R}^m$ ar $\phi(0) = 0$ un $\phi'(0) = 0$. Pieņemsim, ka, ja $x \to 0$, tad $(M\phi)(x) = O(|x|^q)$, kur $q > 1$. Tad, ja $x \to 0$, $|h(x) - \phi(x)| = O(|x|^q)$.*

Piemērs 1. Apskatīsim sistēmu

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + ax^3 + by^2x \\ \dot{y} = -y + cx^2 + dx^2y \end{cases} \tag{4.5}$$

Pēc teorēmas (6) vienādojumam (4.5) ir centra varietāte $y = h(x)$. Lai aproksimēt h mēs uzrakstām

$$(M\phi)(x) = \phi'(x)[x\phi(x) + ax^3 + bx\phi^2(x)] + \phi(x) - cx^2 - dx^2\phi(x).$$

Ja $\phi(x) = O(x^2)$, tad $(M\phi)(x) = \phi(x) - cx^2 + O(x^4)$. No tas seko, ka, ja $\phi(x) = cx^2$, $(M\phi)(x) = O(x^4)$, tad pēc Teorēmas (8) $h(x) = cx^2 + O(x^4)$. Pēc teorēmas (7) vienādojums, kas parāda vienādojuma (4.5) nulles atrisinājuma stabilitāti ir

$$\dot{u} = uh(u) + au^3 + buh^2(u) = (a + c)u^3 + O(u^5).$$

Tad vienādojuma (4.5) nulles atrisinājums ir asimptotiski stabils, ja $a + c < 0$ un nestabils, ja $a + c > 0$. Ja $a + c = 0$, tad mums vajag dabūt labāku h tuvinājumu.

Pieņemsim, ka $a + c = 0$. Lai $\phi(x) = cx^2 + \psi(x)$, kur $\psi(x) = O(x^4)$. Tad $(M\phi)(x) = \psi(x) - cdx^4 + O(x^6)$. Ja $\phi(x) = cx^2 + cdx^4$, tad $(M\phi)(x) = O(x^6)$, un pēc Teorēmas (8) $h(x) = cx^2 + cdx^4 + O(x^6)$. Vienādojums, kas uzdod vienādojuma (4.5) nulles atrisinājuma stabilitāti ir

$$\dot{u} = uh(u) + au^3 + buh^2(u) = (cd + bc^2)u^5 + O(u^7).$$

Tad, ja $a + c = 0$, vienādojuma (4.5) nulles atrisinājums ir asimptotiski stabils, ja $cd + bc^2 < 0$ un nestabils, ja $cd + bc^2 > 0$. Ja $cd + bc^2 = 0$, tad mums vajag dabūt labāku h tuvinājumu.

Piemērs 2. Apskatīsim sistēmu

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon x - x^3 + xy \\ \dot{y} = -y + y^2 - x^2 \end{cases} \tag{4.6}$$

kur ε ir reāls parametrs. Ideja ir atrast vienādojuma (4.6) mazus atrisinājumus priekš maziem $|\varepsilon|$.

Lineārai problēmai, kas atbilst vienādojumam (4.6), īpašvērtības ir -1 un ε. Mēs varam uzrakstīt vienādojumu (4.6) kā

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon x - x^3 + xy \\ \dot{y} = -y + y^2 - x^2 \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Kad mēs pieņēmam vienādojumu uz $\mathbb{R}^3$, tad loceklis εx sistēmā (4.7) kļūst nelineārs. Lineārai problēmai, kas atbilst sistēmai (4.7) , īpašvērtības ir $-1, 0, 0$. Sistēmai (4.7) ir divdimensionālā centra varietāte $y = h(x, \varepsilon)$, $|x| < \delta_1$, $|\varepsilon| < \delta_2$. Lai atrast aproksimāciju uz h uzrakstām

$$(M\phi)(x, \varepsilon) = \phi_x(x, \varepsilon)[\varepsilon x - x^3 + x\phi(x, \varepsilon)] + \phi(x, \varepsilon) + x^2 - \phi^2(x, \varepsilon). \tag{4.8}$$

Tad, ja $\phi(x, \varepsilon) = -x^2$, $(M\phi)(x, \varepsilon) = O(C(x, \varepsilon))$, kur C ir homogēna un kubiskā. Pēc teorēmas (8) $h(x, \varepsilon) = -x^2 + O(C(x, \varepsilon))$. Piezīmēsim, ka $h(0, \varepsilon) = 0$. Pēc teorēmas (7) vienādojums, kas nosaka vienādojuma (4.7) mazus atrisinājumus ir

$$\begin{cases} \dot{u} = \varepsilon u - 2u^3 + O(|u|C(u, \varepsilon)) \\ \dot{\varepsilon} = 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Vienādojuma (4.9) nulles atrisinājums $(u, \varepsilon) = (0, 0)$ ir stabils, tāpēc pēc teorēmas (7) priekš $-\delta_2 < \varepsilon < 0$ sistēmas (4.9) pirmā vienādojuma atrisinājums $u = 0$ ir asimptotiski stabils un tad sistēmas (4.6) nulles atrisinajums ir asimptotiski stabils. Priekš $0 < \varepsilon < \delta_2$ (4.9) sistēmas pirmā vienādojuma atrisinājumi sastāv no divām orbītām , kas sāvieno sākumpunktu ar diviem maziem fiksētiem punktiem. No tas seko, ka ja $0 < \varepsilon < \delta_2$, sākuma punkta stabila varietāte priekš sistēmas (4.6) uztaisa "plaisu" un nestabila varitāte, kas sastāv no divam stabilam orbītēm, savieno sākuma punktu ar fiksētiem punktiem.

[3]

Piemērs 3. Apskatīsim sistēmu

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + 2\lambda y + x^2 + y^2 \\ \dot{y} = -y + \lambda x + x^2 + xy. \end{cases} \tag{4.10}$$

Pēc centra varietātes teorēmas, invariantai varietātei jābūt sekojošā formā

$$y = \phi(x, y) = a(\lambda)x + b(\lambda)x^2 + c(\lambda)x^3 + O(|x^4|). \tag{4.11}$$

Lai izskaitļot $a(\lambda)$ un $b(\lambda)$ koeficientus mēs diferencējam vienādojumu (4.11). Iegūstam

$$\dot{y} = a(\lambda)\dot{x} + 2b(\lambda)x\dot{x} + 3c(\lambda)x^2\dot{x} + O(|x^3|)\dot{x}. \tag{4.12}$$

Tagad no sistēmas (4.10) mēs ieliekam $\dot{x}$ un $\dot{y}$ vienādojumā (4.11). Pēc pārveidojumiem iegūstam

$$-y + \lambda x + x^2 + xy = (a(\lambda) + 2b(\lambda)x + 3c(\lambda)x^2 + O(|x^3|))(\lambda x + 2\lambda y + x^2 + y^2). \tag{4.13}$$

Tad mēs izmantojam vienādojumu (4.11) lai izteikt y un pēc tam salīdzinām nosacījumus pie x, x^2 un x^3. Pie x mums sanāk

$$-a(\lambda) + \lambda = a(\lambda)\lambda + 2\lambda a(\lambda)^2. \tag{4.14}$$

Maziem λ šīm vienādojumam ir viens vienīgs atrisinājums:

$$a(\lambda) = \lambda + 0(\lambda^2).$$

Atzīmēsim, ka otrs kvadrātvienādojuma atrisinājums priekš $a(\lambda)$ kļūst par bezgalību, kad $\lambda \to \infty$ un tāpēc nav pieļaujams. Pie x^2 mums sanāk

$$-b(\lambda) + 1 + a(\lambda) = 2b(\lambda)\lambda + 6\lambda a(\lambda)b(\lambda) + a(\lambda) + a(\lambda)^3. \tag{4.15}$$

Tas ļauj mums atrisināt $b(\lambda) : b(\lambda) = 1 + 0(\lambda)$. Pie x^3 mums sanāk

$$-c(\lambda) + b(\lambda) = 8\lambda a(\lambda)c(\lambda) + 4a(\lambda)^2 b(\lambda) + 4\lambda b(\lambda)^2 + 2b(\lambda) + 3c(\lambda)\lambda. \tag{4.16}$$

Tas parāda mums $c(\lambda)$. Mēs varam turpināt procedūru un atrast centra varietātes Teilora aproksimāciju līdz pat jebkurai pakāpei mēs gribam. Beidzot varam ievietot vienādojumu (4.11) atpakaļ sistēmā (4.10) un iegūstām

$$\dot{x} = (\lambda + 2\lambda a(\lambda))x + (2\lambda b(\lambda) + 1 + a(\lambda)^2)x^2 + (2\lambda c(\lambda) + 2a(\lambda)b(\lambda))x^3 + O(x^4). \tag{4.17}$$

Tas ir vienādojums, kas uzdod atrisinājuma evolūciju uz centra varietātes. Mēs varam atrast stacionārus atrisinājumus pielīdzinot labo vienādojuma daļu nullei. Pēc dalīšanas ar x mēs iegūstām

$$0 = f(x, \lambda) := \lambda + 2\lambda a(\lambda) + (2\lambda b(\lambda) + 1 + a(\lambda)^2)x + (2\lambda c(\lambda) + 2a(\lambda)b(\lambda))x^2 + O(x^3).$$

Piezīmēsim, ka

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$$

un

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) = 1$$

Viņi abi nav nulle, tas nozīmē, ka saskaņā ar netiešo funkciju teorēmu mēs varam atrisināt atsevišķi katram mainīgam $(0,0)$ apkārtnē: $x = g(\lambda) = -\lambda + 0(\lambda^2)$ vai $\lambda = h(x) = -x + 0(x^2)$.

[7]

Piemērs 4. Apskatīsim sistēmu

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = 0 \\ \dot{y} = -y + g(x_1, x_2), \end{cases} \tag{4.18}$$

kur g ir gluda un $g(0,0)$, $g^{'}(0,0) = 0$

Paņemsim $G(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2)g(x_1, x_2)$, kur $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ir C^∞ funkcija, ar nosacījumu, ka $\psi(x_1, x_2) = 1$ pietiekami maziem (x_1, x_2). Pierakstīsim tagad izmainītu sistēmu

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = 0 \\ \dot{y} = -y + G(x_1, x_2), \end{cases} \tag{4.19}$$

un tai eksistē centra varietāte $y = h(x_1, x_2)$ ar $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Pietiekami maziem (x_1, x_2) $G(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$, tad $y = h(x_1, x_2)$ ar $x_1^2 + x_2^2 < \delta$ dažiem δ ir arī lokālā centra varietāte sistēmai (4.18). Pirmiem diviem sistēmas (4.19) vienādojumiem atrisinājumi ir $x_1(t) = z_1 + z_2 t$ un $x_2(t) = z_2$, kur $x_i(0) = z_i, i = 1, 2$. Sistēmas (4.19) treša vienādojuma atrisinājums ir uzdots kā $y(t) = h(x_1(t), x_2(t))$. Tāpēc

$$\frac{d}{dt}h(z_1 + z_2 t, z_2) = -h(z_1 + z_2 t, z_2) + G(z_1 + z_2 t, z_2) \tag{4.20}$$

Lai atrast centra varietāti sistēmai (4.19) mēs izvēlējamies speciālo sistēmas (4.20) atrisinājumu, kam ir sekojošs izskats

$$h(z_1 + z_2 t, z_2) = e^{-t}h(z_1, z_2) + \int_0^t e^{s-t}G(z_1 + z_2 t, z_2)ds \tag{4.21}$$

Tā kā centra varietātei vajag pieskarties $z_1 z_2$ asij sākumpunktā un komponente e^{-t} iet gar stabilo varitāti perpendikulāri $z_1 z_2$ asij, ja $t \to \infty$, mums vajag viņu izņemt. Tad vienādojumam (4.21) mēs uzliksim nosacījumu

$$\lim_{t\to-\infty} h(z_1+z_2t, z_2)e^t = 0$$

Tad reizinot vienādojumu (4.21) ar e^t un rēķinot ierobežojumu, ja $t \to -\infty$, mums sanāk

$$\lim_{t\to-\infty} h(z_1+z_2t, z_2)e^t = \lim_{t\to-\infty} h(z_1, z_2) - \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 e^s G(z_1+z_2s, z_2)ds,$$

$$0 = h(z_1, z_2) - \int_{-\infty}^0 e^s G(z_1+z_2s, z_2)ds.$$

Tad

$$h(z_1, z_2) = \int_{-\infty}^0 e^s G(z_1+z_2s, z_2)ds. \tag{4.22}$$

Lai h, kuru definē vienādojums (4.22), būtu centra varietāte vienādojumam (4.21) mums vajag paradīt, ka tas ir invarianta varietāte. Ieliekam z_1 vietā z_1+z_2t vienādojumā (4.22) dabūjam

$$h(z_1+z_2t, z_2) = \int_{-\infty}^0 e^s G(z_1+z_2(s+t), z_2)ds. \tag{4.23}$$

Tagad vajag paradīt, ka vienādojums (4.23) apmierina vienādojumu (4.19). Mums vajag izskaitļot atvasinājumus pēc t. Lai $\xi_1 = z_1+z_2(s+t)$ un $\xi_2 = z_2$, tad

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(z_1+z_2t, z_2) &= \int_{-\infty}^0 [G_1z_2 + G_20]ds \qquad (4.24)\\
&= \int_{-\infty}^0 [G_1z_2]ds\\
&= \int_{-\infty}^0 e^s \left[\frac{\partial G}{\partial s}\right] \left(jo\ \frac{\partial G}{\partial s} = \frac{\partial G}{\partial \xi_1}z_2\right)\\
&[e^sG(z_1+z_2(s+t), z_2)]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^sG(z_1+z_2(s+t), z_2)ds\\
&G(z_1+z_2t, z_2) - \int_{-\infty}^0 e^sG(z_1+z_2(s+t), z_2)ds,
\end{aligned}$$

kur G_1 apzīme parciālo atvasinājumu no G pēc ξ_1 un G_2 parciālo atvasinājumu no G pēc ξ_2. Tad izmantojot (4.23) dabūjam

$$\dot{h}(z_1+z_2t, z_2) = -h(z_1+z_2t, z_2) + G(z_1+z_2t, z_2). \tag{4.25}$$

Mēs paradījam, ka vienādojuma (4.19) atrisinājums caur $(z_1, z_2, h(z_1, z_2))$ atrodas uz $y(t) = h(z_1 + z_2 t, z_2)$. Tas nozīme, ka $y = h(z_1, z_2)$ ir invarianta varietāte vienādojumam (4.19). Tā kā G ir C^∞, $G(0,0) = 0$ un $G'(0,0) = 0$, tad seko, ka h ir C^∞, $h(0,0) = 0$ un $h'(0,0) = 0$. Tāpēc h ir centra varietāte vienādojumam (4.19).

Kā piemēru mēs paņēmam $G(z_1, z_2) = z_1 z_2$. Tad $G(z_1 + z_2 t, z_2) = z_2(z_1 + z_2 t)$. Dabūjam

$$h(z_1, z_2) = z_2 \int_{-\infty}^{0} e^s (z_1 + z_2 s) ds = z_1 z_2 - z_2^2. \tag{4.26}$$

Ievietojot z_1 vietā $z_1 + z_2 t$ vienādojumā (4.26) dabūjam

$$h(z_1 + z_2 t, z_2) = z_2(z_1 + z_2 t) - z_2^2 = z_1 z_2 + z_2^2 t - z_2^2, \tag{4.27}$$

tad

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt} h(z_1 + z_2 t, z_2) = z_2^2 = -z_1 z_2 - z_2^2 t + z_2^2 + z_1 z_2 + z_2^2 t \\ -h(z_1 + z_2 t, z_2) + G(z_1 + z_2 t, z_2).\end{gathered} \tag{4.28}$$

[4]

Secinājumi

Darbā es aplūkoju centra varietātes eksistenci autonomām un neautonomām diferenciālvienādojumām, tas galvenās definīcijas un teorēmas, ka arī pieradījumus. Daļa no pieradījumiem tika ņemta no *Jack Carr* grāmatas "*Applications of Centre Manifold Theory* ", ka arī citu konspektu un interneta resursiem. Centra varietātes eksistences teorēmas pieradījums tika izmainīts un precizēts. *Jack Carr* grāmatā ir aplūkots tikai autonomas diferenciālvienādojumu sistēmas gadījums bet diplomdarbā tas tika pielietots arī neautonomām gadījumām.

Centra varietāte ir svārīga diferenciālvienādojumu teorijas pētīšanā, jo mēs varam noteikt nelineāro sistēmu atrisinājumu asimptotisko uzvēdību, ja mēs zinam vienādojumu, kas noteic centra varietātes mazo atrisinājumu uzvēdību.

Izmantotā literatūra un avoti

[1] V.Pliss. A reduction principle in the theory of stability of motions. *Izv.Akad.Nauk SSSR Math.*, 1964.

[2] A.Kelley. Stability of the center-stable manifold. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1967.

[3] Jack Carr. *Applications of Centre Manifold Theory*. Springer-Verlag, 1981.

[4] Eddy Kimba Phongi. *Centre manifold theory with an application in population modelling*. 2009.

[5] Andrejs Reinfelds. *Dinamiskās sistēmas*.

[6] Dmitry Turaev Leonid Shilnikov, Andrey Shilnikov. *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics*. 2003.

[7] http://www.math.vt.edu/people/renardym/class home/nova/bifs/node18.html.

Diplomdarbs “Centra varietātes autonomiem un neautonomiem diferenciālvienādojumiem” izstrādāts LU Fizikas un Matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Darja Kļimakova

________________ ______________

(paraksts) (datums)

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai.

Vadītājs: Dr. habil. math., prof. Andrejs Reinfelds

________________ ______________

(paraksts) (datums)

Recenzents: As. prof. Jānis Cepītis

________________ ______________

(paraksts) (datums)

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā ______________

(datums)

____

(darbu pieņēma)

Darbs aizstāvēts valsts pārbaudījuma komisijas sēdē

______________ prot. Nr. ________, vērtējums________

(datums)

Komisijas sekretārs/-e: ______________ ______________

(Vārds, Uzvārds) (paraksts)