



LATVIJAS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI

ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

599

MATEMĀTIKA
DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

MATEMĀTIKA
DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI

Zinātniskie raksti

599.sējums

Rīga 1995

ЛАТВИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Научные труды

Том 599

Рига 1995

MATEMĀTIKA. DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI.

Matemātika. Diferenciālvienādojumi: Zinātniskie raksti/ Atb. red. J.Klokovs.- 599.sējums.- Rīga: LU, 1995.- 147 lpp.

Rakstu krājums satur zinātniskos rakstus, kuri veltīti parasto diferenciālvienādojumu teorijai. Pētīti jautājumi par diferenciālvienādojumu atrisinājumu eksistenci, atrisinājumu kopas struktūru un atrisinājumu īpašībām. Daži raksti veltīti konkrēto praktisko problēmu pētījumu metožu (tai skaitā skaitlisko) izstrādei.

Rakstu krājums paredzēts zinātniekiem, pasniedzējiem un studentiem, kuri nodarbojas ar parasto diferenciālvienādojumu un to atrisinājumu pētīšanu.

MATHEMATICS. DIFFERENTIAL EQUATIONS.

The collection contains articles on the theory of ordinary differential equations. The problem of existence of solutions as well as their properties and the structure of the set of solutions are investigated. Several articles are devoted to developing of methods of investigation, also numerical, of applied problems.

The collection is destined for researchers and students in the field.

МАТЕМАТИКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Сборник содержит научные статьи по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуются вопросы существования решений, изучаются их свойства и структура множества решений. Ряд статей посвящен разработке методов исследования, в том числе и численных, конкретных практических задач.

Сборник предназначен для научных сотрудников, преподавателей и студентов, которые занимаются исследованиями в области обыкновенных дифференциальных уравнений.

Redakcijas kolēģija:

J.Klokovs (atbildīgais redaktors), M.Adjutovs (atbildīgais sekretārs), J.Cepītis, A.Cibulis, H.Kalis, A.Lepins, U.Raitums, A.Reinfelds, V.Ponomarevs.

**ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА-ФАУЛЕРА**

М.М.Адъятов, Ю.А.Клоков

Аннотация. Рассмотрена задача для обыкновенного дифференциального уравнения типа Эмдена с заданным на его решениях функционалом. Получены оценки для функционала в зависимости от параметров уравнения.
УДК 517.927

Рассмотрим задачу:

$$x'' + \frac{k}{t}x' + \varphi(x) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x(0) = H > 0, \quad (1)$$

где $k > -1$, $\varphi(x) \in C(\mathbb{R}^+)$, $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, $\varphi(x) > 0$, $x > 0$. На решениях $x(t)$, $t \geq 0$ задачи (1) определим функционал

$$J(H) = \int_0^{t_*} s^k \varphi(x(s)) ds, \quad (2)$$

где $t_* > 0$ есть первый нуль $x(t)$.

Для функционала (2) можно получить также другое выражение:

$$J(H) = -t_*^k x'(t_*), \quad (3)$$

которое легко получается из уравнения (1), если умножить его на t^k и проинтегрировать полученное равенство по t от $t=0$ до $t=t_*$.

Заметим, что функционалы типа (2) встречаются в прикладной физике [1]–[3]. Цель этой работы получить оценки для функционала $J(H)$.

Пусть $x(t) > 0$, $t \in [0, \tau)$, $x(\tau) = 0$, есть решение (1). Очевидно, что $x'(t) < 0$, $t \in (0, \tau]$ и поэтому в качестве независимой переменной можно взять x , т.е. $t = t(x)$, $0 \leq x \leq H$, где $t(x)$ определяется равенством $x = x(t(x))$, $0 \leq x \leq H$.

Тогда вместо (1) получим уравнение

$$-\frac{t''(x)}{t'^3(x)} + \frac{k}{t(x)t'(x)} + \varphi(x) = 0.$$

(Здесь и далее $t' = \frac{d}{dx}t(x)$ и т.д.)

Обозначая $z(x) = \frac{1}{2}t^2(x)$, найдем

$$\frac{z''z}{z'^3} = \frac{k+1}{2z'} + \frac{1}{2}\varphi(x). \quad (4)$$

Очевидно, что $z(H)=0$, $z(x)>0$, $x \in [0, H]$, $z'(x) < 0 \forall x \in [0, H]$. Легко показать, что

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{k+1}{\varphi(H)}(H-x)(1+\epsilon_1(x)), \\ z'(x) &= -\frac{k+1}{\varphi(H)}(1+\epsilon_2(x)), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\epsilon_i(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow H$ ($i=1, 2$).

Для функционала $J(H)$, используя (3) и путем замены $2z(x) = t^2(x)$, $z'(x) = t(x)t'(x)$, можно получить следующее выражение:

$$J(H) = - \left. \frac{(2z(x))^{(k+1)/2}}{z'(x)} \right|_{x=0} \quad (6)$$

Обозначим

$$u(x) = - \frac{(2z(x))^{(k+1)/2}}{z'(x)} \quad 0 \leq x \leq H, \quad (7)$$

так что $u(0) = J(H)$.

Из (7), используя (4), находим

$$uu' = -(2z(x))^k \varphi(x). \quad (8)$$

Из (5), (7) в окрестности точки $x=H$ находим

$$\begin{aligned} u(x) &= 2^{(k+1)/2} \left(\frac{k+1}{\varphi(H)} \right)^{(k-1)/2} (H-x)^{(k+1)/2} (1+\epsilon_3(x)) \\ &(\epsilon_3(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow H). \end{aligned}$$

Для удобства дальнейших вычислений сделаем в равенствах (4)–(8) замену x на $H-x$. Обозначая $v(x) = u(H-x)$, $\varphi_0(x) = \varphi(H-x)$, $z_0(x) = z(H-x)$, получим

$$v(x) = \frac{(2z_0(x))^{(k+1)/2}}{z'_0(x)} \quad (9)$$

$$vv' = (2z_0(x))^k \varphi_0(x). \quad (10)$$

Очевидно, что $v(H) = J(H)$, $z'_0(x) > 0 \forall x \in [0, H]$, $v'(x) > 0 \forall x \in [0, H]$,

$$v(x) = 2^{(k+1)/2} \left(\frac{k+1}{\varphi(H)} \right)^{(k-1)/2} x^{(k+1)/2} (1 + \varepsilon_k(x)),$$

$$\varepsilon_k(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0.$$

Из (9), (10) находим

$$\left(vv' \right)' = (vv') \left[\frac{\varphi'_0}{\varphi_0} + \frac{2k}{v} \left(\frac{vv'}{\varphi_0} \right)^{(k-1)/2k} \right]. \quad (11)$$

Пусть $k=0$. Тогда из (10) следует

$$\frac{v^2}{2} = \int_0^x \varphi_0(s) ds, \quad J(H) = \sqrt{2 \int_0^H \varphi_0(s) ds}$$

или

$$J(H) = \sqrt{2 \int_0^H \varphi(s) ds} \quad (12)$$

т.е. находим точное значение функционала $J(H)$. Из (9) находим

$$2\sqrt{z_0(x)} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\int_0^x \varphi_0(s) ds}} \quad (13)$$

Рассмотрим теперь случай $k > 0$. Так как $(vv')|_{x=0} = 0$, то из (11) находим

$$\left(vv' \right)^{(k+1)/2k} = \left(\varphi_0 \right)^{(k+1)/2k} \int_0^x \frac{k+1}{\varphi_0(s)} v' ds. \quad (14)$$

Предположим, что $\varphi_0(0) \leq \varphi_0(x)$, $0 \leq x \leq H$ (это будет иметь место, если, например, $\varphi'_0 \geq 0$, $0 \leq x \leq H$).

Тогда из (14) следует

$$\left(vv' \right)^{(k+1)/2k} \leq \left(\varphi_0 \right)^{(k+1)/2k} \frac{k+1}{\varphi_0(0)} v, \quad (15)$$

откуда интегрированием находим

$$v^{2/(k+1)} \leq \left(\frac{2}{k+1} \right) \left(\frac{k+1}{\varphi_0(0)} \right)^{2k/(k+1)} \int_0^x \varphi_0(s) ds \quad (16)$$

и поэтому

$$J(H) \leq \left(\frac{k+1}{\varphi_0(0)} \right)^k \left[\frac{2}{k+1} \int_0^H \varphi(x) dx \right]^{(k+1)/2} \quad (17)$$

Если $\varphi_0(0) \geq \varphi(x)$ (когда, например, $\varphi'_0(x) \leq 0$, $0 \leq x \leq H$), то аналогично находим

$$J(H) \geq \left(\frac{k+1}{\varphi_0(0)} \right)^k \left[\frac{2}{k+1} \int_0^H \varphi(x) dx \right]^{(k+1)/2} \quad (18)$$

Пусть $\varphi(x) = x^n$, $(n-1)(k-1) < 4$. Тогда $\varphi_0(x) = (H-x)^n$, $\varphi'_0 \leq 0$ ($0 \leq x \leq H$) и из (18) находим

$$J(H) \geq 2^{(k+1)/2} (k+1)^{(k-1)/2} (n+1)^{-(k+1)/2} H^r \quad (19)$$

где

$$r = \frac{1}{2} \left[2 - (n-k)(k-1) \right].$$

Для случая $\varphi(x) = x^n$ известно точное значение функционала $J(H)$, а именно:

$$J(H) = \int_0^{t_*} H^r s^k x_0^n(s) ds, \quad (20)$$

где $x_0(t)$ есть решение (1) при $H=1$ и t_* есть первый нуль этого решения. Как видно из (19), (20), показатели степеней при H совпадают. Отличаются лишь постоянные множители.

Если $\varphi'_0(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq H$, то интегрируя (14) по частям, получим

$$\left(vv' \right)^{(k+1)/2k} = \left(\varphi_0 \right)^{(k+1)/2k} (k+1) \left[\frac{v}{\varphi_0} + \int_0^x \frac{\varphi'_0}{\varphi_0^2} v ds \right], \quad (21)$$

откуда

$$vv' \geq \varphi_0 (k+1)^{2k/(k+1)} \left(\frac{v}{\varphi_0} \right)^{2k/(k+1)}, \quad (22)$$

$$v \geq (k+1)^k \left[\frac{2}{k+1} \int_0^x \frac{dx}{\varphi_0^{(k-1)/(k+1)}} \right]^{(k+1)/2} = \bar{v}(x). \quad (23)$$

Подставляя (23) в (21), найдем

$$\left(vv' \right)^{(k+1)/2k} \geq \left(\varphi_0 \right)^{(k+1)/2k} (k+1) \left[\frac{\bar{v}}{\varphi_0} + \int_0^x \frac{\varphi'_0}{\varphi_0^2} \bar{v} ds \right]. \quad (24)$$

Откуда путем интегрирования можно найти оценку для $J(H)$.

Из (23) следует

$$J(H) = (k+1)^k \left(\frac{2}{k+1} \int_0^H \frac{dx}{\varphi_0^{(k-1)/(k+1)}} \right)^{(k+1)/2} \quad (25)$$

Если $\varphi'_0 \leq 0$, $0 \leq x \leq H$, то вместо (25) получается противоположная оценка. Если $\varphi'_0 = 0$, т.е. $\varphi_0 \equiv H$, то из (21) находим точное значение $J(H)$:

$$J(H) = \left(\frac{k+1}{H} \right)^{(k-1)/2} (2H)^{(k+1)/2}.$$

Если $\varphi_0(x) \leq M$, $0 \leq x \leq H$, то из (14) следует

$$J(H) = \left(\frac{k+1}{M} \right)^k \left(\frac{2}{k+1} \int_0^H \varphi(s) ds \right)^{(k+1)/2}$$

Если же $\varphi_0(x) \geq m > 0$, $0 \leq x \leq H$, то аналогично находим

$$J(H) = \left(\frac{k+1}{m} \right)^k \left(\frac{2}{k+1} \int_0^H \varphi(s) ds \right)^{(k+1)/2}$$

Наконец, если $m \leq \varphi_0(x) \leq M$, $0 \leq x \leq H$, то из (14) следует

$$\left(\frac{k+1}{M} \right)^k \left(\frac{2m}{k+1} H \right)^{(k+1)/2} \leq J(H) \leq \left(\frac{k+1}{m} \right)^k \left(\frac{2M}{k+1} H \right)^{(k+1)/2}$$

Полученные оценки можно уточнить. Мы не станем этого делать.

Рассмотрим несколько подробнее случай $k=1$. Из (14) имеем

$$vv' = \varphi_0 \int_0^x \frac{2}{\varphi_0(s)} v' ds. \quad (26)$$

Пусть $\varphi'_0(s) \geq 0$, $0 \leq s \leq H$, $v' > 0$. Интегрируя (26) по частям, находим

$$vv' = \varphi_0 \left[\frac{2v}{\varphi_0} + \int_0^x \frac{2\varphi'_0}{\varphi_0^2} v ds \right] 2v,$$

откуда $v' \geq 2$. Теперь из (26)

$$vv' \geq 4\varphi_0 \int_0^x \frac{ds}{\varphi_0(s)} \quad (27)$$

или

$$\frac{v^2}{2} \geq 4 \int_0^x \varphi_0(s) \int_0^s \frac{d\alpha}{\varphi_0(\alpha)} ds,$$

откуда

$$J(H) \geq 2\sqrt{2} \left[\int_0^H \varphi_0(s) \int_0^s \frac{d\alpha}{\varphi_0(\alpha)} ds \right]^{1/2} \geq 2H. \quad (28)$$

Если $\varphi_0' \geq 0$ и, кроме того, $\varphi_0 \varphi_0'' \geq \varphi_0'^2$, то можно доказать, что

$$J(H) \leq 2\varphi_0(H) \int_0^H \frac{dx}{\varphi_0(x)} \quad (29)$$

Если $\varphi_0' \leq 0$, то аналогично можно доказать, что

$$J(H) \leq 2\sqrt{2} \left[\int_0^H \varphi_0(s) \int_0^s \frac{d\alpha}{\varphi_0(\alpha)} ds \right]^{1/2} \leq 2H. \quad (30)$$

Если, кроме того, $\varphi_0 \varphi_0'' \leq \varphi_0'^2$, то можно найти, что

$$J(H) \geq 2\varphi_0(H) \int_0^H \frac{dx}{\varphi_0(x)}$$

Если $\varphi_0' \geq 0$, то вместо условия $\varphi_0 \varphi_0'' \geq \varphi_0'^2$ можно потребовать:

$$2 \frac{\varphi_0'}{\varphi_0} + \left(\frac{\varphi_0''}{\varphi_0} - \frac{\varphi_0'^2}{\varphi_0^2} \right) \cdot 2 \int_0^x \frac{\varphi_0(s)}{\varphi_0(0)} ds \geq 0.$$

Если $\varphi_0' \leq 0$, то вместо условия $\varphi_0 \varphi_0'' \leq \varphi_0'^2$ можно потребовать:

$$2 \frac{\varphi_0'}{\varphi_0} \frac{\varphi_0(x)}{\varphi_0(0)} + \left(\frac{\varphi_0''}{\varphi_0} - \frac{\varphi_0'^2}{\varphi_0^2} \right) \cdot 2x \leq 0.$$

Если $\varphi_0' \geq 0$, то

$$vv' \leq \varphi_0 \int_0^x \frac{2}{\varphi_0(s)} \cdot 2 \frac{\varphi_0(s)}{\varphi_0(0)} ds = 4x \frac{\varphi_0(x)}{\varphi_0(0)},$$

откуда

$$\frac{v^2}{2} \leq 4 \int_0^x s \frac{\varphi_0(s)}{\varphi_0(0)} ds$$

и

$$J^2(H) \leq 8 \int_0^H \frac{(H-x)\varphi(x)}{\varphi(H)} dx.$$

Аналогично можно получить оценки снизу (предполагая, что $\varphi'_0 \leq 0$).

Методы, изложенные выше, позволяют находить оценки для более общих интегральных функционалов, например, вида

$$J(H) = t_*^k (x(t_*))^p (x'(t_*))^q,$$

где t_* есть первый нуль функции $a_0 x(t) + a_1 x'(t)$, $k > -1$, $a_0, a_1 \geq 0$, $p, q \in \mathbb{R}$. При этом возрастают аналитические трудности.

Литература

1. Адьютов М.М., Змитренко Н.В., Клоков Ю.А. Об одном обобщении уравнения Эмдена. // Дифференц.уравнения. 1991. Т.27. С.1107-1114.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Ч.1. Теоретическая физика. Т.5. 3-е изд. М., 1976.
3. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Теория тяготения и эволюция звезд. М., 1971.

M.Adjutov, Yu.Klokov. Estimates for some integral functionals for Emden type equations.

Summary. The problem for Emden type ordinary differential equations with the functional given on its solutions are investigated. Some estimates are stated for the functional in dependence of equation parameters.
MSC 34B99

M.Adjutovs, J.Klokovs. Dāžu integrālo funkcionālu novērtējumi Emdena tipa diferenciālvienādojumiem.

Anotācija. Apskatīta Emdena tipa problēma paratsajiem diferenciālvienādojumiem, un uz viņu atrisinājumiem uzdots funkcionālis. Iegūti novērtējumi funkcionālim atkarībā no vienādojumu parametriem.

Институт математики и информатики

Поступила 28.03.95

Латвийского университета

Рига, б.Райня, 29

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ СРАВНЕНИЯ
 ДЛЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
 ТИПА ЭМДЕНА-ФАУЛЕРА

М.М.Адъятов, Ю.А.Клоков

Аннотация. Получены достаточные условия, позволяющие сравнивать решения начальных задач для двух уравнений типа Эмдена-Фаулера.
 УДК 517.927

Рассмотрим две задачи

$$x'' + \frac{k}{t}x' + \varphi(x) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x(0) = H > 0, \quad (1)$$

$$\bar{x}'' + \frac{k}{t}\bar{x}' + \bar{\varphi}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x}'(0) = 0, \quad \bar{x}(0) = H > 0, \quad (2)$$

где $-1 < k < \infty$, $\varphi, \bar{\varphi} \in C(\mathbb{R}^+)$, $\varphi, \bar{\varphi} > 0$, $x \geq 0$. Так как решение (1) $x(t)$ монотонно, то в качестве независимой переменной можно взять x , а t считать функцией x , т.е. $t = t(x)$, $0 \leq x \leq H$, где $t(x)$ определяется равенством $x = x(t(x))$, $0 \leq x \leq H$. Обозначим $z = t^2(x)$, так что $z(H) = 0$, $z(x) > 0$, $x \in [0, H]$, $z'(0) < 0$, $x \in [0, H]$. Тогда получим уравнение

$$\frac{z''z}{z'^3} = \frac{k+1}{2z'} + \frac{1}{2}\varphi(x). \quad (3)$$

Аналогично, если $\bar{x}(t)$ есть решение (2), $x = \bar{x}(\bar{t}(x))$, $2\bar{z}(x) = \bar{t}^2(x)$, то получим

$$\frac{\bar{z}''\bar{z}}{\bar{z}'^3} = \frac{k+1}{2\bar{z}'} + \frac{1}{2}\bar{\varphi}(x). \quad (4)$$

Обозначим

$$v(x) = \frac{\left[2z_0(x)\right]^{\frac{k+1}{2}}}{z_0'(x)}. \quad (5)$$

Тогда

$$vv' = (2z_0(x))^k \varphi_0(x), \quad (6)$$

где $z_0(x) = z(H-x)$, $\varphi_0(x) = \varphi(H-x)$. В работе [1] для функции $v(x)$ было получено следующее уравнение:

$$vv' = \varphi_0 \left(\int_0^x \frac{k+1}{\varphi_0(s)} v'(s) ds \right)^{\frac{2k}{k+1}}. \quad (7)$$

Предполагая в дальнейшем $k \geq 0$, $\varphi_0(0) = \varphi_0(x)$, $0 \leq x \leq H$, из (7) можно получить

$$vv' = \varphi_0(x) \left(\frac{k+1}{\varphi_0(0)} v(x) \right)^{\frac{2k}{k+1}}, \quad (8)$$

откуда интегрированием находим

$$v \leq \left(\frac{k+1}{\varphi_0(0)} \right)^k \left(\frac{2}{k+1} \int_0^x \varphi_0(s) ds \right)^{\frac{k+1}{2}} \quad (9)$$

Из (8), (9) легко получаем

$$\frac{vv'}{\varphi_0(x)} \leq \left(\frac{k+1}{\varphi_0(0)} \right)^{2k} \left(\frac{2}{k+1} \int_0^x \varphi_0(s) ds \right)^k \quad (10)$$

Если $\bar{z}(x)$ есть решение (4), то вместо (5) получаем

$$\bar{v}(x) = \frac{\left(2\bar{z}_0(x) \right)^{\frac{k+1}{2}}}{\bar{z}'_0(x)} \quad (11)$$

Тогда

$$\bar{v}\bar{v}' = (2\bar{z}_0(x))^k \bar{\varphi}_0(x), \quad (12)$$

где $\bar{z}_0(x) = \bar{z}(H-x)$, $\bar{\varphi}_0(x) = \bar{\varphi}(H-x)$,

$$\bar{v}\bar{v}' \leq \bar{\varphi}_0(x) \left(\int_0^x \frac{k+1}{\bar{\varphi}_0(s)} \bar{v}'(s) ds \right)^{\frac{2k}{k+1}} \quad (13)$$

Предполагая, что $k \geq 0$, $\bar{\varphi}_0(0) = \bar{\varphi}_0(x)$, $0 \leq x \leq H$, вместо (8), (9), (10) аналогично получаем противоположные неравенства. Так, например, вместо (10) находим

$$\frac{\bar{v}\bar{v}'}{\bar{\varphi}_0(x)} \geq \left(\frac{k+1}{\bar{\varphi}_0(0)} \right)^{2k} \left(\frac{2}{k+1} \int_0^x \bar{\varphi}_0(s) ds \right)^k. \quad (14)$$

Из (6), (10) находим

$$z_0(x) \leq \frac{k+1}{\varphi_0^2(0)} \int_0^x \varphi_0(s) ds \quad (15)$$

а для функции $\bar{z}_0(x)$ аналогично получаем (помня, что $\bar{\varphi}_0(0) \geq \bar{\varphi}_0(x)$, $0 \leq x \leq H$)

$$\bar{z}_0(x) \geq \frac{k+1}{\bar{\varphi}_0^2(0)} \int_0^x \bar{\varphi}_0(s) ds. \quad (16)$$

Предположим теперь, что правая часть в (15) равна или меньше, чем правая часть в (16). Тогда из (15), (16) следует

$$z_0(x) \leq \frac{k+1}{\varphi_0^2(0)} \int_0^x \varphi_0(s) ds \leq \frac{k+1}{\bar{\varphi}_0^2(0)} \int_0^x \bar{\varphi}_0(s) ds \leq \bar{z}_0(x). \quad (17)$$

Неравенства (17) позволяют сравнивать решения $x(t)$, $\bar{x}(t)$ уравнений (1), (2) ($x(t) \leq \bar{x}(t)$ для тех t , при которых $x(t) \geq 0$).

Для $z_0(x)$, $z'_0(x)$ можно получить другие неравенства, предполагая, например, что $\varphi'_0(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq H$. Тогда, интегрируя в (7) по частям, найдем

$$vv' = \varphi_0 \left[\frac{k+1}{\varphi_0} v + \int_0^x \frac{k+1}{\varphi_0^2} \varphi'_0 v ds \right]^{\frac{2k}{k+1}},$$

откуда

$$vv' \geq \varphi_0 \left[\frac{k+1}{\varphi_0} v \right]^{\frac{2k}{k+1}}, \quad (18)$$

$$v \geq (k+1)^k \left[\frac{2}{k+1} \int_0^x \frac{ds}{\varphi_0^{(k-1)/(k+1)}(s)} \right]^{\frac{k+1}{2}} \quad (19)$$

$$vv' \geq \varphi_0 \left[2(k+1) \right]^k \left[\frac{1}{\varphi_0} \right]^{\frac{2k}{k+1}} \left[\int_0^x \frac{ds}{\varphi_0^{(k-1)/(k+1)}(s)} \right]^{\frac{k+1}{2}} \quad (20)$$

Предполагая, что $\bar{\varphi}'_0(x) \leq 0$, $0 \leq x \leq H$, для функций \bar{v} , \bar{v}' вместо (18), (19), (20) можно получить аналогичные противоположные неравенства. Комбинируя их, найдем ($0 \leq x \leq H$)

$$\begin{aligned}
 z_0(x) &\geq \frac{k+1}{\varphi_0^{2/(k+1)}} \int_0^x \frac{ds}{\varphi_0^{(k-1)/(k+1)}} \geq \\
 &\geq \frac{k+1}{\varphi_0^{2/(k+1)}} \int_0^x \frac{ds}{\bar{\varphi}_0^{-(k-1)/(k+1)}} \geq \bar{z}_0(x),
 \end{aligned} \tag{21}$$

предполагая, что среднее неравенство в (21) справедливо.

С помощью равенства (5) также можно получить неравенства для $z_0(x)$, $\bar{z}_0(x)$.

Пусть $k \in (0, 1)$. Тогда из (5) находим

$$\left(2z_0\right)^{\frac{1-k}{2}} (1-k) \int_0^x \frac{ds}{v(s)} \tag{22}$$

и, аналогично,

$$\left(2\bar{z}_0\right)^{\frac{1-k}{2}} (1-k) \int_0^x \frac{ds}{\bar{v}(s)} \tag{23}$$

Теперь из (22) и (9) и аналогичных противоположных неравенств для $\bar{z}_0(x)$ получим

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{z_0}{k+1}\right)^{\frac{1-k}{2}} &\geq \frac{1-k}{2} (\varphi_0(0))^k \int_0^x \frac{ds}{\left(\int_0^s \varphi_0(\alpha) d\alpha\right)^{\frac{k+1}{2}}} \\
 &\geq \frac{1-k}{2} (\bar{\varphi}_0(0))^k \int_0^x \frac{ds}{\left(\int_0^s \bar{\varphi}_0(\alpha) d\alpha\right)^{\frac{k+1}{2}}} \left(\frac{\bar{z}_0}{k+1}\right)^{\frac{1-k}{2}}
 \end{aligned} \tag{24}$$

предполагая, что среднее неравенство для φ_0 , $\bar{\varphi}_0$ справедливо.

Пусть теперь $k=1$ в (5). Тогда, интегрируя, найдем

$$z_0(H) \exp \left(-2 \int \frac{ds}{v} \right) = z_0(x). \tag{25}$$

Используя (6) (при $k=1$), получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{vv'}{\varphi_0} \right)_{x=H} \exp \left[-2 \int_x^H \frac{ds}{v} \right] = z_0(x). \quad (26)$$

Теперь из (9), (10) (где $k=1$), учитывая, что $\varphi_0(0) \leq \varphi_0(x)$, $\bar{\varphi}_0(0) \geq \bar{\varphi}_0(x)$, $0 \leq x \leq H$, следует

$$\begin{aligned} z(x) &\leq \frac{2}{\varphi_0^2(H)} \int_0^H \varphi_0(s) ds \exp \left[-\varphi_0(0) \int_x^H \frac{ds}{\int_0^s \varphi_0(\alpha) d\alpha} \right] \\ &\leq \frac{2}{\bar{\varphi}_0^2(H)} \int_0^H \bar{\varphi}_0(s) ds \exp \left[-\bar{\varphi}_0(0) \int_x^H \frac{ds}{\int_0^s \bar{\varphi}_0(\alpha) d\alpha} \right] \leq \bar{z}(x), \end{aligned} \quad (27)$$

предполагая, что среднее неравенство справедливо.

Наконец, рассмотрим случай $k > 1$.

Из (5) находим

$$\frac{1}{(2z_0(x))^{(k-1)/2}} = \frac{1}{\left(\frac{vv'}{\varphi_0} \right)_{x=H}^{(k-1)/2k}} + \frac{k-1}{2} 2^k \int_x^H \frac{ds}{v}$$

и, аналогично предыдущему предполагая, что

$$\varphi_0(0) \geq \varphi_0(x), \quad \bar{\varphi}_0(0) \leq \bar{\varphi}_0(x), \quad 0 \leq x \leq H,$$

получаем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2z_0(x))^{(k-1)/2}} &\leq \frac{1}{\left(\frac{k+1}{\varphi_0(0)} \right)^{2k} \left[\frac{2}{k+1} \int_0^H \varphi_0(s) ds \right]^k} + \\ &+ \frac{k-1}{2} 2^k \int_x^H \frac{ds}{\left(\frac{k+1}{\varphi_0(0)} \right)^k \left[\frac{2}{k+1} \int_0^s \varphi_0(\alpha) d\alpha \right]^{\frac{k+1}{2}}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\left(\frac{k+1}{\bar{\varphi}_0(0)}\right)^{2k} \left(\frac{2}{k+1} \int_0^H \bar{\varphi}_0(s) ds\right)^k} + \quad (28)$$

$$+ \frac{k-1}{2} 2^k \int_x^H \frac{ds}{\left(\frac{k+1}{\bar{\varphi}_0(0)}\right)^k \left(\frac{2}{k+1} \int_0^s \bar{\varphi}_0(\alpha) d\alpha\right)^{\frac{k+1}{2}}} \leq \frac{1}{\left(2\bar{z}_0(x)\right)^{(k-1)/2}}$$

считая, что среднее неравенство в (28) справедливо.

Несколько иные оценки можно получить, используя неравенства (19), (20), (21).

В уравнениях (1), (2) параметры k можно считать различными (k и \bar{k}).

Отдельно рассмотрим случай

$$k \leq 0, \quad -1 < k < 0.$$

$$v v' = \varphi_0 \left(\int_0^x \frac{k+1}{\varphi_0(s)} v' ds \right)^{\frac{2k}{k+1}}, \quad (29)$$

$$\varphi_0(0) \leq \varphi_0(x), \quad \bar{\varphi}_0(0) \geq \bar{\varphi}_0(x), \quad 0 \leq x \leq H.$$

Из (29) находим

$$v v' = \varphi_0 \left(\frac{k+1}{\varphi_0(0)} v \right)^{\frac{2k}{k+1}},$$

$$v \geq \left(\frac{k+1}{\varphi_0(0)} \right)^k \left(\frac{2}{k+1} \int_0^x \varphi_0(s) ds \right)^{\frac{k+1}{2}}$$

и, аналогично,

$$\bar{v} \geq \left(\frac{k+1}{\bar{\varphi}_0(0)} \right)^k \left(\frac{2}{k+1} \int_0^x \bar{\varphi}_0(s) ds \right)^{\frac{k+1}{2}}$$

Из (5) следует:

$$\frac{1-k}{z_0^2} = \frac{1-k}{2} 2^{\frac{k+1}{2}} \int_0^x \frac{ds}{v(s)}. \quad (30)$$

Из (29), (30) находим

$$\begin{aligned} \frac{1-k}{z_0^2} &\leq \frac{1-k}{2} 2^{\frac{k+1}{2}} \int_0^x \frac{ds}{\left(\frac{k+1}{\varphi_0(0)}\right)^k \left(\frac{2}{k+1} \int_0^s \varphi_0(\alpha) d\alpha\right)^{\frac{k+1}{2}}} \\ &\leq \frac{1-k}{2} 2^{\frac{k+1}{2}} \int_0^x \frac{ds}{\left(\frac{k+1}{\varphi_0(0)}\right)^k \left(\frac{2}{k+1} \int_0^s \bar{\varphi}_0(\alpha) d\alpha\right)^{\frac{k+1}{2}}} \leq \frac{1-k}{z_0^2} \end{aligned}$$

$$0 \leq x \leq H.$$

Литература

1. Адъютов М.М., Клоков Ю.А. Оценки некоторых интегральных функционалов для уравнений типа Эмдена-Фаулера (в настоящем сборнике).

M.Adjutov, Yu.Klokov. On some comparison theorems for solutions of nonlinear Emden equations.

Summary. A number of theorems that allow to comparison solutions of initial value problems for two Emden equations.

1991 MSC 34B99

M.Adjutovs, J.Klokovs. Dāžas salīdzināšanas teorēmas nelinearu Emdena-Faulera tipa vienādojumu atrisinājumiem.

Anotācija. Iegūti pietiekamie nosacījumi, kuri ļauj salīdzināt Koši problēmas atrisinājumus diviem Emdena-Faulera tipa vienādojumiem.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, 6.Райņa, 29

Поступила 13.03.95

**ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ
НЕКОТОРЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЧЕБЫШЕВА**

Ю. А. Клоков

Аннотация. Изучается асимптотика решений при $r \rightarrow \infty$ рекуррентных уравнений вида

$$\sum_{\nu=0}^p (-1)^\nu C_p^\nu u_{r+p-\nu} = \frac{1}{r} \sum_{\nu=0}^p \Lambda_\nu u_{r+p-\nu}$$

($r=1, 2, \dots$), где C_p^ν биномиальные коэффициенты и Λ_ν ($\nu=0, \dots, p$) заданные комплексные постоянные.
УДК 518.61

П. 1. Ряды Чебышева широко используются в численных методах анализа [1], [2]. При этом коэффициенты соответствующих рядов Чебышева иногда находятся из различных рекуррентных соотношений. Для исследования сходимости получающихся рядов необходимо знать асимптотику решений рекуррентных уравнений.

В этой работе мы рассмотрим рекуррентные уравнения вида

$$\sum_{\nu=0}^p (-1)^\nu C_p^\nu u_{r+p-\nu} = \frac{1}{r} \sum_{\nu=0}^p \Lambda_\nu u_{r+p-\nu} \quad (1)$$

$$(r=r_0, r_0+1, r_0+2, \dots), \quad r_0 \in \{1, 2, \dots\},$$

где $C_p^\nu = p!/\nu!(p-\nu)!$ - биномиальные коэффициенты и Λ_ν ($\nu=0, \dots, p$) заданные комплексные постоянные.

Именно такие уравнения для коэффициентов Чебышева получаются, если функция $\varphi(t)$, $t \in [-1, 1]$, бесконечно дифференцируема, но не аналитична.

Число таких функций, важных в прикладных дисциплинах, велико.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$f(x) = \exp(x) \int_x^{\infty} s^{-1} \exp(-s) ds, \quad 0 < a \leq x < \infty, \quad (2)$$

которая связана с интегральной показательной функцией $E_1(x)$ [3]. Из (2) следует, что

$$f'(x) - f(x) = x^{-1}, \quad f(\infty) = 0. \quad (3)$$

Полагая в (3) $x = \frac{2a}{1-t}$, $t \in [-1, 1]$, $f\left(\frac{2a}{1-t}\right) = y(t)$, найдем

$$(1-t)^2 y' - 2ay = t-1, \quad y(1) = 0. \quad (4)$$

Можно проверить, что функция $y(t)$ бесконечно дифференцируема, но не аналитична при $t \in [-1, 1]$.

Представим $y(t)$ в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода

$$y(t) = \sum_{r=0}^{\infty} C_r T_r(t). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получим рекуррентное уравнение вида (1) четвертого порядка ($p=4$), $r_0=3$ ($r=3, 4, \dots$),

$$\begin{aligned} & C_{r-2} - 4C_{r-1} + 6C_r - 4C_{r+1} + C_{r+2} = \\ & = \frac{1}{r} \left[2C_{r-2} - 4(1-a)C_{r-1} + 4(1-a)C_{r+1} - 2C_{r+2} \right], \\ & aC_0 - \frac{5}{4}C_1 + (2-a)C_2 - \frac{3}{4}C_3 = 1, \quad (r=1), \\ & (1+a)C_1 - 3C_2 + (3-a)C_3 - C_4 = -\frac{1}{2}, \quad (r=2). \end{aligned} \quad (6)$$

Полагая в (6) $C_r = u_{r+2}$, получим уравнение (1).

П.2. Рассмотрим вначале уравнение (1) для случая $p=1$,

$$\begin{aligned} u_{r+1} - u_r &= \frac{1}{r} \left(-Au_{r+1} + Bu_r \right) \\ (A &= -A_0, \quad B = A_1, \quad u_1 = 1). \end{aligned} \quad (7)$$

Из (7) находим

$$u_{r+1} = u_r \frac{(1+B/r)}{(1+A/r)} \quad (r=1, 2, \dots),$$

откуда следует

$$\begin{aligned} u_{r+1} &= \frac{(1+B/1)(1+B/2)\dots(1+B/r)}{(1+A/1)(1+A/2)\dots(1+A/r)}, \\ & (-A, -B) \notin \{1, 2, \dots\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя представление Гамма-функции

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \exp(\gamma z) \prod_{s=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{s} \right) \exp \left(-\frac{z}{s} \right) \right],$$

$\gamma=0,57721\dots$ постоянная Эйлера, находим из (8), предполагая $\text{Re}(B-A) \neq 0$,

$$u_{r+1} = \frac{\Gamma(1+A)}{\Gamma(1+B)} r^{B-A} (1+\epsilon_r),$$

где $\epsilon_r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

П.3. В дальнейшем нам понадобится формула академика Сонина Н.Я., см. [4], с.33.

Пусть $f(x) \in C^2([n, N])$, тогда

$$\sum_{s=n}^N f(s) = \int_n^N f(x) dx + \frac{1}{2}f(N) + \frac{1}{2}f(n) + \int_n^N \sigma(x) f''(x) dx, \quad (9)$$

где

$$\sigma(x) = \int_0^x \left[\frac{1}{2} - \{t\} \right] dt,$$

и $\{t\}$ — дробная часть числа t , так что $\sigma(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$ при $x \in [0, 1]$ и $\sigma(x+1) = \sigma(x)$ при $x \in \mathbb{R}$.

Если числовой ряд для $f(s)$ сходится вместе с соответствующими интегралами, то из (9) при $N \rightarrow \infty$ получим

$$\sum_{s=n}^{\infty} f(s) = \int_n^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2}f(n) + \int_n^{\infty} \sigma(x) f''(x) dx. \quad (10)$$

Применим формулу (9) для нахождения асимптотики решения неоднородного уравнения

$$u_{r+1} - u_r = f(r). \quad (11)$$

Из (11) находим

$$u_{N+1} = u_0 + \sum_{s=1}^N f(s). \quad (12)$$

Пусть $f(r) = r^{B-A}$, $\text{Re}(B-A+1) > 0$. Используя формулу (9) при $n=1$, найдем

$$u_{N+1} = \frac{N^{B-A+1}}{B-A+1} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right), \quad N \rightarrow \infty.$$

Если же $f(s) = \exp(\gamma s^\alpha)$, где $\text{Re} \gamma > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, то из (9)

находим при $N \rightarrow \infty$

$$u_{N+1} = \frac{N^{1-\alpha}}{\gamma^\alpha} \exp(\gamma N^\alpha) \left(1 + O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right) \right).$$

Предположим теперь, что числовой ряд для $f(r)$ сходится. Тогда из (11) находим асимптотику частного решения (11), стремящегося к нулю:

$$-u_n = \sum_{s=n}^{\infty} f(s). \quad (13)$$

Если $f(r) = r^{B-A}$, $\operatorname{Re}(B-A+1) < 0$, то с помощью формулы (10) получим

$$-u_n = \frac{n^{B-A+1}}{B-A+1} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Если же

$$f(r) = \exp(\gamma r^\alpha), \quad \operatorname{Re} \gamma < 0, \quad \alpha \in (0, 1),$$

то аналогично находим

$$-u_n = \frac{n^{\alpha-1}}{\gamma^\alpha} \exp(\gamma n^\alpha) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

П.4. Рассмотрим уравнение (1), где $p \in \{2, 3, \dots\}$. Обозначим $\lambda = A_0 + \dots + A_p$ и запишем (1) в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{p-1} (-1)^\nu c_{p-1}^\nu \left(u_{r+p-\nu} - u_{r+p-\nu-1} \right) \\ & = \frac{\lambda}{r} u_r + \frac{1}{r} \sum_{\nu=0}^{p-1} B_\nu \left(u_{r+p-\nu} - u_{r+p-\nu-1} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где B_ν постоянные, определяемые через A_ν . Если $\lambda = 0$, то полагая в (14)

$$u_{r+1} - u_r = f_r, \quad (15)$$

получим для f_r уравнение (1), порядок которого $p-1$. Если мы изучим асимптотику решений этого нового уравнения (для f_r), то из (15) найдем асимптотику для u_r , используя результаты п.3.

Поэтому рассмотрим теперь случай $\lambda \neq 0$. Подставим в (14) $v_r = \exp(\gamma r^\alpha)$, где $\alpha = 1-p^{-1}$ и γ есть корень уравнения

$$\gamma^p \alpha^p = \lambda \quad (16)$$

такой, что $\operatorname{Re} \gamma \neq 0$. Тогда после простых (но трудоемких) вычислений найдем, что v_r есть решение следующего уравнения

$$\sum_{\nu=0}^{p-1} (-1)^\nu C_{p-1}^\nu \left(v_{r+p-\nu} - v_{r+p-\nu-1} \right) \\ = v_r \left(\frac{\lambda + \epsilon_r}{r} \right) + \frac{1}{r} \sum_{\nu=0}^{p-1} B_\nu \left(v_{r+p-\nu} - v_{r+p-\nu-1} \right), \quad (17)$$

где

$$\epsilon_r = 0(r^{-1-\alpha}).$$

Поскольку уравнения (14), (17) отличаются друг от друга на "суммируемую" добавку (числовой ряд для ϵ_r сходится), то уравнение (14) также имеет решение вида

$$u_r = \exp(\gamma r^\alpha) (1 + \eta_r), \quad (18)$$

где

$$\eta_r = 0(1/r^{3\alpha-1}), \quad 3\alpha-1 = 2-3/p.$$

Таким образом, каждому корню γ уравнения (16) ($\text{Re } \gamma \neq 0$) соответствует частное решение с асимптотикой (18).

В связи с тем, что ряд (5) должен сходиться, интерес представляют те решения, у которых $\text{Re } \gamma < 0$. В этом случае указанный ряд бесконечно дифференцируем. Это легко проверить прямыми вычислениями.

П.5. Обратимся к уравнению (6), для которого $\lambda=0$. Сделаем замену

$$C_{r+1} - C_r = -u_{r+2}. \quad (19)$$

Тогда для u_r получим рекуррентное уравнение третьего порядка, $p=3$:

$$u_{r+3} - 3u_{r+2} + 3u_{r+1} - u_r = \frac{1}{r} \left[2u_{r+3} - (2-4a)u_{r+2} - (2-4a)u_{r+1} + 2u_r \right].$$

Для этого уравнения $\lambda=8a$.

Из (16) находим

$$\gamma_\nu = 3\sqrt[3]{a} z_\nu \quad (\nu=1, 2, 3),$$

где $z_\nu^3=1$, т.е. $z_1=1$, $z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом, убывающие решения имеют вид

$$u_r = \exp(\gamma_{2,3} r^\alpha), \quad \alpha = \frac{2}{3},$$

и из п.3 находим

$$-C_{r-1} = \frac{r^{1-\alpha}}{\gamma a} \exp(\gamma r^\alpha) \left[1 + 0(1/r^\alpha) \right],$$

$$r \in \{r_2, r_3\}.$$

Литература

1. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. - М.: Наука, 1982. 384 с.
2. Васильев Н.И., Клоков Ю.А., Шкерстена А.Я. Применение полиномов Чебышева в численном анализе. Рига: Зинатне, 1984. 240 с.
3. Справочник по специальным функциям / Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. - М.: Наука, 1979. 832 с.
4. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: ГИИ, 1949. 180 с.

Yu.Klokov. On asymptotics of solutions of some recurrent equations for Chebyshev's series coefficients.

Summary. An asymptotics at $r \rightarrow \infty$ of solutions of recurrent equations of the type

$$\sum_{\nu=0}^R (-1)^\nu C_p^\nu u_{r+p-\nu} = \frac{1}{r} \sum_{\nu=0}^R \lambda_\nu u_{r+p-\nu}$$

($r=1, 2, \dots$), is investigated, where C_p^ν are binomial coefficients, λ_ν ($\nu=0, \dots, p$) - given complex-valued constants.

MSC 41A50

J.Klokovs. Par dažu rekurentu Čebiševa rindu koeficientu vienādojumu atrisinājumu asimptotiku.

Anotācija. Tiek pētīta rekurences vienādojumu

$$\sum_{\nu=0}^R (-1)^\nu C_p^\nu u_{r+p-\nu} = \frac{1}{r} \sum_{\nu=0}^R \lambda_\nu u_{r+p-\nu} \quad (r=1, 2, \dots),$$

atrisinājumu asimptotika, kur C_p^ν - binomiālie koeficienti un λ_ν ($\nu=0, \dots, p$) - dotas kompleksas konstantes.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, 6.Райня, 29

Поступила 20.12.93

О ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОДУ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Ю. А. Клоков

Аннотация. Указаны достаточные условия существования решения задачи Неймана

$$y^{IV} = -f(t, y, y', y'', y'''), \quad y'(0) = a_0,$$

$$y'(\tau) = a_1, \quad y'''(0) = b_0, \quad y'''(\tau) = b_1,$$

для любых $a, b \in \mathbb{R}$ ($i=0,1$).
УДК 517.927.4

Эта статья является продолжением работ [1]–[3], посвященных нелинейным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) четвертого порядка (см. также [4]).

Рассмотрим задачу

$$y^{IV} = -f(t, y), \tag{1}$$

$$y'(0) = a_0, \quad y'(\tau) = a_1, \tag{2}$$

$$y'''(0) = b_0, \quad y'''(\tau) = b_1, \tag{3}$$

где $f \in C(I \times \mathbb{R})$, $I = [0, \tau]$, $I_0 = (0, \tau)$, $\tau > 0$.

Лемма. Пусть f имеет вид

$$f(t, y) = y + f_0(t, y) \tag{4}$$

и существует постоянная $m > 0$ такая, что

$$|f_0(t, y)| < m \quad \forall t, y \in I \times \mathbb{R}.$$

Тогда решение задачи (1)–(3) существует.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$z^{IV} = -z, \tag{5}$$

$$z'(0) = z'(\tau) = z'''(0) = z'''(\tau) = 0. \tag{6}$$

Умножая (5) на z , дважды интегрируя по частям и используя (6), получим

$$\int_0^{\tau} [z''^2(t) + z^2(t)] dt = 0,$$

откуда $z(t) \equiv 0$, $t \in I$. Следовательно, задача (5), (6) имеет только нулевое решение, и поэтому, по теореме существования [5, с.24], задача (1)-(3) имеет решение для любых $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ($i=0,1$), если f имеет вид (4).

Теорема. Пусть выполняется условие

$$(A) \quad f(t, y) \rightarrow \pm\infty \quad \text{при } y \rightarrow \pm\infty$$

равномерно относительно $t \in I$. Тогда решение задачи (1)-(3) существует для любых $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ($i=0,1$).

Доказательство. Сделаем замену $y = x + p(t)$, где $p(t)$ полином четвертой степени, удовлетворяющий (2), (3) и условию $p(0) = 0$. Тогда, вместо задачи (1)-(3), получим задачу

$$x^{IV} = -\varphi(t, x), \quad (7)$$

$$x'(0) = 0, \quad x'(\tau) = 0, \quad (8)$$

$$x'''(0) = 0, \quad x'''(\tau) = 0, \quad (9)$$

где $\varphi(t, x) = f(t, x + p(t)) + p^{IV}(t)$.

Очевидно, что $\varphi(t, x) \rightarrow \pm\infty$ при $x \rightarrow \pm\infty$ равномерно относительно $t \in I$. Обозначим через $M, r > 0$ постоянные такие, что

$$x\varphi(t, x) > 0, \quad |x| > M \quad \forall t \in I, \quad (10)$$

$$|\varphi(t, x)| \leq r, \quad |x| > M \quad \forall t \in I. \quad (11)$$

Пусть $x(t)$, $t \in I$, есть решение задачи (7)-(9). Найдем априорную оценку.

Умножая (7) на $x(t)$ и дважды интегрируя по частям, получим с учетом (8), (9):

$$\int_0^{\tau} [x''^2(t) + x(t)\varphi(t, x(t))] dt = 0.$$

Обозначим $\sigma(s) = s$, если $|s| \leq 1$, и $\sigma(s) = 1$, если $|s| > 1$. Сделаем следующие преобразования:

$$\int_0^{\tau} \left[x''^2(t) + M\sigma\left(\frac{x(t)}{M}\right)r\sigma\left(\frac{1}{r}\varphi(t, x(t))\right) + \right. \quad (12)$$

$$\left. + x(t)\varphi(t, x(t)) - M\sigma\left(\frac{x(t)}{M}\right)r\sigma\left(\frac{1}{r}\varphi(t, x(t))\right) \right] dt = 0.$$

Второе слагаемое в (12) по модулю меньше или равно Mr , а последние два слагаемых в сумме неотрицательны. Таким образом

из (12) получим:

$$\int_0^{\tau} x''^2(t) dt \leq M r \tau, \quad (13)$$

откуда, с помощью неравенства Гельдера, находим

$$\int_0^{\tau} |x''(t)| dt \leq \tau \sqrt{M r} \quad (14)$$

Используя (8) и (14), найдем

$$|x'(t)| \leq \tau \sqrt{M r} \quad \forall t \in I, \quad (15)$$

так как $x(t)$ удовлетворяет (9), то по теореме Ролля, необходимо существует точка $c \in I_0$, где $x^{IV}(c) = -\varphi(c, x(c)) = 0$, и поэтому из (10), (11) следует $|x(c)| \leq M$.

Таким образом,

$$|x(t)| \leq M + \tau^2 \sqrt{M r} = M_0 \quad \forall t \in I, \quad (16)$$

тем самым априорная оценка установлена.

Докажем теперь существование решения задачи (7)-(9).

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$x^{IV} = -x - \varphi \left(t, M_0 \sigma \left(\frac{x}{M_0} \right) \right) + M_0 \sigma \left(\frac{x}{M_0} \right). \quad (17)$$

Согласно лемме, задача (17), (8), (9) имеет решение. Обозначим его через $x_0(t)$, $t \in I$.

Теперь дословным повторением приведенных выше рассуждений легко показать, что $|x_0(t)| \leq M_0 \quad \forall t \in I$. Так как при этом правые части (17) и (7) совпадают, то $x_0(t)$ есть также решение задачи (7)-(9). Что и требовалось.

Замечание 1. Условие (A) существенно для справедливости теоремы. Так, если $|f(t, y)| \leq N \quad \forall (t, x) \in I \times \mathbb{R}$ и $y(t)$ есть решение (1)-(3), то из (1), (3) следует

$$y'''(t) = y'''(0) - \int_0^t f(s, y(s)) ds.$$

Откуда при $t = \tau$ находим $|b_1 - b_0| \leq N \tau$, т.е. задача (1)-(3) заведомо не имеет решения, если, например, $|b_1 - b_0| > N \tau$.

Замечание 2. Вместо задачи (1)-(3) можно рассмотреть более общую задачу, где f зависит также от y' , y'' , y''' . Тогда вместо уравнения (1) получим

$$y^{IV} = -f(t, y, y', y'', y'''). \quad (18)$$

Предположим, что выполняется условие

$$(A_*) \quad f(t, y, y_1, y_2, y_3)^{+\pm\infty}$$

при $y \rightarrow \pm\infty$ равномерно относительно $t \in I$, $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ и для любого $N > 0$ найдется постоянная $b > 0$ такая, что

$$(B) \quad |f(t, y, y_1, y_2, y_3)| \leq b \left(1 + |y_2|^5 + |y_3|^{5/3} \right)$$

для $t \in I$, $|y| \leq N$, $|y_1| \leq N$, $y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. Тогда решение задачи (18), (2), (3) существует. Действительно, дословным повторением приведенных выше рассуждений мы получим оценки (13)–(16) для функции $x = y - p(t)$, где $p(t)$ — полином четвертой степени, удовлетворяющий (2), (3) и условию $p(0) = 0$. Что же касается оценок для $|x''(t)|$, $|x'''(t)|$, то они следуют из условия (B) и теоремы 1 [6]. После этого доказательство существования завершается, как и прежде.

Литература

1. Беспалова С.А., Клоков Ю.А. // Дифференц.уравнения. 1989. Т.25. N 4. С.573-578.
2. Беспалова С.А., Клоков Ю.А. // Дифференц.уравнения. 1990. Т.26. N 6. С.931-933.
3. Беспалова С.А., Клоков Ю.А. // Дифференц.уравнения. 1992. Т.28. N 9. С.1484-1490.
4. Кигурадзе И.Т. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 1987. Т.30. С.3-103.
5. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига, 1978.
6. Клоков Ю.А. // Дифференц.уравнения. 1987. Т.23. N 4. С.611-618.

Yu.Klokov. Neumann problem for nonlinear ordinary differential equation of fourth order.

Summary. Sufficient conditions for existence of solution of Neumann problem

$$y^{IV} = -f(t, y, y', y'', y'''),$$

$$y'(0) = a_0, \quad y'(\tau) = a_1, \quad y'''(0) = b_0, \quad y'''(\tau) = b_1,$$

are stated, where $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ($i=0,1$).

MSC 34B99.

J.Klokovs. Neimana problēma ceturta kartas parastajam diferenciālvienādojumam.

Iegūti pietiekami atrisinājuma eksistences nosacījumi Neimana problēmai

$$y^{IV} = -f(t, y, y', y'', y''')$$

$$y'(0) = a_0, \quad y'(\tau) = a_1, \quad y'''(0) = b_0, \quad y'''(\tau) = b_1,$$

kur $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ($i=0, 1$).

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, Б.Райня, 29

Поступила 11.04.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А.Я. Лепин

Аннотация. Для краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad H_1 x = 0, \quad H_2 x = 0, \quad H_3 x = 0, \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

где α и β — решения уравнения $x''' = f(t, x, x', x'')$ и $\alpha < \beta$, указаны условия для существования решения.

УДК 517.927

Рассмотрим уравнение

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad (1)$$

где $f: [a, b] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $a \in \mathbb{R}$ и $b \in (a, \infty)$. Пусть $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — решения уравнения (1) такие, что $\alpha < \beta$. Обозначим через S множество $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ решений уравнения (1), удовлетворяющих неравенствам $\alpha \leq x \leq \beta$. Наша цель — получить условия разрешимости для краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad H_1 x = 0, \quad H_2 x = 0, \quad H_3 x = 0, \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad (2)$$

где $H_1, H_2, H_3 \in C(S, \mathbb{R})$. Предварительно подробно изучается разрешимость и поведение решений задачи Дирихле

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad (3)$$

где $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$ и $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$. Множество решений задачи Дирихле (3) обозначим через D_{AB} .

Будем предполагать, что выполняются следующие условия.

1. $D_{\alpha(a)\beta(b)} \neq \emptyset$, $D_{\beta(a)\alpha(b)} \neq \emptyset$.
2. Для любых $c \in [a, b)$ и $d \in (c, b]$ найдется $M \in (0, \infty)$ такое, что для любого решения $x: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1) из $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$, $t \in (c, d)$ следует $|x''(t)| < M$, $t \in (c, d)$.

3. Для любых $c \in [a, b)$, $d \in (c, b]$ и $C, D, C_1, D_1 \in \mathbb{R}$ решение любой из краевой задач

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(c) = C, \quad x'(c) = C_1, \quad x(d) = D,$$

$x''=f(t, x, x', x'')$, $x(c)=C$, $x(d)=D$, $x'(d)=D_1$,
лежащее между α и β , единственно.

4. Для любых $t_* \in [a, b]$ и $A, A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ решение задачи Коши

$x''=f(t, x, x', x'')$, $x(t_*)=A$, $x'(t_*)=A_1$, $x''(t_*)=A_2$,
лежащее между α и β , единственно.

Условия 1, 2 и 4 в каком-то смысле являются естественными. Основой всего доказательства разрешимости краевой задачи (2) является условие 3, однако, его естественность не ясна. Существование из единственности подробно изучалось для уравнения второго порядка (см. [1]). Единственность краевых задач используется и при исследовании разрешимости краевых задач для уравнения третьего порядка (см. [2]).

Пусть $\sigma, \tau \in [a, b]$,

$$M_{\alpha\sigma} = \left\{ y \in S : y(\sigma) = \alpha(\sigma) \wedge y'(\sigma) = \alpha'(\sigma) \right\},$$

$$M_{\beta\tau} = \left\{ z \in S : z(\tau) = \beta(\tau) \wedge z'(\tau) = \beta'(\tau) \right\},$$

$$M_{\alpha} = \left\{ y \in M_{\alpha\sigma} : \sigma \in [a, b] \right\}, \quad M_{\beta} = \left\{ z \in M_{\beta\tau} : \tau \in [a, b] \right\}.$$

Если $y \in M_{\alpha\sigma}$, $y(a) = A$, $y(b) = B$ и $y'(\sigma) = v$, то обозначим $Y = Y_{A\sigma} = Y_{\sigma v} = Y_{\sigma B} = Y_{AB}$. Если $z \in M_{\beta\tau}$, $z(a) = A$, $z(b) = B$ и $z'(\tau) = v$, то обозначим $Z = Z_{A\tau} = Z_{\tau v} = Z_{\tau B} = Z_{AB}$. Ясно, что однозначно определяются своими параметрами $Y_{\sigma v}$ и $Z_{\tau v}$, $Y_{A\sigma}$, если $\sigma \neq a$, $Z_{A\tau}$, если $\tau \neq a$, $Y_{\sigma B}$, если $\sigma \neq b$, и $Z_{\tau B}$, если $\tau \neq b$. Далее будет показано, что однозначно определяются своими параметрами Y_{AB} и Z_{AB} , σ_{AB} , если $A \neq \alpha(a)$ или $B \neq \alpha(b)$, τ_{AB} , если $A \neq \beta(a)$ или $B \neq \beta(b)$.

Лемма 1. Если $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$ и $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$, то существуют решения краевых задач

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = \alpha(a), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x(b) = B, \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad (4)$$

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = \beta(a), \quad x'(a) = \beta'(a), \quad x(b) = B, \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad (5)$$

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = A, \quad x(b) = \alpha(b), \quad x'(b) = \alpha'(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad (6)$$

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = A, \quad x(b) = \beta(b), \quad x'(b) = \beta'(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta. \quad (7)$$

Доказательство. Докажем разрешимость краевой задачи (4).

Пусть $s \in D_{\alpha(a)\beta(b)}$. Из условий 2 и 3 следует, что найдется $v \in \mathbb{R}$ такое, что $Y_{av} \leq s$ и $Y_{av}(b) = \beta(b)$. Теперь из непрерывной зависимости следует существование решения краевой задачи (4).

Аналогично доказывается разрешимость краевых задач (5)–(7).

Замечание 1. Условие 1 используется только для доказательства леммы 1, из которой оно следует. Поэтому условие 1 можно заменить любым другим условием, из которого следует лемма 1. Например, условием $M_\alpha \cap M_\beta = \emptyset$.

Замечание 2. Для любых $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$ и $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ из леммы 1 и условия 3 следует существование и единственность $Y_{\alpha(a)B}$, $Z_{\beta(a)B}$, $Y_{A\alpha(b)}$ и $Z_{A\beta(b)}$.

Лемма 2. Если $s \in S \setminus M_\alpha$, то найдется $A_1 \in (-\infty, s'(a))$ такое, что существует решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = s(a), \quad x'(a) = A_1, \quad x(b) = s(b), \quad \alpha \leq x \leq s. \quad (8)$$

Если $s \in S \setminus M_\beta$, то найдется $A_1 \in (s'(a), \infty)$ такое, что существует решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = s(a), \quad x'(a) = A_1, \quad x(b) = s(b), \quad s \leq x \leq \beta.$$

Доказательство. Пусть $s \in S \setminus M_\alpha$. Если $s(a) = \alpha(a)$ и $s(b) = \alpha(b)$, то $A_1 = \alpha'(a)$ и α является решением краевой задачи (8). Рассмотрим случай, когда $s(b) > \alpha(b)$. Выберем $A_2 \in (-\infty, s''(a))$ достаточно близким к $s''(a)$. Тогда решение s_1 задачи Коши

$$x'' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = s(a), \quad x'(a) = s'(a), \quad x''(a) = A_2$$

удовлетворяет условию $\alpha(t) < s_1(t) < s(t)$, $t \in (a, b)$. Выберем $A_1 \in (-\infty, s'(a))$ так, чтобы решение s_2 задачи Коши

$$x'' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = s(a), \quad x'(a) = A_1, \quad x''(a) = A_2$$

удовлетворяло неравенствам $\alpha \leq s_2 \leq s$. Рассмотрим решения x_V задач Коши

$$x'' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = s(a), \quad x'(a) = A_1, \quad x''(a) = v.$$

Ясно, что найдется $v \in [s_2''(a), \infty)$ такое, что x_V является решением краевой задачи (8). Случай, когда $s(b) = \alpha(b)$ и $s(a) > \alpha(a)$, рассматривается аналогично.

Случай, когда $s \in S \setminus M_\beta$, рассматривается аналогично.

Лемма 3. Пусть $y, z \in S$, $y(a) = z(a)$, $y(b) = z(b)$ и $y \leq z$. Тогда для любого $U \in [y'(a), z'(a)]$ найдется единственное $s_U \in S$ такое, что $y \leq s_U \leq z$ и $s'_U(a) = U$. Для любых $U, V \in [y'(a), z'(a)]$ из $U < V$ следует $s_U(t) < s_V(t)$, $t \in (a, b)$. Решение s_U непрерывно зависит от U .

Доказательство. Пусть $U \in [y'(a), z'(a)]$. Рассмотрим решения x_V задач Коши

$$x'' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = y(a), \quad x'(a) = U, \quad x''(a) = v.$$

Из условий 2 и 3 следует существование v такого, что $y \leq x_V \leq z$.

Ясно, что $y(t) < x_v(t) < z(t)$, $t \in (a, b)$. Из компактности множества решений задачи Дирихле $D_{y(a)y(b)}$ и условия 3 следует непрерывная зависимость s_u от U .

Лемма 4. $M_\alpha \cap M_\beta \subset D_{\alpha(a)\beta(b)} \cup D_{\beta(a)\alpha(b)}$.

Доказательство. Пусть $\sigma, \tau \in [a, b]$ и $s \in M_{\alpha\sigma} \cap M_{\beta\tau}$. Рассмотрим случай, когда $\sigma < \tau$. Нужно доказать, что $\sigma = a$ и $\tau = b$. Решение $Y_{\alpha\beta(b)}$ существует по лемме 1. Если $\sigma = a$, то из $s(\tau) \geq Y_{\alpha\beta(b)}(\tau)$ и $s(b) \leq Y_{\alpha\beta(b)}(b)$ следует существование $t \in [\tau, b]$ такого, что $s(t) = Y_{\alpha\beta(b)}(t)$. Из условия 3 следует, что $s = Y_{\alpha\beta(b)}$ и $\tau = b$. Пусть $\sigma > a$. Из компактности $M_\alpha \cap M_\beta$ следует существование $\sigma_1 \in [a, b]$ и $\tau_1 \in (\sigma_1, b]$ таких, что $M_{\alpha\sigma_1} \cap M_{\beta\tau_1} \neq \emptyset$, и для любых $\sigma_2 \in [a, b]$, $\tau_2 \in (\sigma_2, b]$ из $M_{\alpha\sigma_2} \cap M_{\beta\tau_2} \neq \emptyset$ следует $\tau_1 \leq \tau_2$. Покажем, что $\tau_1 < b$. Для $\tau_3 \in (a, \tau)$ достаточно близкого к τ рассмотрим решения x_v задач Коши

$$x'' = f(t, x, x', x''), \quad x(\tau_3) = \beta(\tau_3), \quad x'(\tau_3) = \beta'(\tau_3), \quad x''(\tau_3) = v.$$

Ясно, что найдутся v и $\sigma_3 \in (a, \tau_3)$ такие, что $x_v(\sigma_3) = \alpha(\sigma_3)$, $x'_v(\sigma_3) = \alpha'(\sigma_3)$ и $\alpha(t) \leq x_v(t) \leq \beta(t)$, $t \in [\sigma_3, \tau_3]$. Следовательно, $x_v \in S$ и $\tau_1 < b$. Если $\sigma_1 > a$, то предыдущее рассуждение приводит к противоречию с определением τ_1 . Если $\sigma_1 = a$, то $M_{\alpha\sigma_1} \cap M_{\beta\tau_1} = \{Y_{\alpha\beta(b)}\}$, что противоречит неравенству $\tau_1 < b$.

Случай, когда $\sigma > \tau$, рассматривается аналогично.

Лемма 5. Если $A \in \{\alpha(a), \beta(a)\}$ или $B \in \{\alpha(b), \beta(b)\}$, то множество решений задачи Дирихле D_{AB} имеет минимальное решение Y_{AB} и максимальное решение Z_{AB} .

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $A = \alpha(a)$. По замечанию 2 существует единственное решение $Y_{\alpha(a)B}$. Покажем, что $Y_{\alpha(a)B}$ является минимальным решением. Если $B = \alpha(b)$, то $Y_{\alpha(a)\alpha(b)} = \alpha$ и это очевидно. Пусть $B > \alpha(b)$. Для $x \in D_{\alpha(a)B}$ из условия 3 следует, что $x(t) > \alpha(t)$, $t \in (a, b)$. Рассмотрим $Y_{\alpha a'}$. Из условия 3 следует, что $x(t) > Y_{\alpha a'}(t)$, $v \in [\alpha''(a), Y''_{\alpha(a)B}(a)]$, $t \in (a, b)$. Следовательно, $x \geq Y_{\alpha(a)B}$. Из компактности $D_{\alpha(a)B}$ следует существование $Z \in D_{\alpha(a)B}$ такого, что для любого решения $x \in D_{\alpha(a)B}$ справедливо неравенство $Z'(a) \geq x'(a)$. Из минимальности $Y_{\alpha(a)B}$ определения Z , условия 3 и леммы 3 следует, что

$$D_{\alpha(a)\beta} = \{x \in S: Y_{\alpha(a)\beta} \leq x \leq z\}.$$

Ясно, что z — максимальное решение, а из леммы 2 следует, что $z = z_{\alpha(a)\beta}$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Замечание 3. Для любых $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$ и $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ из леммы 5 следует существование и единственность $Y_{\beta(a)\beta}, \sigma_{\beta(a)\beta}, Y_{\beta(a)\beta}, \sigma_{\beta(a)\beta}, Z_{\alpha(a)\beta}, \tau_{\alpha(a)\beta}, Z_{\alpha(a)\beta}$ и $\tau_{\alpha(a)\beta}$.

Лемма 6. Для любого $\sigma \in [a, b]$ найдется $v_\sigma \in (\alpha''(\sigma), \infty)$ такое, что $Y_{\sigma v_\sigma}$ существует для $v \in [\alpha''(\sigma), v_\sigma]$, $Y_{\sigma v_\sigma}(a) < \beta(a)$, $Y_{\sigma v_\sigma}(b) = \beta(b)$, $Y'_{\sigma v_\sigma}(b) < Y'_{\beta(a)\beta(b)}(b)$, $\sigma \in [a, \sigma_{\beta(a)\beta(b)})$ и $Y_{\sigma v_\sigma}(a) = \beta(a)$, $Y'_{\sigma v_\sigma}(a) > Y'_{\beta(a)\beta(b)}(a)$, $Y_{\sigma v_\sigma}(b) < \beta(b)$, $\sigma \in (\sigma_{\beta(a)\beta(b)}, b]$. Аналогично для любого $\tau \in [a, b]$ найдется $v_\tau \in (-\infty, \beta''(\tau))$ такое, что $Z_{\tau v_\tau}$ существует для $v \in [v_\tau, \beta''(\tau)]$, $Z_{\tau v_\tau}(a) > \alpha(a)$, $Z_{\tau v_\tau}(b) = \alpha(b)$, $Z'_{\tau v_\tau}(b) > Z'_{\alpha(a)\alpha(b)}(b)$, $\tau \in [a, \tau_{\alpha(a)\alpha(b)})$ и $Z_{\tau v_\tau}(a) = \alpha(a)$, $Z'_{\tau v_\tau}(a) < Z'_{\alpha(a)\alpha(b)}(a)$, $Z_{\tau v_\tau}(b) > \alpha(b)$, $\tau \in (\tau_{\alpha(a)\alpha(b)}, b]$.

Доказательство. Из условия 2 следует существование $v_\sigma \in (\alpha''(\sigma), \infty)$ такого, что $Y_{\sigma v_\sigma}$ существует, и найдется $\tau \in [a, b]$ такое, что $Y_{\sigma v_\sigma}(\tau) = \beta(\tau)$. Из $\tau \in (a, b)$ следует $Y'_{\sigma v_\sigma}(\tau) = \beta'(\tau)$, что противоречит лемме 4. Если $Y_{\sigma v_\sigma}(a) = \beta(a)$ и $Y_{\sigma v_\sigma}(b) = \beta(b)$, то из единственности $Y_{\beta(a)\beta(b)}$ следует $\sigma = \sigma_{\beta(a)\beta(b)}$. Рассмотрим случай, когда $\sigma \in [a, \sigma_{\beta(a)\beta(b)})$. Если $Y_{\sigma v_\sigma}(a) = \beta(a)$ и $Y_{\sigma v_\sigma}(b) < \beta(b)$, то $Y'_{\sigma v_\sigma}(a) < Y'_{\beta(a)\beta(b)}(a)$ и $Y_{\sigma v_\sigma}$ с $Y_{\beta(a)\beta(b)}$ имеет не менее трех точек пересечения, а $Y_{\sigma v_\sigma}$ с β имеет одну точку пересечения. Но все решения из $D_{\beta(a)\beta(b)}$ имеют с $Y_{\sigma v_\sigma}$ одинаковое число точек пересечения. Следовательно, $Y_{\sigma v_\sigma}(a) < \beta(a)$ и $Y_{\sigma v_\sigma}(b) = \beta(b)$. Ясно, что $Y'_{\sigma v_\sigma}(b) \neq Y'_{\beta(a)\beta(b)}(b)$. Если $Y'_{\sigma v_\sigma}(b) > Y'_{\beta(a)\beta(b)}(b)$, то $Y_{\sigma v_\sigma}$ с $Y_{\beta(a)\beta(b)}$ имеют не менее трех точек пересечения, а $Y_{\sigma v_\sigma}$ с β имеет одну точку пересечения. Но все решения из $D_{\beta(a)\beta(b)}$ имеют с $Y_{\sigma v_\sigma}$ одинаковое число точек

пересечения.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Лемма 7. Если $\lambda \in (\alpha(a), \beta(a))$, то $y_{A\sigma}$ для $\sigma \in [a, \sigma_{AB(b)})$ не существует, для любого $\sigma \in [\sigma_{AB(b)}, b]$ существует $y_{A\sigma}$ и непрерывно зависит от σ .

Если $\lambda \in [\alpha(a), \beta(a))$, то $z_{A\tau}$ для $\tau \in [a, \tau_{A\alpha(b)})$ не существует, для любого $\tau \in [\tau_{A\alpha(b)}, b]$ существует $z_{A\tau}$ и непрерывно зависит от τ .

Если $\lambda \in (\alpha(b), \beta(b))$, то $y_{\sigma B}$ для $\sigma \in (\sigma_{\beta(a)B}, b]$ не существует, для любого $\sigma \in [a, \sigma_{\beta(a)B}]$ существует $y_{\sigma B}$ и непрерывно зависит от σ .

Если $\lambda \in [\alpha(b), \beta(b))$, то $z_{\tau B}$ для $\tau \in (\tau_{\alpha(a)B}, b]$ не существует, для любого $\tau \in [a, \tau_{\alpha(a)B}]$ существует $z_{\tau B}$ и непрерывно зависит от τ .

Доказательство. Пусть $\sigma \in (a, b] \setminus \{\sigma_{AB(b)}\}$. Рассмотрим решения $y_{\sigma V}$. Из леммы 6 следует существование $v_A \in [\alpha''(\sigma), v_\sigma]$ такого, что $y_{\sigma V_A}(a) = \lambda$, $y_{\sigma V_A}(b) < \beta(b)$ или $y_{\sigma V_A}(a) < \lambda$, $y_{\sigma V_A}(b) = \beta(b)$. Покажем, что случай, когда $y_{\sigma V_A}(a) = \lambda$ и $\sigma \in (a, \sigma_{AB(b)})$, невозможен. Действительно, тогда $y_{\sigma V_A}$ и $y_{AB(b)}$ имеют три точки пересечения. Следовательно, все решения из $D_{AB(b)}$ имеют с $y_{\sigma V_A}$ три точки пересечения и $\lambda < \beta(a)$. Ясно, что найдется $A_2 \in (z'_{AB(b)}(a), \infty)$ и $b_x \in (a, b)$ такие, что решение $x: [a, b_x] \rightarrow \mathbb{R}$ задачи Коши

$$x'' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = \lambda, \quad x'(a) = z'_{AB(b)}(a), \quad x''(a) = A_2$$

удовлетворяет условиям $z_{AB(b)}(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$, $t \in [a, b_x]$, $x(b_x) = y_{\sigma V_A}(b_x)$ и $x'(b_x) = y'_{\sigma V_A}(b_x)$, что противоречит условию 3. Аналогично показывается, что случай, когда $y_{\sigma V_A}(a) < \lambda$, $y_{\sigma V_A}(b) = \beta(b)$ и $\sigma \in (\sigma_{AB(b)}, b]$, невозможен. Следовательно, $y_{A\sigma}$ существует для $\sigma \in [\sigma_{AB(b)}, b]$. Непрерывная зависимость $y_{A\sigma}$ от σ очевидна.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Лемма 8. Для любых $\lambda \in (\alpha(a), \beta(a))$ и $\lambda \in (\alpha(b), \beta(b))$ существуют единственные y_{AB} и z_{AB} , удовлетворяющие неравенству $y_{AB} \leq z_{AB}$ и непрерывно зависящие от AB . Функции $y_{A\sigma}(b)$, $\sigma \in [\sigma_{AB(b)}, b]$,

$z'_{\lambda\tau}(a)$, $t \in [\tau_{\lambda\alpha(b)}, b]$ при $\lambda \neq \alpha(a)$ строго убывают, а функции $z_{\lambda\tau}(b)$, $t \in [\tau_{\lambda\alpha(b)}, b]$, $y'_{\lambda\sigma}(a)$, $\sigma \in [\sigma_{\lambda\beta(b)}, b]$ при $\lambda \neq \alpha(b)$ строго возрастают.

Доказательство. Для $\lambda \in \{\alpha(a), \beta(a)\}$ или $\beta \in \{\alpha(b), \beta(b)\}$ существование $y_{\lambda\beta}$, $z_{\lambda\beta}$, единственность и неравенство $y_{\lambda\beta} \leq z_{\lambda\beta}$ следуют из леммы 5. Рассмотрим случай, когда $\lambda \in \{\alpha(a), \beta(a)\}$ и $\beta \in \{\alpha(b), \beta(b)\}$. Существование $y_{\lambda\beta}$ и $z_{\lambda\beta}$ следует из леммы 7. Если $y_{\lambda\sigma}(b)$ и $z_{\lambda\tau}(b)$ строго монотонны, то единственность $y_{\lambda\beta}$ и $z_{\lambda\beta}$ очевидна. Пусть $\sigma_1 \in [\sigma_{\lambda\beta(b)}, b]$ и $\tau_1 \in [\tau_{\lambda\alpha(b)}, b]$ такие, что $y_{\lambda\sigma}(b)$ строго монотонна на $[\sigma_{\lambda\beta(b)}, \sigma_1]$, $z_{\lambda\tau}(b)$ строго монотонна на $[\tau_1, b]$ и $y_{\lambda\sigma_1}(b) = z_{\lambda\tau_1}(b)$. Из леммы 5 имеем $y'_{\lambda\beta(b)}(a) < z'_{\lambda\beta(b)}(a)$, $y'_{\lambda\beta(b)}(b) > z'_{\lambda\beta(b)}(b)$ и $y_{\lambda\beta(b)} \leq z_{\lambda\beta(b)}$. Из условия 3 следует, что для $\sigma \in [\sigma_{\lambda\beta(b)}, \sigma_1]$ и $t \in [\tau_1, b]$ из $y_{\lambda\sigma}(b) = z_{\lambda\tau}(b)$ следует $y'_{\lambda\sigma}(a) < z'_{\lambda\tau}(a)$, $y'_{\lambda\sigma}(b) > z'_{\lambda\tau}(b)$ и $y_{\lambda\sigma} \leq z_{\lambda\tau}$. Если $\sigma_1 \neq b$, то $\tau_1 \neq \tau_{\lambda\alpha(b)}$ и для $\sigma \in (\sigma_1, b)$ достаточно близких к σ_1 , $t \in (\tau_{\lambda\alpha(b)}, \tau_1)$ достаточно близких к τ_1 из $y_{\lambda\sigma}(b) = z_{\lambda\tau}(b)$ следует $y'_{\lambda\sigma}(a) < z'_{\lambda\tau}(a)$, $y'_{\lambda\sigma}(b) > z'_{\lambda\tau}(b)$ и $y_{\lambda\sigma} \leq z_{\lambda\tau}$. Из леммы 3 получается локальная строгая монотонность $y_{\lambda\sigma}(b)$ в окрестности точки σ_1 и $z_{\lambda\tau}$ в окрестности точки τ_1 . Следовательно, максимальное значение $\sigma_1 = b$, а минимальное значение $\tau_1 = \tau_{\lambda\alpha(b)}$. Теперь непрерывная зависимость $y_{\lambda\beta}$ и $z_{\lambda\beta}$ следует из единственности. Докажем строгое возрастание $y'_{\lambda\sigma}(a)$. Предположим противное. Тогда найдутся $\sigma_1 \in [\sigma_{\lambda\beta(b)}, b]$ и $\sigma_2 \in (\sigma_1, b)$ такие, что $y'_{\lambda\sigma_1}(a) \geq y'_{\lambda\sigma_2}(a)$. Если $y'_{\lambda\sigma_1}(a) = y'_{\lambda\sigma_2}(a)$, то из условия 3 следует $y_{\lambda\sigma_1} = y_{\lambda\sigma_2}$, что невозможно. Пусть $y'_{\lambda\sigma_1}(a) > y'_{\lambda\sigma_2}(a)$. Из условия 3 и непрерывности $y_{\lambda\sigma}$ следует $y'_{\lambda\sigma_{\lambda\beta(b)}}(a) > y'_{\lambda\beta}(a)$. Тогда $y_{\lambda\sigma_{\lambda\beta(b)}} = y_{\lambda\beta(b)}$ и $y_{\lambda\beta}$ имеют не менее трех точек пересечения. Следовательно, $y_{\lambda\beta}$ и $z_{\lambda\beta(b)}$ имеют не менее трех точек пересечения. Но тогда найдутся $\lambda_2 \in (z_{\lambda\beta(b)}^*, a)$ и $b_x \in (a, b)$ такие, что решение $x: [a, b_x] \rightarrow \mathbb{R}$ задачи Коши

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = \lambda, \quad x'(a) = z'_{\lambda\beta(b)}(a), \quad x''(a) = \lambda_2$$

удовлетворяет условиям $z_{\lambda\beta(b)}(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$, $t \in [a, b_x]$, $x(b_x) = y_{\lambda\beta}(b_x)$ и $x'(b_x) = y'_{\lambda\beta}(b_x)$, что противоречит условию 3. Строгое убывание $z'_{\lambda\tau}(a)$ доказывается аналогично.

Теорема 1. Для любых $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$ и $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ множество решений задачи Дирихле D_{AB} имеет минимальное решение Y_{AB} , максимальное решение Z_{AB} , для любого $U \in [Y'_{AB}(a), Z'_{AB}(a)]$ найдется единственное $s_{ABU} \in D_{AB}$ такое, что $s'_{ABU}(a) = U$ и

$$D_{AB} = \left\{ s_{ABU} : U \in [Y'_{AB}(a), Z'_{AB}(a)] \right\}. \quad (9)$$

Решения Y_{AB} и Z_{AB} непрерывно зависят от AB , а решение s_{ABU} непрерывно зависит от ABU .

Доказательство. В случае, когда $A \in \{\alpha(a), \beta(a)\}$ или $B \in \{\alpha(b), \beta(b)\}$, из леммы 5 следует существование и минимальность Y_{AB} , существование и максимальность Z_{AB} , а из леммы 3 условие (9). Пусть $A \in (\alpha(a), \beta(a))$ и $B \in (\alpha(b), \beta(b))$. Из лемм 3 и 8 следует существование Y_{AB} , Z_{AB} , неравенство $Y_{AB} \leq Z_{AB}$ и

$$M \left\{ s_{ABU} : U \in (Y'_{AB}(a), Z'_{AB}(a)) \right\} \subset D_{AB}.$$

Пусть $x \in D_{AB} \setminus M$. Тогда $x'(a) < Y'_{AB}(a)$ или $x'(a) > Z'_{AB}(a)$. Рассмотрим случай, когда $x'(a) < Y'_{AB}(a)$. Из компактности D_{AB} следует существование $s \in D_{AB}$ с минимальным значением производной в точке a . Из леммы 2 следует, что найдется $\sigma \in (a, b)$ такое, что $s(\sigma) = \alpha(\sigma)$ и $s'(\sigma) = \alpha'(\sigma)$. Но это противоречит единственности Y_{AB} . Случай, когда $x'(a) > Z'_{AB}(a)$, рассматривается аналогично. Непрерывная зависимость Y_{AB} и Z_{AB} следует из леммы 8, а s_{ABU} следует из единственности.

Пусть $H \in C(S, \mathbb{R})$. Из теоремы 1 получаем следующие условия разрешимости краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad Hx = 0. \quad (10)$$

Теорема 2. Если $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$, $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$, $H Y_{AB} \leq 0$ и $H Z_{AB} \geq 0$, то краевая задача (10) имеет решение.

Теорема 3. Если $H y \leq 0$ для любого $y \in M_\alpha$ и $H z \geq 0$ для любого $z \in M_\beta$, то для любых $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$ и $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ краевая задача (10) имеет решение.

Теорема 4. Если для любого $x \in S$ из $x(b) = \alpha(b)$ следует $Hx \leq 0$ и из $x(b) = \beta(b)$ следует $Hx \geq 0$, то для любых $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$ и $A_1 \in [Y'_{\alpha(b)}(a), Z'_{\beta(b)}(a)]$ краевая задача

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = A, \quad x'(a) = A_1, \quad Hx = 0, \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

имеет решение.

Доказательство. Если $Y'_{A\alpha(b)}(a) \leq Z'_{A\beta(b)}(a)$, то из леммы 8 следует $Y'_{A\beta(b)}(a) < Y'_{A\alpha(b)}(a)$ и $Z'_{A\beta(b)}(a) < Z'_{A\alpha(b)}(a)$. Следовательно, $S_{A\alpha(b)A_1}$ и $S_{A\beta(b)A_1}$ существуют, $Y_{A\alpha(b)} \leq S_{A\alpha(b)A_1} \leq \beta$, $\alpha \leq S_{A\beta(b)A_1} \leq Z_{A\beta(b)}$, $H S_{A\alpha(b)A_1} \leq 0$, $H S_{A\beta(b)A_1} \geq 0$ и $S_{A\alpha(b)A_1} \leq S_{A\beta(b)A_1}$. Следовательно, найдется $A_2 \in [S'_{A\alpha(b)A_1}(a), S'_{A\beta(b)A_1}(a)]$ такое, что решение $x: [a, b] \rightarrow R$ задачи Коши

$$x'' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = A, \quad x'(a) = A_1, \quad x''(a) = A_2$$

лежит между α и β и удовлетворяет условию $Hx = 0$.

Теорема 5. Если для любого $x \in S$ из $x(a) = \alpha(a)$ следует $Hx \leq 0$ и из $x(a) = \beta(a)$ следует $Hx \geq 0$, то для любых $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ и $B_1 \in [Z'_{\beta(a)B}(b), Y'_{\alpha(a)B}(b)]$ краевая задача

$$x'' = f(t, x, x', x''), \quad x(b) = B, \quad x'(b) = B_1, \quad Hx = 0, \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

имеет решение.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.

Теоремы 3, 4 и 5 наводят на мысль о справедливости следующего результата.

Основная теорема. Если $H_1, H_2, H_3 \in C(S, R)$ и для любого $x \in S$ справедливы следующие условия:

$$\begin{aligned} x(a) = \alpha(a) &\Rightarrow H_1 x \leq 0, & x(a) = \beta(a) &\Rightarrow H_1 x \geq 0, \\ x(b) = \alpha(b) &\Rightarrow H_2 x \leq 0, & x(b) = \beta(b) &\Rightarrow H_2 x \geq 0, \\ x \in M_\alpha &\Rightarrow H_3 x \leq 0, & x \in M_\beta &\Rightarrow H_3 x \geq 0, \end{aligned}$$

то краевая задача

$$x'' = f(t, x, x', x''), \quad H_1 x = 0, \quad H_2 x = 0, \quad H_3 x = 0, \quad \alpha \leq x \leq \beta \quad (11)$$

имеет решение.

Доказательство. Теорема 1 дает отображение множества решений S во множество

$$K = \left\{ (A, B, U) : A \in [\alpha(a), \beta(a)] \wedge B \in [\alpha(b), \beta(b)] \wedge U \in [Y'_{AB}(a), Z'_{AB}(a)] \right\}.$$

Гомеоморфизм между K и S обозначим через $F: K \rightarrow S$ и пусть $h_i = H_i F$, $i=1, 2, 3$. Ясно, что

$$h_1(\alpha(a), \cdot, \cdot) \leq 0, \quad h_1(\beta(a), \cdot, \cdot) \geq 0,$$

$$h_2(\cdot, \alpha(b), \cdot) \leq 0, \quad h_2(\cdot, \beta(b), \cdot) \geq 0,$$

$$h_3(A, B, y'_{AB}(a)) \leq 0, \quad h_3(A, B, z'_{AB}(a)) \geq 0.$$

Следовательно, найдутся A, B, U такие, что $h_i(A, B, U) = 0$, $i = 1, 2, 3$ (см. [3], стр. 64). Ясно, что $x = F(A, B, U)$ является решением краевой задачи (11).

Лемма 9. Пусть $\sigma_1 \in [a, b)$, $\sigma_2 \in (\sigma_1, b]$, $y_1 \in M_{\alpha\sigma_1} \setminus \{\alpha\}$ и $y_2 \in M_{\alpha\sigma_2} \setminus \{\alpha\}$. Если $y_1(a) < y_2(a)$ и $y_1(b) > y_2(b)$, то y_1 и y_2 имеют одну точку пересечения. Если условия $y_1(a) < y_2(a)$ и $y_1(b) > y_2(b)$ не выполняются, то y_1 и y_2 имеют две точки пересечения. Пусть $\tau_1 \in [a, b)$, $\tau_2 \in (\tau_1, b]$, $z_1 \in M_{\beta\tau_1} \setminus \{\beta\}$ и $z_2 \in M_{\beta\tau_2} \setminus \{\beta\}$. Если $z_1(a) > z_2(a)$ и $z_1(b) < z_2(b)$, то z_1 и z_2 имеют одну точку пересечения. Если условия $z_1(a) > z_2(a)$ и $z_1(b) < z_2(b)$ не выполняются, то z_1 и z_2 имеют две точки пересечения.

Доказательство. Если $\sigma_1 = a$, то для $v \in (\alpha''(\sigma_2), \alpha)$ достаточно близкого к $\alpha''(\sigma_2)$ решения y_1 и $y_{\sigma_2 v}$ имеют одну точку пересечения. Следовательно, при $y_1(b) > y_2(b)$ решения y_1 и y_2 имеют одну точку пересечения, а при $y_1(b) \leq y_2(b)$ две точки пересечения. Пусть $\sigma_1 > a$ и $v \in (\alpha''(\sigma_2), \alpha)$ достаточно близко к $\alpha''(\sigma_2)$. Тогда y_1 и y_2 имеют две точки пересечения. Если $y_1(a) \geq y_2(a)$, то из леммы 8 следует $y_1(b) > y_2(b)$ и y_1 и y_2 имеют две точки пересечения. Если $y_1(a) < y_2(a)$ и $y_1(b) > y_2(b)$, то y_1 и y_2 имеют одну точку пересечения. Если $y_1(a) > y_2(a)$ и $y_1(b) \leq y_2(b)$, то y_1 и y_2 имеют две точки пересечения.

Аналогично получается доказательство для z_1 и z_2 .

Лемма 10. Пусть $y, z \in S$. Если $y(a) = z(a)$, $y'(a) \leq z'(a)$, $y(b) < z(b)$ или $y(a) < z(a)$, $y(b) = z(b)$, $y'(b) \geq z'(b)$, то y и z имеют одну точку пересечения. Если $y(a) = z(a)$, $y'(a) < z'(a)$, $y(b) > z(b)$ или $y(a) > z(a)$, $y(b) = z(b)$, $y'(b) > z'(b)$, то y и z имеют две точки пересечения.

Доказательство. Если $y(a) = z(a)$, $y'(a) = z'(a)$ и $y(b) < z(b)$, то неравенство $y(t) < z(t)$, $t \in [a, b]$, очевидно. Пусть $y(a) = z(a)$ и $y'(a) < z'(a)$. Тогда $y'_{y(a)y(b)}(a) \leq y'(a) < z'(a) \leq z'_{z(a)z(b)}(a)$ и количество точек пересечения $y_{y(a)y(b)}$ и $z_{z(a)z(b)}$ совпадает с

количеством точек пересечения y и z . Ясно, что $Y_{y(a)y(b)}(t) < z_{z(a)z(b)}(t)$, $t \in (a, b)$. Если $y(b) < z(b)$, то из леммы 8 следует $Y_{y(a)y(b)}(t) < z_{z(a)z(b)}(t)$, $t \in (a, b]$. Если $y(b) > z(b)$, то из леммы 8 следует, что $Y_{y(a)y(b)}$ и $z_{z(a)z(b)}$ имеют две точки пересечения.

Лемма 11. Если $y, z \in S$, $y(a) < z(a)$ и $y(b) > z(b)$, то y и z имеют одну точку пересечения.

Доказательство. Ясно, что y и z имеют одинаковое с $Y_{y(a)y(b)}$ и $z_{z(a)z(b)}$ количество точек пересечения. Если $\sigma_{Y_{y(a)y(b)}} > \sigma_{z_{z(a)z(b)}}$, то количество точек пересечения $Y_{y(a)y(b)}$ и $z_{z(a)z(b)}$ не менее трех, что противоречит лемме 9. Если $\sigma_{Y_{y(a)y(b)}} = \sigma_{z_{z(a)z(b)}}$, то из $y(a) < z(a)$ следует $y(b) < z(b)$, что противоречит условиям леммы. Следовательно, $\sigma_{Y_{y(a)y(b)}} < \sigma_{z_{z(a)z(b)}}$. Из леммы 9 следует, что $Y_{y(a)y(b)}$ и $z_{z(a)z(b)}$ имеют одну точку пересечения.

Лемма 12. Если $y, z \in S$, $y(a) < z(a)$ и $y(b) < z(b)$, то y и z имеют не более двух точек пересечения.

Доказательство. Пусть $t_* \in (a, b)$ такое, что $y(t_*) = z(t_*)$ и $y(t) < z(t)$, $t \in [a, t_*)$. Если $y'(t_*) = z'(t_*)$, то из условия 3 следует $y(t) < z(t)$, $t \in [t_*, b]$. Если $y'(t_*) > z'(t_*)$, то, применяя лемму 10, на интервале $[t_*, b]$ получаем, что y и z имеют две точки пересечения.

Лемма 13. Если $y, z \in S$ и $y \neq z$, то y и z имеют не более двух точек пересечения.

Доказательство. Если $y(a) = z(a)$ и $y(b) = z(b)$, то из теоремы 1 следует, что y и z имеют две точки пересечения. Если $y(a) = z(a)$ и $y(b) \neq z(b)$, то из леммы 10 следует, что y и z имеют не более двух точек пересечения. Если $y(a) \neq z(a)$ и $y(b) \neq z(b)$, то из лемм 11 и 12 следует, что y и z имеют не более двух точек пересечения.

Теорема 6. Если $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$, $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$, $A_1 \in [\beta'(a), \alpha'(a)]$, $B_1 \in [\alpha'(b), \beta'(b)]$, $c \in (a, b)$ и

$$C \in [Y_{\alpha(a)\beta(b)}(c), z_{\alpha(a)\beta(b)}(c)] \cap [Y_{\beta(a)\alpha(b)}(c), z_{\beta(a)\alpha(b)}(c)],$$

то краевые задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = A, \quad x(c) = C, \quad x(b) = B, \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x'(a) = A_1, \quad x(c) = C, \quad x(b) = B, \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x'(a) = A_1, \quad x(c) = C, \quad x'(b) = B_1, \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

имеют решение.

Доказательство. Из леммы 9 следует, что для любых $y \in M_\alpha$ и $z \in M_\beta$ справедливы неравенства $y(c) \leq C \leq z(c)$. Остальные условия основной теоремы очевидны.

Литература

1. Bailey P.B., Shampine L.F. // J.Mat.Anal.Appl. 1969. V.25, N 3. P.569-574.
2. Das K.M., Lalli B.S. // J.Mat.Anal.Appl. 1981. V.81. P.300-307.
3. Гуревич В., Волман Ч. Теория размерности. М.: ИЛ, 1948. 232 с.

A.Lepin. Boundary value problem for third order equation.

Summary. For boundary value problem

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad H_1 x = 0, \quad H_2 x = 0, \quad H_3 x = 0, \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

where α and β are solutions of the equation $x''' = f(t, x, x', x'')$ and $\alpha < \beta$, conditions are given for the existence of a solution. 1991 MSC 34B15

A.Lepins. Robežproblēma trešās kārtas vienādojumam.

Anotācija. Atrasti robežproblēmas

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad H_1 x = 0, \quad H_2 x = 0, \quad H_3 x = 0, \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

atrisinājuma eksistences nosacījumi, kur α un β vienādojuma $x''' = f(t, x, x', x'')$ atrisinājumi.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райня, 29

Поступила 27.07.94

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
 ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА
 С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. Д. Пономарев

Аннотация. Используя принцип сжимающих отображений, приводятся достаточные условия для существования решения краевой задачи.
 УДК 517.927

Рассмотрим краевую задачу

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad (1)$$

$$l_i x(\cdot) = r_i, \quad i=1, 2, 3, \quad (2)$$

где $f \in \text{Car}(I \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $l_i: AC^2(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, l_i — линейные непрерывные функционалы, $r_i \in \mathbb{R}$, $i=1, 2, 3$, $I=[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, $\text{Car}(I \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ — множество функций $f: I \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию Каратеодори [1], $AC^2(I, \mathbb{R})$ — множество непрерывных функций, у которых вторая производная абсолютно непрерывна, $C^2(I, \mathbb{R})$ — множество непрерывных функций, у которых вторая производная непрерывна. Будем предполагать, что функция f удовлетворяет условию Липшица. Для любых $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ и почти для всех $t \in I$ выполняется:

$$|f(t, x_1, x_2, x_3) - f(t, y_1, y_2, y_3)| \\ \leq k(t)|x_1 - y_1| + l(t)|x_2 - y_2| + m(t)|x_3 - y_3|,$$

где функции $t \rightarrow k(t)$, $t \rightarrow l(t)$, $t \rightarrow m(t)$ положительные, ограниченные почти всюду на I . Введем обозначения:

$$K = \text{vrai sup}_{t \in I} k(t), \quad L = \text{vrai sup}_{t \in I} l(t), \quad M = \text{vrai sup}_{t \in I} m(t).$$

Предположим, что однородная краевая задача

$$x''' = 0, \quad l_i x(\cdot) = 0, \quad i=1, 2, 3$$

имеет единственное решение тождественно равное нулю, и обозначим через $G(t, s)$ ее функцию Грина. В этом случае матрица

$$A = \begin{pmatrix} l_1(1) & l_1(t) & l_1\left(\frac{t^2}{2}\right) \\ l_2(1) & l_2(t) & l_2\left(\frac{t^2}{2}\right) \\ l_3(1) & l_3(t) & l_3\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{pmatrix}$$

имеет обратную матрицу A^{-1} .

Будем понимать выражения: $\left(1, t, \frac{t^2}{2}\right)$, $A^{-1} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ как

трехмерные вектора и обозначим через $t \cdot K_0(t)$ их скалярное произведение.

Теорема 1. Пусть выполняется условие

$$\max_{t \in I} \left[K \int_a^b |G(t, s)| ds + L \int_a^b |G_t(t, s)| ds + M \int_a^b |G_{tt}(t, s)| ds \right] < 1.$$

Тогда краевая задача (1), (2) имеет единственное решение.

Доказательство. Будем считать, что $C^2(I, \mathbb{R})$ линейное нормированное пространство с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in I} (K|x(t)| + L|x'(t)| + M|x''(t)|).$$

Рассмотрим отображение $F: C^2(I, \mathbb{R}) \rightarrow C^2(I, \mathbb{R})$, определенное формулой:

$$(Fx)(t) = \int_a^b G(t, s) f(s, x(s), x'(s), x''(s)) ds + k_0(t). \quad (3)$$

Покажем, что F есть сжимающее отображение. Используя условие Липшица, имеем для любых $x, y \in C^2(I, \mathbb{R})$ следующую оценку:

$$\|Fx - Fy\| \leq \max_{t \in I} \left[K \int_a^b |G(t, s)| |f(s, x(s), x'(s), x''(s)) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -f(s, y(s), y'(s), y''(s)) | ds + L \int_a^b |G_t(t, s)| |f(s, x(s), x'(s), x''(s)) - \\
& -f(s, y(s), y'(s), y''(s)) | ds + N \int_a^b |G_{tt}(t, s)| |f(s, x(s), x'(s), x''(s)) - \\
& -f(s, y(s), y'(s), y''(s)) | ds \Big) \|x-y\| \max_{t \in I} \left[K \int_a^b |G(t, s)| ds + \right. \\
& \left. + L \int_a^b |G_t(t, s)| ds + N \int_a^b |G_{tt}(t, s)| ds \right] < \|x-y\|.
\end{aligned}$$

По теореме Банаха о сжимающих отображениях имеется единственный элемент $x_0 \in C^2(I, R)$ такой, что

$$x_0(t) = \int_a^b G(t, s) f(s, x_0(s), x_0'(s), x_0''(s)) ds + k_0(t). \quad (4)$$

Следовательно, $x_0 \in \mathcal{A}C^2(I, R)$ и является единственным решением краевой задачи (1), (2).

Замечание 1. Рассматривая пространство $C^2(I, R)$ с различными нормами (по которым оно полно), можно, с использованием принципа сжимающих отображений, получать различные теоремы, аналогичные теореме 1. В этом направлении приведем еще одну.

Теорема 2. Пусть существуют на I положительные, непрерывные функции p, q и r такие, что для любого $t \in I$ выполняется

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p(t)} \int_a^b |G(t, s)| g(s) ds &< 1, \\
\frac{1}{q(t)} \int_a^b |G_t(t, s)| g(s) ds &< 1, \\
\frac{1}{r(t)} \int_a^b |G_{tt}(t, s)| g(s) ds &< 1,
\end{aligned}$$

где $g(s) = K(s)p(s) + L(s)q(s) + N(s)r(s)$.

Тогда краевая задача (1), (2) имеет единственное решение.

Доказательство. Введем в пространстве $C^2(I, R)$ норму

$$\|x\| = \max \left(\max_{t \in I} \frac{|x(t)|}{p(t)}, \max_{t \in I} \frac{|x'(t)|}{q(t)}, \max_{t \in I} \frac{|x''(t)|}{r(t)} \right).$$

Покажем, что отображение F , определенное формулой (3), является сжимающим. Используя условие Липшица, имеем для любых $x, y \in C^2(I, \mathbb{R})$ следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(Fx)(t) - (Fy)(t)}{p(t)} \right| &\leq \frac{1}{p(t)} \int_a^b |G(t, s)| \cdot |f(s, x(s), x'(s), x''(s)) - \\ &- f(s, y(s), y'(s), y''(s))| ds \leq \frac{1}{p(t)} \int_a^b |G(t, s)| \left[K(s)p(s) \frac{|x(s) - y(s)|}{p(s)} + \right. \\ &+ L(s)q(s) \frac{|x'(s) - y'(s)|}{q(s)} + M(s)r(s) \frac{|x''(s) - y''(s)|}{r(s)} \left. \right] ds \\ &\leq \frac{1}{p(t)} \int_a^b |G(t, s)| \left[K(s)p(s) \|x - y\| + L(s)q(s) \|x - y\| + \right. \\ &+ M(s)r(s) \|x - y\| \left. \right] ds \quad \|x - y\| \frac{1}{p(t)} \int_a^b |G(t, s)| g(s) ds < \|x - y\|. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\left| \frac{((Fx)(t))' - ((Fy)(t))'}{q(t)} \right| < \|x - y\|,$$

$$\left| \frac{((Fx)(t))'' - ((Fy)(t))''}{r(t)} \right| < \|x - y\|.$$

Поэтому получаем

$$\|Fx - Fy\| < \|x - y\|.$$

По теореме Банаха о сжимающих отображениях имеется единственный элемент $x_0 \in C^2(I, \mathbb{R})$ такой, что выполняется (4). Из (4) следует, что $x_0 \in AC^2_0(I, \mathbb{R})$ и поэтому будет единственным решением задачи (1), (2).

Замечание 2. Для уравнения n -го порядка справедливы утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2.

Литература

1. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.

V. Ponomarev. The existence of a solution to a boundary value

problem for third order differential equation with functional boundary conditions.

Summary. Sufficient conditions are obtained for solvability of a boundary value problem, using the principle of contractive mappings.

1991 MSC 34B99

V.Ponomarjovs. Robežproblēmas atrisinājuma eksistence trešās kārtas vienādojumam ar funkcionāliem robežnosacījumiem.

Anotācija. Izmantojot saspiedošo attēlu principu tiek izvesti robežproblēmas atrisinājuma eksistences pietiekamie nosacījumi.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райņa, 29

Поступила 20.04.94

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Н. И. Васильев

Аннотация. Для краевой задачи вида

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad H_1 x = 0, \quad H_2 x = 0, \quad H_3 x = 0$$

приведены условия существования решения.

УДК 517.927

Рассмотрим краевую задачу

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad (1)$$

$$H_1 x = 0, \quad H_2 x = 0, \quad H_3 x = 0, \quad (2)$$

где $f \in \text{Car}(I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $I = [a, b]$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$.

Пусть $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}$ решения уравнения (1) такие, что $\alpha < \beta$, и пусть S множество $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ решений уравнения (1), удовлетворяющих неравенствам $\alpha \leq x \leq \beta$. Предполагаем, что $H_1, H_2, H_3 \in C(S, \mathbb{R})$. Нас будут интересовать решения краевой задачи (1), (2), принадлежащие множеству S .

Обозначим через D_{AB} множество решений задачи Дирихле

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(a) = A, \quad x(b) = B \quad (3)$$

таких, что $\alpha \leq x \leq \beta$, где $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$, $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$, т.е.

$$D_{AB} = \left\{ x \in S: x(a) = A \wedge x(b) = B \right\}.$$

Пусть $t \in [a, b]$. Определим

$$M_{\alpha t} = \left\{ y \in S: y(t) = \alpha(t) \wedge y'(t) = \alpha'(t) \right\},$$

$$M_{\beta t} = \left\{ z \in S: z(t) = \beta(t) \wedge z'(t) = \beta'(t) \right\},$$

$$M_\alpha = \{y \in M_{\alpha\tau} : \tau \in [a, b]\},$$

$$M_\beta = \{z \in M_{\beta\tau} : \tau \in [a, b]\}.$$

Тогда справедлива

Теорема. Пусть выполняются условия:

1. $M_\alpha \cap M_\beta = \emptyset$;
2. для любых $c \in [a, b]$, $d \in (c, b]$ существует $M > 0$ такое, что для любого $x: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ решения уравнения (1) из условия $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$, $t \in (c, d)$ следует $|x''(t)| < M$, $t \in (c, d)$;
- 3.1. для любых $c \in [a, b]$, $d \in (c, b]$, $C_0, C_1, D \in \mathbb{R}$ решение x краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x', x''), \quad x(c) = C_0, \quad x'(c) = C_1, \quad x(d) = D,$$

лежащее между α и β , единственно;

- 3.2. для любых c, d, e таких, что $a \leq c < d < e \leq b$, и любых $C, D, E \in \mathbb{R}$ решение x краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x', x''), \quad x(c) = C, \quad x(d) = D, \quad x(e) = E,$$

лежащее между α и β , единственно;

4. для любых $t_* \in [a, b]$, $A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ решение задачи Коши

$$x'' = f(t, x, x', x''), \quad x(t_*) = A_0, \quad x'(t_*) = A_1, \quad x''(t_*) = A_2,$$

лежащее между α и β , единственно;

5. для любых $t \in S$ выполняются условия:

$$x(a) = \alpha(a) \rightarrow H_1 x \geq 0,$$

$$x(a) = \beta(a) \rightarrow H_1 x \leq 0,$$

$$x(b) = \alpha(b) \rightarrow H_2 x \geq 0,$$

$$x(b) = \beta(b) \rightarrow H_2 x \leq 0,$$

$$x \in M_\alpha \rightarrow H_3 x \geq 0,$$

$$x \in M_\beta \rightarrow H_3 x \leq 0.$$

Тогда задача (1), (2) имеет решение.

Доказательство. В работе А.Я.Лепина [1] показана разрешимость краевой задачи (1), (2) при аналогичных условиях, но там вместо условия 3.2 теоремы требуется выполнение симметричного к 3.1 условия

3.2* для любых $c \in [a, b)$, $d \in (c, b]$, $C, D_0, D_1 \in \mathbb{R}$ решение x краевой задачи

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad x(c) = C, \quad x(d) = D_0, \quad x'(d) = D_1,$$

лежащее между α и β , единственно.

Предварительно докажем, что условие 3.2 влечет выполнение условия 3.2* на любом отрезке $[c, d]$, где $c \in [a, b)$, $d \in (c, b)$. Допуская противное, имеем, что на $[c, d]$ найдутся два решения y и z уравнения (1), лежащие между α и β , и такие, что $y(c) = z(c)$, $y(t) < z(t)$, $t \in (c, d)$, $y(d) = z(d)$, $y'(d) = z'(d)$. Пусть $y(d) < \beta(d)$. Выберем y_ε решение (1), определенное начальными условиями

$$y_\varepsilon(c) = y(c), \quad y'_\varepsilon(c) = y'(c), \quad y''_\varepsilon(c) = y''(c) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда в силу непрерывной зависимости решений задачи Коши от начальных данных для достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$ $\alpha \leq y_{\varepsilon_0} \leq \beta$, $t \in [c, d]$ и найдутся $t_1 \in (c, d)$ и $t_2 \in (d, b)$ такие, что $y_{\varepsilon_0}(t_1) = z(t_1)$, $y_{\varepsilon_0}(t_2) = z(t_2)$. С учетом $y_{\varepsilon_0}(c) = z(c)$ получаем противоречие с условием 3.2 теоремы.

Если $z(d) = y(d) = \beta(d)$, то $z(d) > \alpha(d)$, и противоречие с условием 3.2 получаем аналогичным образом. Тем самым, для любых $d \in (c, b)$ показано выполнение условия 3.2*.

Обозначим

$$D_{AB_d} = \left\{ x \in S_d : x(a) = A \wedge x(b) = B_d \right\},$$

где $B_d \in [\alpha(d), \beta(d)]$. Тогда, как следует из работы [1], на отрезке $[a, d]$ существуют, соответственно, минимальное и максимальное решения $y_d(t)$ и $z_d(t)$, т.е. для $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$, $B_d \in [\alpha(d), \beta(d)]$ $y_d \in M_\alpha$, $z_d \in M_\beta$, $y_d(a) = z_d(a) = A$, $y_d(d) = z_d(d) = B_d$, $y'_d(a) < z'_d(a)$, $y'_d(d) > z'_d(d)$ и $y_d(t) < z_d(t)$, $t \in (a, d)$. Все другие решения $x \in D_{AB_d}$ находятся между y_d и z_d , не пересекаются между собой на (a, d) и однозначно определяются заданием $x'(a) \in (y'_d(a), z'_d(a))$.

Зафиксируем A и B и устремим $d \rightarrow b$ и $B_d \rightarrow B$. Тогда легко видеть, учитывая условия 3.1 и 3.2 теоремы, что предельные функции, соответственно, $y_b, z_b \in D_{AB}$ и обладают следующими свойствами:

$$y_b \in M_\alpha, \quad z_b \in M_\beta, \quad y_b(a) = z_b(a) = A,$$

$$y_b(b) = z_b(b) = B, \quad y_b < z_b, \quad t \in (a, b),$$

$$y'_d(a) < z'_d(a), \quad y'_d(b) = z'_d(b).$$

При этом множество $x \in D_{AB}$ однозначно определяется заданием $x'(a) \in [y'_b(a), z'_b(a)]$. Если предположить существование $x_0 \in D_{AB}$ такого, что $x'_0(a) < y'_b(a)$, либо $x'_0(a) > z'_b(a)$, то немедленно получаем противоречие с условием 3.2. Таким образом, y_b минимальное и z_b - максимальное решения.

Далее так же, как в [1], определим множество

$$K = \left\{ (A, B, V) : A \in [\alpha(a), \beta(a)] \wedge B \in [\alpha(b), \beta(b)] \wedge V \in [y'_b(a), z'_b(a)] \right\}.$$

Тогда с учетом доказанного в [1] условия теоремы обеспечивают отображение множества S решений (1) во множество K . Пусть $F: K \rightarrow S$ гомеоморфизм между K и S и пусть $h_i = H_i F$, $i = 1, 2, 3$.

Тогда

$$h_1(\alpha(a), \alpha(b), y'_b(a)) \leq 0, \quad h_1(\beta(a), \beta(b), z'_b(a)) \geq 0,$$

$$h_2(\alpha(a), \alpha(b), y'_b(a)) \leq 0, \quad h_2(\beta(a), \beta(b), z'_b(a)) \geq 0,$$

$$h_3(\alpha(a), \alpha(b), y'_b(a)) \leq 0, \quad h_3(\beta(a), \beta(b), z'_b(a)) \geq 0.$$

Следовательно, найдутся такие

$$x(a) = A \in [\alpha(a), \beta(a)], \quad x(b) = B \in [\alpha(b), \beta(b)],$$

$$x'(a) = V_0 \in [y'_b(a), z'_b(a)],$$

что $x(t)$ - решение краевой задачи (1), (2). Теорема доказана.

Замечание. Условия единственности решения трехточечной краевой задачи изучались многими авторами. Наиболее детально изучен этот вопрос в случае, когда правая часть дифференциального уравнения удовлетворяет условиям Липшица по x , x' , x'' , см. [2]. В случае, когда функция f удовлетворяет локальным условиям Липшица по x , x' и x'' , для нахождения соответствующих констант существенно используются неравенство $\alpha < \gamma < \beta$ и условие 2 теоремы, позволяющее выписать в явном виде априорные оценки на x' и x'' .

Литература

1. Лепин А.Я. Краевая задача для уравнения третьего порядка //

LU zinātniskie raksti. Matemātika. Diferenciālvienādojumi.
1994 (в печати).

2. Беспалова С.А. Единственность решения трехточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка // Латв.мат.ежегодник. 1977. Вып.21. С.3-17.

N.Vasilyev. On a boundary value problem for the third order differential equation.

Summary. The conditions ensuring existence of solution got the boundary value problem

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad H_1 x = 0, \quad H_2 x = 0, \quad H_3 x = 0$$

are given.

1991 MSC 34B99

N.Vasiļjevs. Par kādu robežproblēmu trešās kārtas diferenciālvienādojumam.

Anotācija. Uzrādīti nosacījumi, kas robežproblēmai

$$x''' = f(t, x, x', x''), \quad H_1 x = 0, \quad H_2 x = 0, \quad H_3 x = 0$$

garantē atrisinājuma eksistenci.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райня, 29

Поступила 20.06.94

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИИ
РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
А.И.Звягинцев, О.В.Тихая

Аннотация. Для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями общего вида приводятся условия существования решения.
УДК 517.927.4

Пусть система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x_i^{(n_i)} = f_i(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(n_1-1)}, \dots, x_m, x_m', \dots, x_m^{(n_m-1)}), \quad (1)$$

$$i=1, \dots, m,$$

удовлетворяет условиям: $f_i \in C(I \times \mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_m}, \mathbb{R})$,

$$|f_i(t, x_1, \dots, x_1^{(n_1-1)}, \dots, x_m, \dots, x_m^{(n_m-1)})|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{r_i} g_{ij}(t) \prod_{k=1}^m \prod_{l=0}^{n_k} |x_k^{(l)}|^{\alpha_{ijkl}}, \quad (2)$$

где $m, n_i, r_i \in \{1, 2, \dots\}$, $I = [0, \tau]$, $g_{ij} \in L_{p_{ij}}(I, [0, \infty))$, $1 \leq p_{ij} < \infty$, $\alpha_{ijkl} \in [0, \infty)$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1) с краевыми условиями

$$H_Q(x_i) = b_{iq}, \quad i=1, \dots, m; \quad q=1, \dots, n_i, \quad (3)$$

где

$$H_Q(x_i) = \sum_{l=0}^{n_i} \sum_{s=1}^{n_l} a_{iqls} x_i^{(l)}(t_{is}),$$

$a_{iqls}, b_{iq} \in \mathbb{R}$, $0 = t_{i1} < t_{i2} < \dots < t_{in_i} = \tau$.

Теорема 1. Пусть для всех $i=1, \dots, m$ и $j=1, \dots, r_i$ выполняются

условия (2),

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{n_k-1} \alpha_{ijkl} < 1, \quad (4)$$

$$\begin{vmatrix} H_1(1) & H_1(t) & H_1 \left(t^{\overset{n_1-1}{\cdot}} \right) \\ H_1(1) & H_1(t) & H_1 \left(t^{\overset{\cdot}{n_1-1}} \right) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5)$$

Тогда существует такое число $M > 0$, что для любого решения краевой задачи (1), (3) справедливы оценки

$$\|x_i^{(l)}\|_{\infty} \leq M, \quad i=1, \dots, m; \quad l=0, \dots, n_i-1. \quad (6)$$

Доказательство. В силу условия (5) существует единственный интерполяционный многочлен $Q_{n_i-1}(t)$ степени n_i-1 , который удовлетворяет условиям (3).

Пусть $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ является решением краевой задачи (1), (3). Рассмотрим функции

$$\varphi_i(t) = x_i(t) - Q_{n_i-1}(t), \quad i=1, \dots, m. \quad (7)$$

Поскольку

$$\varphi_i^{(n_i)}(t) = x_i^{(n_i)}(t) - H_Q(\varphi_i) = 0, \quad i=1, \dots, m; \quad q=1, \dots, n_i, \quad (8)$$

а соответствующая однородная краевая задача

$$y_i^{(n_i)}(t) = 0, \quad H_Q(y_i) = 0, \quad i=1, \dots, m; \quad q=1, \dots, n_i, \quad (9)$$

в силу (5) имеет только тривиальное решение, то из (8) следует [2, 4], что

$$\varphi_i(t) = \int_0^{\tau} G_i(t, \xi) x_i^{(n_i)}(\xi) d\xi, \quad i=1, \dots, m,$$

где $G_i(t, \xi)$ - функция Грина краевой задачи (9). Отсюда согласно (7) получаем

$$x_i^{(l)}(t) = Q_{n_i-1}^{(l)}(t) + \int_0^{\tau} \frac{\partial^l}{\partial t^l} G_i(t, \xi) x_i^{(n_i)}(\xi) d\xi, \quad (10)$$

$$i=1, \dots, m; \quad l=0, \dots, n_i-1.$$

Отметим, что функция Грина краевой задачи (9) является сплайном

степени $n_i - 1$.

По теореме Вейерштрасса из (10) для любого $t \in I$ имеем

$$\begin{aligned} |x_i^{(l)}(t)| &\leq \max_{t \in I} |Q_{n_i-1}^{(l)}(t)| + \\ &+ \max_{(t, \xi) \in I^2} \left| \frac{\partial^l}{\partial t^l} G_i(t, \xi) \right| \int_0^t |x_i^{(n_i)}(\xi)| d\xi \leq c_1 + c_2 \|x_i^{(n_i)}\|_1. \end{aligned}$$

Отсюда вытекают неравенства

$$\|x_i^{(l)}\|_m \leq B \left(1 + \|x_i^{(n_i)}\|_1 \right), \quad i=1, \dots, m; \quad l=0, \dots, n_i-1. \quad (11)$$

На основании (1) и (2) для $i=1, \dots, m$ получаем

$$\int_0^{\tau} |x_i^{(n_i)}(t)| dt \leq \sum_{j=1}^{r_1} \prod_{k=1}^m \prod_{l=0}^{n_k-1} \|x_k^{(l)}\|_m^{\alpha_{ijkl}} \int_0^{\tau} |g_{ij}(t)| dt. \quad (12)$$

Поскольку $g_{ij} \in L_{p_{ij}}(I)$, то в силу неравенства Гельдера имеем

$\|g_{ij}\|_1 \leq \tau^{1-1/p_{ij}} \|g_{ij}\|_{p_{ij}} \leq c$ при некотором $c > 0$. Тогда с учетом (11) из (12) следует неравенства

$$\begin{aligned} \|x_i^{(n_i)}\|_1 &\leq c \sum_{j=1}^{r_1} \prod_{k=1}^m \prod_{l=0}^{n_k-1} \left(B(1 + \|x_k^{(n_k)}\|_1) \right)^{\alpha_{ijkl}} \leq \\ &\leq c \sum_{j=1}^{r_1} B^{\sigma_{ij}} (1 + \|x_{\gamma}^{(n_{\gamma})}\|_1)^{\sigma_{ij}}, \quad i=1, \dots, m, \end{aligned}$$

где $\gamma \in \{1, \dots, m\}$, $\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{n_k-1} \alpha_{ijkl}$. На основании (4), используя

[3] неравенство $(1 + \|x_{\gamma}^{(n_{\gamma})}\|_1)^{\sigma_{ij}} \leq 1 + \|x_{\gamma}^{(n_{\gamma})}\|_1^{\sigma_{ij}}$, окончательно получаем

$$\|x_i^{(n_i)}\|_1 \leq c \sum_{j=1}^{r_1} B^{\sigma_{ij}} (1 + \|x_{\gamma}^{(n_{\gamma})}\|_1^{\sigma_{ij}}), \quad i=1, \dots, m. \quad (13)$$

Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда из (11) следует существование числа $D > 1$ и непустого множества S решений $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ краевой задачи (1), (3) таких, что для любого $T > D$ найдется решение $x \in S$, обладающее следующими свойствами:

$$J = \left\{ i \in \{1, \dots, m\} \mid \|x_i^{(n_1)}\|_1 \geq T \right\} \neq \emptyset$$

$$\|x_i^{(n_1)}\|_1 \leq D, \quad i \in \{1, \dots, m\} \setminus J,$$

причем множество $\{1, \dots, m\} \setminus J$ может быть пустым.

Пусть $\gamma \in J$ такое, что

$$\|x_\gamma^{(n_\gamma)}\|_1 \leq \max_{i \in J} \|x_i^{(n_1)}\|_1.$$

Тогда из (13) получаем

$$\|x_\gamma^{(n_\gamma)}\|_1 \leq c \sum_{j=1}^r B^{\sigma_j \gamma} (1 + \|x_\gamma^{(n_\gamma)}\|_1^{\sigma_j}). \quad (14)$$

Поскольку $\sigma_{\gamma j} < 1$ по условию (4), то, выбрав T достаточно большим, получим в неравенстве (14) противоречие. Теорема доказана.

Частными случаями краевых условий (3), для которых справедливо (5), являются:

а) условия Николетти

$$x_i^{(\alpha-1)}(0) = b_{i\alpha}, \quad x_i^{(\beta-1)}(\tau) = \beta_{i\beta}, \quad \alpha = 1, \dots, \gamma_i; \quad \beta = \gamma_i + 1, \dots, n_i;$$

б) условия Валле-Пуссена

$$x_i^{(\alpha-1)}(0) = b_{i\alpha}, \quad x_i^{(\beta-1)}(\tau) = \beta_{i, \gamma_i + \beta},$$

$$\alpha = 1, \dots, \gamma_i; \quad \beta = 1, \dots, n_i - \gamma_i;$$

в) многоточечные (интерполяционные) краевые условия

$$x_i(t_{iq}) = b_{iq}, \quad 0 = t_{i1} < t_{i2} < \dots < t_{in_i} = \tau, \quad q = 1, \dots, n_i;$$

г) чередующиеся краевые условия

$$x_i(0) = b_{i1}, \quad x_i'(\tau) = b_{i2}, \quad x_i^{(n_i-1)}\left(\frac{1+(-1)^{n_i}}{2} \tau\right) = b_{in_i}$$

Отметим, что полученное в теореме 1 условие (4) является, вообще говоря, неулучшаемым. Так утверждение теоремы 1 становится уже неверным, когда в условии (4) строгое неравенство заменяется на нестрогое. В подтверждение этого приведем следующий пример:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'' = -\frac{\pi}{4} x_1 \\ x_2'' = -\pi^2 x_2 \\ x_3''' = -4\pi^2 x_3' \\ x_4'''' = -x_4' ((x_4')^2 - x_4 x_4'') \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_1'(1) = 0, \\ x_2(0) &= x_2(1) = 0, \\ x_3(0) &= x_3\left(\frac{1}{2}\right) = x_3(1) = 0, \\ x_4(0) &= x_4'(1) = x_4''(0) = 0, \end{aligned}$$

где $\gamma > 0$. Решение этой краевой задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \sin \frac{\pi}{2} t, \quad x_2(t) = C_2 \sin \pi t, \quad x_3(t) = C_3 \sin 2\pi t, \\ x_4(t) &= \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right)^{1/\gamma-1} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) t. \end{aligned}$$

В силу произвольности чисел $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ и $x_4'(t)$ неограничены.

Теорема 2. Пусть для всех $i=1, \dots, m$ и $j=1, \dots, \gamma_i$ выполняются условия (2), (4), (5). Тогда краевая задача (1), (3) имеет решение.

Доказательство. Согласно теореме 1 существует число $M > 0$, для которого выполняются неравенства (6). Поэтому рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x_i^{(n_i)} &= f_i(t, \delta(-M, x_1, M), \dots, \delta(-M, x_1^{(n_1)}, M), \dots, \\ &\delta(-M, x_m, M), \dots, \delta(-M, x_m^{(n_m)}, M)), \quad i=1, \dots, m, \end{aligned} \quad (15)$$

с краевыми условиями (3), где δ является функцией обрезки [1, стр.16].

Ясно, что в (15) правые части уравнений являются непрерывными и ограниченными функциями на множестве $I \times \mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_m}$. Так как соответствующая однородная краевая задача (9) в силу (5) имеет только тривиальное решение, то [1, стр.25] краевая задача (15), (3) имеет решение, которое обозначим через

$x_{10}(t), \dots, x_{m0}(t)$.

Поскольку для правых частей уравнений системы (15) выполняются условия (2), то, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, получим оценки

$$|x_{i0}^{(l)}(t)| \leq M, \quad t \in I, \quad i=1, \dots, m; \quad l=0, \dots, n_i-1.$$

Отсюда следует, что при $x_1(t)=x_{10}(t), \dots, x_m(t)=x_{m0}(t)$ система (15) совпадает с системой (1). Значит, $x_{10}(t), \dots, x_{m0}(t)$ является решением и краевой задачи (1), (3). Теорема доказана.

В качестве приложения теоремы 2 приведем два простейших примера. Рассмотрим [2] уравнение типа Дюффинга

$$x^{(n)} + \varphi(t) \sin x = \psi(t) \quad (16)$$

и уравнение типа Эмдена-Фаялера

$$x^{(n)} + \varphi(t)x^\sigma = 0 \quad (17)$$

с краевыми условиями

$$x^{(\alpha-1)}(0) = b_\alpha, \quad x^{(\beta-1)}(\tau) = b_\beta, \quad \alpha=1, \dots, \gamma; \quad \beta=\gamma+1, \dots, n, \quad (18)$$

где $n \in \{2, 3, \dots\}$, $\varphi \in L_p(I)$, $\psi \in L_q(I)$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Поскольку $|\sin x| \leq |x|^{1/2}$, то по теореме 2 краевая задача (16), (18) имеет решение для любых действительных чисел b_1, \dots, b_n . В случае $0 \leq \sigma < 1$ теорема 2 гарантирует существование решения краевой задачи (17), (18) для произвольных $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

Литература

1. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: Зинатне, 1978. 189 с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976. 576 с.
3. Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948. 456 с.
4. Das K.M., Vatsala A.S. On Green's function of an n -point boundary value problem // Trans.Amer.Math.Soc. 1973. V.182. P.469-480.

A.Zvyagintsev, O.Tihaja. On the boundedness and existence of solutions of boundary value problems.

Summary. In the paper is proved the existence and a prior boundedness of solutions of boundary value problems for nonlinear systems of ordinary differential equations.
1991 MSC 34B30

A.Zvjagincevs, O.Tihaja. Par robežproblēmas atrisinājuma ierobežotību un eksistenci.

Anotācija. Darbā ir apskatīta nelineāra robežproblēma. Izpētīts jautājums par atrisinājuma ierobežotību un eksistenci.

Высшая административная школа
при мэрии Санкт-Петербурга
С.-Петербург, Вознесенский пр., 5

Поступила 05.05.94

Латвийский университет
Рига, Б.Райня, 19

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ
ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Л.А.Лепин

Аннотация. Исследуется множество решений дифференциального уравнения четвертого порядка

$$x^{IV} = f(t, x, x', x'', x'''), \quad (1)$$

лежащих между двумя заданными решениями уравнения (1).
УДК 517.927

Рассмотрим уравнение четвертого порядка

$$x^{IV} = f(t, x, x', x'', x'''), \quad (1)$$

где функция $f: I \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Каратеодори, $I = [a, b]$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$. Пусть $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}$ два решения уравнения (1) такие, что $\alpha \leq \beta$ на I . Обозначим через D множество решений уравнения (1), определенных на всем интервале I и лежащих между α и β . Данная работа посвящена изучению структуры множества D , причем основное внимание уделено наиболее общему случаю, когда $\alpha < \beta$ на I . Изучение множества проводится путем исследования подмножеств множества D следующего вида:

$$\{x \in D: x(a) = A, x(b) = B\},$$

где $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$, а $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$. Рассмотрены все возможные варианты расположения точек A и B в указанных интервалах.

Подобные вопросы для уравнения второго порядка рассматривались в [1], а для уравнения третьего порядка в [2].

Итак, пусть $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$, $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$. Введем следующие обозначения:

$$D_{AB} = \{x \in S: x(a)=A, x(b)=B\},$$

$$D_\alpha = \left\{x \in D: \exists t_0 \in I: x(t_0)=\alpha(t_0), x'(t_0)=\alpha'(t_0)\right\},$$

$$D_\beta = \left\{x \in D: \exists t_0 \in I: x(t_0)=\beta(t_0), x'(t_0)=\beta'(t_0)\right\},$$

$$D_{\alpha\beta} = \left\{x \in D: (\exists t_1 \in [a, b]: x(t_1)=\alpha(t_1), x'(t_1)=\alpha'(t_1)) \wedge (\exists t_2 \in (t_1, b]: x(t_2)=\beta(t_2), x'(t_2)=\beta'(t_2))\right\},$$

$$D_{\beta\alpha} = \left\{x \in D: (\exists t_1 \in [a, b]: x(t_1)=\beta(t_1), x'(t_1)=\beta'(t_1)) \wedge (\exists t_2 \in (t_1, b]: x(t_2)=\alpha(t_2), x'(t_2)=\alpha'(t_2))\right\}.$$

На протяжении всей работы будем считать, что выполняются следующие условия.

1) Условие компактности:

Для любых $c \in [a, b]$ и $d \in (c, b]$ найдется $M \in (0, \infty)$ такое, что для любого решения $x: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ уравнение (1) из $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$ на интервале (c, d) следует, что $|x''(t)| < M$ для любого $t \in (c, d)$.

2) Условие единственности.

Уравнение (1) не может иметь двух различных решений, определенных на некотором интервале $I_0 \subset I$, лежащих на интервале I_0 между α и β и удовлетворяющих одному и тому же из следующих условий:

2.1. $x(t_1)=A, x'(t_1)=A_1, x''(t_1)=A_2, x'''(t_1)=A_3, t_1 \in I_0;$

2.2. $x(t_1)=A, x(t_2)=B, x(t_3)=C, x(t_4)=D, a \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \leq b;$

2.3. $x(t_1)=A, x'(t_1)=A_1, x''(t_2)=A_2, x(t_2)=B, a \leq t_1 < t_2 \leq b$ или $a \leq t_2 < t_1 \leq b;$

2.4. $x(t_1)=A, x'(t_1)=A_1, x(t_2)=B, x'(t_2)=B_1, a \leq t_1 < t_2 \leq b;$

2.5. $x(t_1)=A, x'(t_1)=A_1, x(t_2)=B, x'(t_3)=C, a \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq b$ или $a \leq t_3 < t_2 < t_1 \leq b$ или $a \leq t_2 < t_1 < t_3 \leq b$

для некоторых $t_1, t_2, t_3, t_4 \in I_0$ и $A, B, C, D, A_1, A_2, A_3, B_1 \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. Пусть $\alpha(a)=\beta(a), \alpha'(a)=\beta'(a), \alpha''(a)=\beta''(a)$ и $\alpha(b) \leq \beta(b)$. Тогда для любого $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ существует единственное решение $x \in D_{\alpha(a)B}$; множество таких решений монотонно и непрерывно зависит от B .

Доказательство. В силу условия 2.1 $\alpha'''(a) < \beta'''(a)$. Возьмем

$A_3 \in (\alpha'''(a), \beta'''(a))$ и решение задачи Коши для уравнения (1) с условиями

$$x(a) = \alpha(a), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x''(a) = \alpha''(a), \quad x'''(a) = A_3.$$

На некотором интервале $(a, a+\epsilon)$ это решение будет лежать строго между α и β . В силу условия компактности это решение можно продолжить, пока оно не достигнет α , β или до $t=b$. Первые два случая невозможны в силу условия 2.3. Значит, это решение продолжимо на интервал I . Множество таких решений в силу условия 2.3 будет строго монотонно на $(a, b]$, а поэтому значение $x(b)$ будет непрерывно зависеть от A_3 и монотонно изменяться от $\alpha(b)$ до $\beta(b)$ при изменении A_3 от $\alpha'''(a)$ до $\beta'''(a)$. Отсюда следует справедливость леммы.

Лемма 2. Пусть $\alpha(a) = \beta(a)$, $\alpha'(a) = \beta'(a)$, $\alpha''(a) < \beta''(a)$, $\alpha(b) = \beta(b)$. Тогда для любого $A_2 \in [\alpha''(a), \beta''(a)]$ существует единственное $x \in D$ такое, что $x''(a) = A_2$, множество таких решений монотонно и непрерывно зависит от A_2 .

Доказательство. Возьмем $A_2 \in (\alpha''(a), \beta''(a))$, $A_3 \in \mathbb{R}$ и решение задачи Коши для уравнения (1) с условиями

$$x(a) = \alpha(a), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x''(a) = A_2, \quad x'''(a) = A_3. \quad (2)$$

Если A_3 достаточно мало (близко к $-\infty$), то это решение на некотором интервале будет лежать между α и β , а затем пересечет α . Если, наоборот, A_3 выбрать достаточно большим, то такое решение будет лежать между α и β , а затем пересечет β . Отсюда и из условия компактности следует, что найдется A_3 такое, что решение задачи Коши (1)-(2) будет удовлетворять одному из следующих условий:

- 1) $\exists t_1 \in (a, b): \alpha < x < \beta$ на (a, t_1) , $x(t_1) = \alpha(t_1)$, $x'(t_1) = \alpha'(t_1)$.
- 2) $\exists t_2 \in (a, b): \alpha < x < \beta$ на (a, t_2) , $x(t_2) = \beta(t_2)$, $x'(t_2) = \beta'(t_2)$.
- 3) $\alpha < x < \beta$ на (a, b) , $x(b) = \alpha(b)$.

Первые два случая невозможны в силу условия 2.4, а третий как раз дает необходимое решение. Его единственность следует из условия 2.3, монотонность таких решений следует из условия 2.4, а непрерывная зависимость от A_2 из единственности и компактности. Лемма доказана.

Замечание 1. Лемма 2 может быть сформулирована по-другому. Если параметризацию множества решений проводить не по $x''(a)$, а

по $x'(b)$, то лемма будет выглядеть следующим образом.

Лемма 2' Пусть $\alpha(a)=\beta(a)$, $\alpha'(a)=\beta'(a)$, $\alpha(b)=\beta(b)$, $\alpha'(b)>\beta'(b)$. Тогда для любого $B_1 \in [\beta'(b), \alpha'(b)]$ существует единственное $x \in D$ такое, что $x'(b)=B_1$, множество таких решений монотонно и непрерывно зависит от B_1 .

Лемма 3. Пусть $\alpha(a)=\beta(a)$, $\alpha'(a)=\beta'(a)$, $\alpha''(a)<\beta''(a)$, $\alpha(b)<\beta(b)$. Тогда для любых $A_2 \in [\alpha''(a), \beta''(a)]$, $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ существует единственное $x \in D_{\alpha(a)B}$ такое, что $x''(a)=A_2$, множество таких решений монотонно как по A_2 , так и по B и непрерывно зависит от A_2 и B .

Доказательство. Возьмем $A_2 \in (\alpha''(a), \beta''(a))$ и так же, как при доказательстве леммы 2, найдем $A_3 \in \mathbb{R}$ и решение задачи Коши (1)-(2), удовлетворяющее одному из условий (3). Так как первые два случая невозможны в силу условия 2.4, то будет реализована третья возможность. Обозначим это решение через x_1 . Аналогично найдется $A_3 \in \mathbb{R}$ и решение задачи Коши (1)-(2), удовлетворяющее условиям $\alpha < x < \beta$ на (a, b) и $x(b)=\beta(b)$. Обозначим это решение через x_2 . Из условия 2.3 следует, что $x_1 < x_2$ на (a, b) . Применяя к x_1 и x_2 лемму 1, получим существование требуемых решений и монотонность их по B . Единственность таких решений следует из условия 2.3. Случай, когда $A_2 = \alpha''(a)$ или $A_2 = \beta''(a)$, рассматривается аналогично. Возьмем теперь $B \in (\alpha(b), \beta(b))$ и $x_3, x_4 \in D_{\alpha(a)B}$ такие, что $x_3''(a) = \alpha''(a)$, $x_4''(a) = \beta''(a)$. Применяя к x_3 и x_4 лемму 2, получим монотонность множества решений по A_2 . Непрерывная зависимость следует из единственности и условия компактности.

Лемма 4. Пусть $\alpha(a) < \beta(a)$, $\alpha(b) < \beta(b)$ и существует $t_0 \in (a, b)$ такое, что $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$. Тогда для любого $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$ и любого $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ существует единственное $x \in D_{AB}$, множество таких решений монотонно как по A , так и по B , и непрерывно зависит от A и B .

Доказательство. Заметим, что $\alpha'(t_0) = \beta'(t_0)$ и $\alpha''(t_0) < \beta''(t_0)$, так как в противном случае не выполнялось бы условие $\alpha \leq \beta$. Применяя на интервале $[a, t_0]$ лемму, симметричную по t лемме 3, получим на интервале $[a, t_0]$ для любого $C_2 \in [\alpha''(t_0), \beta''(t_0)]$ решение x , удовлетворяющее условиям $x(a) = \alpha(a)$, $x''(t_0) = C_2$ и

$\alpha \leq x \leq \beta$ на $[a, t_0]$. Если выбрать C_2 достаточно близко к $\alpha''(t_0)$, то решение x будет продолжимо на I и на I удовлетворять условию $\alpha \leq x \leq \beta$ (оно не может достичь α на $(t_0, b]$ в силу условия 2.5). С другой стороны, если выбрать $C_2 = \beta''(t_0)$, то в силу условия 2.1 получим $x''(t_0) > \beta''(t_0)$, т.е. $x(t) > \beta(t)$ на некотором интервале $(t_0, t_0 + \epsilon)$. Если выбрать C_2 достаточно близко к $\beta''(t_0)$, то решение x при продолжении его вправо на некотором интервале (t_0, t_1) будет удовлетворять условию $\alpha < x < \beta$, а в точке t_1 x пересечет β , т.е. $x(t_1) = \beta(t_1)$. Изменяя непрерывно C_2 от $\alpha''(t_0)$ до $\beta''(t_0)$ и учитывая, что в силу условия 2.4 не существует решения $x \in D$ такого, что $x(t_1) = \beta(t_1)$ и $x'(t_1) = \beta'(t_1)$ для некоторого $t_1 \in (t_0, b]$, получим, что для любой точки $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ найдется решение $x \in D_{\alpha(a)B}$. Если обозначить полученное решение через α_1 и к функциям α_1 и β применить результат, симметричный по t только что доказанному, то получим существование требуемых в лемме решений. Единственность, монотонность и непрерывная зависимость от A и B следуют из условия 2.5 и условия компактности.

Лемма 5. Пусть $\alpha(a) < \beta(a)$ или $\alpha'(a) < \beta'(a)$. Тогда существует единственное $x \in D_\beta$ такое, что $x(a) = \alpha(a)$, $x'(a) = \alpha'(a)$ и $x(b) = \alpha(b)$.

Доказательство. Если $\alpha \in D_\beta$, то утверждение леммы очевидно. Предположим, что $\alpha \notin D_\beta$. Сначала докажем следующее утверждение: найдется $x \in D_{\alpha(a)\alpha(b)}$ такое, что $x'(a) = \alpha'(a)$ и $\alpha < x \leq \beta$ на (a, b) . Возьмем произвольные $A_2 \in (\alpha''(a), \infty)$, $A_3 \in \mathbb{R}$ и решение задачи Коши (1)-(2). Если A_3 выбрать достаточно близким к $-\infty$, то решение x пересечет α прежде, чем достигнет β , а если A_3 велико, то наоборот. Поэтому должно найтись A_3 такое, что x будет удовлетворять одному из следующих трех условий:

- 1) $\exists t_1 \in (a, b)$: $x(t_1) = \alpha(t_1)$, $x'(t_1) = \alpha'(t_1)$.
- 2) $\alpha < x \leq \beta$ на (a, b) и $x(b) = \alpha(b)$.
- 3) $\exists t_2 \in (a, b)$, $\exists t_3 \in (t_2, b)$: $\alpha < x \leq \beta$ на (a, t_3) , $x(t_2) = \beta(t_2)$, $x'(t_2) = \beta'(t_2)$ и $x(t_3) = \alpha(t_3)$.

Первый из перечисленных случаев невозможен в силу условия 2.4. Если для какого-либо $A_2 \in (\alpha''(a), \infty)$ выполняется условие 2), то утверждение доказано. Предположим, что это не так. Тогда для

любого $\lambda_2 \in (\alpha''(a), \infty)$ выполняется условие 3). Устремив λ_2 к $\alpha''(a)$, в пределе получим противоречие с условием 2.3. Утверждение доказано. Заметим, что в силу условия 2.3 $x''(a) > \alpha''(a)$. Пусть теперь $\lambda_2^* = \sup \left\{ \lambda_2 \in (\alpha''(a), \infty) : \exists x \in D_{\alpha(a)\alpha(b)} \text{ такое, что } x'(a) = \alpha'(a), x''(a) = \lambda_2 \right\}$. Очевидно, что $\lambda_2^* < \infty$. В силу условия компактности существует $x_* \in D_{\alpha(a)\alpha(b)}$ такое, что $x_*'(a) = \alpha'(a)$ и $x_*''(a) = \lambda_2^*$. Если $x_* \notin D_\beta$, то применив к нему доказанное выше утверждение, получим противоречие с выбором λ_2^* . Таким образом, x_* искомого решения. Единственность такого решения следует из условия 2.5.

Лемма 6. Пусть $\alpha(a) = \beta(a)$, $\alpha'(a) < \beta'(a)$, $\alpha(b) = \beta(b)$, $\alpha'(b) > \beta'(b)$. Тогда для любых $\lambda_1 \in [\alpha'(a), \beta'(a)]$ и $B_1 \in [\beta'(b), \alpha'(b)]$ существует единственное $x \in D$ такое, что $x'(a) = \lambda_1$, $x'(b) = B_1$, множество таких решений монотонно как по λ_1 , так и по B_1 и непрерывно зависит от λ_1 и B_1 .

Доказательство. Согласно лемме 5 найдется $x_0 \in D_\beta$ такое, что $x_0'(a) = \alpha'(a)$. Пусть $t_0 \in I$ точка, в которой $x_0(t_0) = \beta(t_0)$ и $x_0'(t_0) = \beta'(t_0)$. В силу условия 2.5 $t_0 = b$, т.е. $x_0'(b) = \beta'(b)$. По лемме 2' для любого $B_1 \in [\beta'(b), \alpha'(b)]$ найдется $x_1 \in D$ такое, что $\alpha < x_1 < x_0$ на (a, b) и $x_1'(b) = B_1$. Выбрав x_1 в качестве нового α , аналогично получим, что для любого $\lambda_1 \in [x_1'(a), \beta'(a)]$ найдется решение уравнения (1) x_2 такое, что $x_2'(a) = \lambda_1$, $x_2'(b) = x_1'(b) = B_1$ и $x_1 < x_2 < \beta$ на (a, b) . Единственность таких решений следует из условия 2.4, монотонность из условия 2.3, а непрерывная зависимость - из единственности и компактности.

Лемма 7. Пусть $\alpha < \beta$ на I , $x_0 \in D_{\alpha(a)\alpha(b)} \cap D_\beta$ такое, что $x_0'(a) = \alpha'(a)$. Тогда для любого $B_1 \in [x_0'(b), \alpha'(b)]$ существует единственное $x \in D_{\alpha(a)\alpha(b)} \cap D_\beta$ такое, что $x'(b) = B_1$; эти решения непрерывно зависят от B_1 . Других элементов множество $D_{\alpha(a)\alpha(b)} \cap D_\beta$ не имеет.

Доказательство. Согласно лемме 2' найдется $x_1 \in D$ такое, что $\alpha < x_1 < x_0$ на (a, b) и $x_1'(b) = B_1$. Согласно лемме, симметричной по t лемме 5, найдется $x_2 \in D_{x_1(a)x_1(b)} \cap D_\beta$ такое, что $x_2'(b) = x_1'(b) = B_1$. Очевидно, это и есть нужное решение. Единственность таких

решений следует из условия 2.5, а непрерывная зависимость из единственности и компактности. То, что других решений множество $D_{\alpha(a)\alpha(b)} \cap D_{\beta}$ не содержит, следует из условий 2.2 и 2.4.

Замечание 2. Пусть выполняются условия леммы 7 и $x_1 \in D_{\alpha(a)\alpha(b)} \cap D_{\beta}$ такое, что $x'_1(b) = \alpha'(b)$. Пусть далее $B_1 \in [x'_0(b), \alpha'(b)]$ и x — решение, которое существует в силу леммы 7, а t_* точка, в которой $x(t_*) = \beta(t_*)$. Тогда t_* монотонно и непрерывно зависит от B_1 .

Непрерывная зависимость t_* от B_1 следует из того, что сами эти решения непрерывно зависят от B_1 , и из условия 2.4, а монотонность следует из условия 2.5.

Теорема 1. Пусть $\alpha < \beta$ на I , $x_1 \in D_{\alpha(a)\alpha(b)} \cap D_{\beta}$ такое, что $x'_1(a) = \alpha'(a)$. Пусть далее $B_1 \in [x'_1(b), \alpha'(b)]$, $x_2 \in D_{\alpha(a)\alpha(b)} \cap D_{\beta}$ такое, что $x'_2(b) = B_1$ и $\lambda_1 \in [\alpha'(a), x'_2(a)]$. Тогда найдется единственное $x \in D_{\alpha(a)\beta(a)}$ такое, что $x'(a) = \lambda_1$ и $x'(b) = B_1$. Эти решения монотонны как по λ_1 , так и по B_1 и непрерывно зависят от λ_1 и B_1 . Других решений множество $D_{\alpha(a)\alpha(b)}$ не содержит.

Доказательство. Существование такого решения следует из лемм 2 и 6, единственность следует из условия 2.4, монотонность из условия 2.5, а непрерывная зависимость из единственности и компактности. То, что множество $D_{\alpha(a)\alpha(b)}$ не содержит других решений, следует из условий 2.2 и 2.5.

Перейдем теперь к рассмотрению множества D_{AB} в случае, когда $\lambda \in (\alpha(a), \beta(a))$, $\forall \epsilon \in (\alpha(b), \beta(b))$.

Лемма 8. Пусть $\alpha < \beta$ на I , $\lambda \in (\alpha(a), \beta(a))$, $\forall \epsilon \in (\alpha(b), \beta(b))$. Тогда найдется $x \in D_{AB} \cap D_{\beta}$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in D_{\alpha(a)\alpha(b)} \cap D_{\beta}$ такое, что $x'_0(a) = \alpha'(a)$, которое существует согласно лемме 5. Согласно лемме 4 найдется $x_1 \in D_{AB}$ такое, что $x_0 \leq x_1 \leq \beta$ на I . Отсюда следует, что $x_1 \in D_{\beta}$. Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть $\alpha < \beta$ на I , $\lambda \in (\alpha(a), \beta(a))$, $\forall \epsilon \in (\alpha(b), \beta(b))$. Тогда найдется единственное $x \in D_{AB} \cap D_{\beta\alpha}$.

Доказательство. Согласно предыдущей лемме множество $x \in D_{AB} \cap D_{\beta}$ не пусто. Обозначим

$$T = \left\{ t_0 \in (a, b) : \exists x \in D_{AB} \cap D_{\beta} \text{ такое, что } x(t_0) = \beta(t_0) \right\} \quad (4)$$

и пусть $t_1 = \inf T$. Очевидно, что $t_1 > a$. В силу компактности найдется $x_1 \in D_{AB} \cap D_\beta$ такое, что $x_1(t_1) = \beta(t_1)$. Покажем, что $x_1 \in D_\alpha$. Предположим, что это не так. Тогда $\alpha < x_1$ на всем интервале I . Согласно лемме, симметричной по x лемме 5, примененной к функциям x_1 и α на интервале $[t_1, b]$, найдется решение $x_2: [t_1, b] \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1) такое, что $x_2(t_1) = x_1(t_1)$, $x_2'(t_1) = x_1'(t_1)$, $x_2(b) = x_1(b)$, $\alpha \leq x_2 < x_1$ на (t_1, b) и $\exists t_2 \in (t_1, b)$ такое, что $\alpha(t_2) = x_2(t_2)$. Согласно лемме 2 для любого $\lambda_2 \in [x_2''(t_1), x_1''(t_1)]$ найдется решение x такое, что $x_2 < x < x_1$ на (t_1, b) и $x''(t_1) = \lambda_2$, причем из непрерывности следует, что если $x''(t_1)$ будет стремиться к $x_1''(t_1)$, то и $x'''(t_1)$ будет стремиться к $x_1'''(t_1)$. Выбрав λ_2 достаточно близко к $x_1''(t_1)$ и продолжив решение x влево, получим, что в силу условия 2.5 x будет меньше, чем x_1 , а в силу непрерывности x будет лежать достаточно близко к x_1 . Таким образом, на $[a, t_1)$ будут выполняться неравенства $\alpha < x < x_1$. Обозначим это решение через x_3 и применим к нему такое же рассуждение, как и к x_1 , только с заменой t на $-t$. Получим, что существует решение x_4 такое, что $x_4(a) = x_3(a)$, $x_4(t_1) = x_3(t_1) = \beta(t_1)$ и $\alpha < x_4 < x_3$ на интервалах (a, t_1) и (t_1, b) . Если сравнить решение x_4 и x_1 , то $\alpha < x_4 < x_1$ на $[a, t_1)$ и (t_1, b) , а в точке t_1 справедливо равенство $x_4(t_1) = x_1(t_1) = \beta(t_1)$. Выберем теперь точку $t_2 \in (a, t_1)$ достаточно близко к точке t_1 и возьмем решение задачи Коши для уравнения (1) (обозначим его x_5):

$$x_5(t_2) = \beta(t_2), \quad x_5'(t_2) = \beta'(t_2), \quad x_5''(t_2) = x_1''(t_1), \quad x_5'''(t_2) = x_1'''(t_1).$$

Если t_2 выбрано достаточно близко к t_1 , то в силу непрерывной зависимости можно добиться выполнения следующих условий: $\alpha < x_5 < \beta$ на $[a, t_2)$ и $(t_2, b]$, $x_5(a) < x_1(a) = A$, $x_5(b) < x_1(b) = B$. В силу леммы 4 найдется $x_6 \in D_{AB}$ такое, что $x_5 \leq x_6 \leq \beta$ на $[a, b]$, что противоречит выбору точки t_1 .

Пусть t_1 точка, в которой $x_1(t_1) = \beta(t_1)$, а t_2 точка, в которой $x_1(t_2) = \alpha(t_2)$. Тогда в силу условия 2.2 $t_1 < t_2$, откуда следует, что $x_1 \in D_{\beta\alpha}$. Кроме того, в силу условия 2.2 это решение единственно. Лемма доказана.

Замечание 3. Если при доказательстве леммы 9 вместо $\inf T$ взять $\sup T$, то получим решение $x_2 \in D_{AB} \cap D_{\alpha\beta}$. Такое решение тоже

единственно. Из условия 2.2 также следует, что других решений множество $D_{AB} \cap D_{\alpha} \cap D_{\beta}$ не содержит. Кроме того, из условия 2.2 следует, что $x'_1(a) > x'_2(a)$.

Лемма 10. Пусть выполняются условия леммы 9 и T множество (4). Тогда T интервал и решение $x \in D_{AB} \cap D_{\beta}$ такие, что $x(t_0) = \beta(t_0)$ непрерывно зависят от t_0 .

Доказательство. Обозначим $T_0 = \text{int} T$. Оно не пусто в лемме 4 и 5. T_0 можно представить как объединение открытых непересекающихся интервалов. Покажем, что T_0 состоит только из одного интервала. Предположим противное.

Пусть найдутся два таких интервала I_1 и I_2 и пусть $t_1 = \inf I_1$ и $t_2 = \inf I_2$. Применив то же рассуждение, что и в предыдущей лемме, получим существование $x_1, x_2 \in D_{AB} \cap D_{\beta\alpha}$ таких, что $x_1(t_1) = \beta(t_1)$, $x_2(t_2) = \beta(t_2)$, а это противоречит единственности такого решения. Аналогично показывается, что T не может иметь изолированных точек. Следовательно, T замкнутый интервал.

Пусть $t_0 \in T$. Тогда в силу условия 2.5 существует единственное $x \in D_{AB} \cap D_{\beta}$ такое, что $x(t_0) = \beta(t_0)$. Из этого, из условия компактности и условия 2.4 следует непрерывная зависимость этих решений от t_0 .

Лемма 11. Пусть $\alpha < \beta$ на I , $A \in (\alpha(a), \beta(a))$, $B \in (\alpha(b), \beta(b))$, $x_1 \in D_{AB} \cap D_{\beta\alpha}$ и $x_2 \in D_{AB} \cap D_{\alpha\beta}$. Тогда для любого $A_1 \in (x'_2(a), x'_1(a))$ найдутся единственные $x_3 \in D_{AB} \cap D_{\beta}$ и $x_4 \in D_{AB} \cap D_{\alpha}$ такие, что $x'_3(a) = x'_4(a) = A_1$. Эти решения будут удовлетворять неравенству $x_4 < x_3$ на (a, b) и непрерывно зависеть от A_1 .

Доказательство. Согласно предыдущей лемме при изменении t_0 от $\inf T$ до $\sup T$ решение $x \in D_{AB} \cap D_{\beta}$ такое, что $x(t_0) = \beta(t_0)$, будет непрерывно изменяться от $x'_1(a)$ до $x'_2(a)$. Следовательно, найдется $x_3 \in D_{AB} \cap D_{\beta}$ такое, что $x'_3(a) = A_1$. Единственность такого решения следует из условия 2.5. Аналогично найдется единственное $x_4 \in D_{AB} \cap D_{\alpha}$ такое, что $x'_4(a) = A_1$. Неравенство $x_4 < x_3$ на (a, b) следует из условия 2.5. Непрерывная зависимость x_3 и x_4 от A_1 следует из их единственности и условия компактности.

Теорема 2. Пусть $\alpha < \beta$ на I , $A \in (\alpha(a), \beta(a))$, $B \in (\alpha(b), \beta(b))$, $x_1 \in D_{AB} \cap D_{\beta\alpha}$, $x_2 \in D_{AB} \cap D_{\alpha\beta}$. Пусть далее $A \in [x'_2(a), x'_1(a)]$, $x_3 \in D_{AB} \cap D_{\beta}$, $x_4 \in D_{AB} \cap D_{\alpha}$, $x'_3(a) = x'_4(a) = A_1$ и $B_1 \in [x'_3(b), x'_4(b)]$. Тогда

найдется единственное $x \in D_{AB}$ такое, что $x'(a) = A_1$, $x'(b) = B_1$. Эти решения монотонны как по A_1 , так и по B_1 , и непрерывно зависят от A_1 и B_1 . Других решений множество D_{AB} не содержит.

Доказательство. Существование требуемого решения следует из лемм 2 и 11. Единственность следует из условия 2.4. Монотонность по B_1 следует из леммы 2, а монотонность по A_1 вытекает из симметрии. Непрерывная зависимость от A_1 и B_1 следует из единственности и условия компактности. То, что других решений множество D_{AB} не содержит, следует из условий 2.2 и 2.5.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда $\alpha < \beta$ на I , $A = \alpha(a)$, а $B \in (\alpha(b), \beta(b))$.

Лемма 12. Пусть $\alpha < \beta$ на I , $B \in (\alpha(b), \beta(b))$. Тогда найдется единственное $x \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\beta a}$. Эти решения непрерывно зависят от B .

Доказательство. Согласно лемме, симметричной по t лемме 5, найдется $x \in D_{\alpha(a)\alpha(b)} \cap D_{\beta}$ такое, что $x'(b) = \alpha'(b)$. Если выбрать $t_0 \in (a, b)$ и применить эту же лемму на интервале $[a, t_0]$, то получим решение x , удовлетворяющее условиям $x(a) = \alpha(a)$, $x(t_0) = \alpha(t_0)$, $x'(t_0) = \alpha'(t_0)$ и $x(t_1) = \beta(t_1)$ в некоторой точке $t_1 \in (a, t_0)$. В силу условия 2.5 такое решение единственно, и, следовательно, эти решения непрерывно зависят от t_0 . Если t_0 выбрать достаточно близко к b и продолжить x вправо, то оно достигнет точки b и на всем интервале I будет лежать между α и β (пересечь α оно не может в силу условия 2.5). С другой стороны, если t_0 выбрать достаточно близко к a , то x пересечет β раньше, чем достигнет точки b . Меняя непрерывно t_0 от a к b и применив те же рассуждения, что и в лемме 3, получим, что найдется t_0 такое, что соответствующее ему решение x продолжимо на I , лежит между α и β и $x(b) = B$. Кроме того, в силу построения, $x \in D_{\beta a}$. Единственность этого решения следует из условия 2.2, а непрерывная зависимость из единственности и условия компактности. Лемма доказана.

Пусть x - решение задачи Коши для уравнения (1) с условиями

$$x(a) = \alpha(a), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x''(a) = \alpha''(a), \quad x'''(a) = A_3, \quad (5)$$

где $A_3 \in (\alpha''(a), \alpha''(a))$. Тогда, если A_3 выбрано достаточно близко к $\alpha''(a)$, то в силу условия 2.3 x продолжимо на I и лежит между α

и β . Пусть $\Lambda_3^* = \sup \{ \Lambda_3 \in (\alpha'''(a), \infty) : x \in D \}$. Тогда в силу условия компактности решение задачи Коши (1), (5) при $\Lambda_3 = \Lambda_3^*$ будет принадлежать множеству D . Обозначим это решение через x_* . Нетрудно убедиться, что найдется $t_0 \in (a, b]$ такое, что $x_*(t_0) = \beta(t_0)$. Рассмотрим по очереди три возможности:

- a) $B < x_*(b)$;
- b) $B = x_*(b)$;
- c) $B > x_*(b)$.

Итак, пусть выполняется условие а). Тогда по лемме 1 найдется $x_2 \in D_{\alpha(a)B}$ такое, что $\alpha \leq x_2 \leq x_*$ на I , и, следовательно, $x_2(a) = \alpha(a)$, $x_2'(a) = \alpha'(a)$, $x_2''(a) = \alpha''(a)$. По лемме 5 существует $x_3 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_\beta$ такое, что $x_3'(a) = x_2'(a) = \alpha'(a)$ (т.е. $x_3 \in D_{\alpha\beta}$). Из условий 2.3 и 2.5 следует, что такие решения единственны.

Лемма 13а. Пусть $\alpha < \beta$ на I , $B \in (\alpha(b), \beta(b))$, выполняется условие а), $x_1 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\beta\alpha}$ и $x_3 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\alpha\beta}$. Пусть далее t_1 точка, в которой $x_1(t_1) = \beta(t_1)$, а t_3 - точка, в которой $x_3(t_3) = \beta(t_3)$. Тогда $t_1 < t_3$ и для любого $t_0 \in [t_1, t_3]$ найдется единственное $x \in D_{\alpha(a)B}$ такое, что $x(t_0) = \beta(t_0)$. Эти решения непрерывно зависят от t_0 .

Доказательство. Пусть $x_4, x_5 \in D_{\alpha(a)\alpha(b)} \cap D_\beta$ такие, что $x_4'(a) = \alpha'(a)$, $x_4'(b) = \alpha'(b)$, а t_4 и t_5 - точки такие, что $x_4(t_4) = \beta(t_4)$ и $x_5(t_5) = \beta(t_5)$. Тогда из условий единственности легко получаются неравенства $t_1 < t_4 < t_5 < t_3$. Согласно лемме 12, для любого $B_0 \in (\alpha(b), B)$ найдется единственное $x \in D_{\alpha(a)B_0} \cap D_{\beta\alpha}$ и при изменении B_0 от B до $\alpha(b)$ точка t_0 , в которой $x(t_0) = \beta(t_0)$, непрерывно зависит от B_0 . Это следует из единственности и условия 2.4. Следовательно, t_0 непрерывно изменяется от t_1 до t_4 . Поэтому, по лемме 4, для любого $t_0 \in [t_1, t_4]$ найдется $x \in D_{\alpha(a)B}$ такое, что $x(t_0) = \beta(t_0)$. Из теоремы 1 следует, что для любого $t_0 \in [t_4, t_5]$ найдется $x \in D_{\alpha(a)\alpha(b)}$ такое, что $x(t_0) = \beta(t_0)$. Поэтому, по лемме 4, найдется $x \in D_{\alpha(a)B}$ такое, что $x(t_0) = \beta(t_0)$. Пусть теперь опять $B_0 \in (\alpha(b), B)$. Тогда из условия а) и леммы 1 следует, что найдется $x \in D_{\alpha(a)B_0}$ такое, что $x'(a) = \alpha'(a)$ и $x''(a) = \alpha''(a)$, а из леммы 5 следует, что найдется $x \in D_{\alpha(a)B_0} \cap D_\beta$

такое, что $x'(a) = \alpha'(a)$. Это решение будет единственно и будет непрерывно зависеть от B_0 , и, следовательно, для любого $t_0 \in (t_5, t_3)$ найдутся $B_0 \in (\alpha(b), \beta)$ и $x \in D_{\alpha(a)B_0}$ такие, что $x(t_0) = \beta(t_0)$. Согласно лемме 4, найдется $x \in D_{\alpha(a)B}$ такое, что $x(t_0) = \beta(t_0)$.

Таким образом доказано, что для любого $t_0 \in [t_1, t_3]$ найдется $x \in D_{\alpha(a)B}$ такое, что $x(t_0) = \beta(t_0)$. Из условия 2.5 следует, что такое решение единственно, а из единственности и компактности следует, что оно непрерывно зависит от t_0 .

Лемма 14а. Пусть $\alpha < \beta$ на I , $B \in (\alpha(b), \beta(b))$, выполняется условие а) и $x_1 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\beta\alpha}$. Тогда для любого $A_1 \in (\alpha'(a), x'_1(a))$ найдутся единственные $x_4 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\alpha}$ и $x_5 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\beta}$ такие, что $x'_4(a) = x'_5(a) = A_1$, причем $x_4 < x_5$ на (a, b) .

Доказательство. Пусть $x_3 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\alpha\beta}$, t_1 точка, в которой $x_1(t_1) = \beta(t_1)$, а t_3 точка, в которой $x_3(t_3) = \beta(t_3)$. Согласно предыдущей лемме при изменении t_0 от t_1 до t_3 решение $x \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\beta}$ такое, что $x(t_0) = \beta(t_0)$ непрерывно изменяется от x_1 до x_3 , а $x'(a)$ непрерывно изменяется от $x'_1(a)$ до $x'_3(a) = \alpha'(a)$. Поэтому найдется $x_5 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\beta}$ такое, что $x'_5(a) = A_1$. По лемме, симметричной по x лемме 5, найдется $x_4 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\alpha}$ такое, что $x'_4(a) = x'_5(a) = A_1$ и $x_4 < x_5$ на (a, b) . Из условия 2.5 следует единственность таких решений.

Теорема 3а. Пусть $\alpha < \beta$ на I , $B \in (\alpha(b), \beta(b))$, выполняется условие а), $x_1 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\beta\alpha}$, $x_2 \in D_{\alpha(a)B}$ такое, что $x'_2(a) = \alpha'(a)$, $x_2''(a) = \alpha''(a)$, $x_3 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\alpha\beta}$. Тогда если $A_1 \in (\alpha'(a), x'_1(a))$, $x_4 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\alpha}$, $x_5 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\beta}$, $x'_4(a) = x'_5(a) = A_1$, $B_1 \in [x'_5(b), x'_4(b)]$ или $A_1 = \alpha'(a)$, $B_1 \in [x'_3(b), x'_2(b)]$, то найдется единственное $x \in D_{\alpha(a)B}$ такое, что $x'(a) = A_1$, $x'(b) = B_1$. Эти решения монотонны как по A_1 , так и по B_1 и непрерывно зависят от A_1 и B_1 . Других решений множество $D_{\alpha(a)B}$ не содержит.

Доказательство. Существование таких решений следует из леммы 14а и леммы 2. Единственность следует из условия 2.4, монотонность как по A_1 , так и по B_1 из условия 2.5, а непрерывная зависимость от A_1 и B_1 из условия компактности и единственности. То, что множество $D_{\alpha(a)B}$ других решений не содержит, следует из условий 2.2 и 2.5.

Случай б) во многом аналогичен случаю а). Отличие состоит в том, что в этом случае решения x_2 и x_3 совпадают. Поэтому будут справедливы леммы 13б и 14б, аналогичные леммам 13а и 14а, и следующая теорема.

Теорема 3б. Пусть $\alpha < \beta$ на I , $\forall \epsilon \in (\alpha(b), \beta(b))$, выполняется условие б), $x_1 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\beta\alpha'}$, $x_2 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\alpha\beta}$, $A_1 \in [\alpha'(a), x_1'(a)]$, $x_4 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\alpha'}$, $x_5 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\beta'}$, $x_4'(a) = x_5'(a) = A_1$, $B_1 \in [x_5'(b), x_4'(b)]$. Тогда найдется единственное $x \in D_{\alpha(a)B}$ такое, что $x'(a) = A_1$, $x'(b) = B_1$. Эти решения монотонны как по A_1 , так и по B_1 и непрерывно зависят от A_1 и B_1 . Других решений множество $D_{\alpha(a)B}$ не содержит.

Доказательства лемм 13б, 14б и теоремы 3б аналогичны доказательствам соответствующих утверждений для случая а) и поэтому не приводятся.

Перейдем теперь к рассмотрению случая с). Отметим, что, поскольку в этом случае заведомо $x_*(b) < \beta(b)$, то найдется $t_0 \in (a, b)$ такое, что $x_*(t_0) = \beta(t_0)$, и, следовательно, $x_* \in D_{\beta}$. В этом случае решение, соответствующее решению x_2 в случае а), не существует, а решение, которое соответствует решению x_3 в случае а), будет иметь несколько иной вид.

Лемма 15. Пусть $\alpha < \beta$ на I , $\forall \epsilon \in (\alpha(b), \beta(b))$ и выполняется условие с). Тогда найдется единственное $x_2 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\alpha\beta}$, причем $x_2'(a) > \alpha'(a)$.

Доказательство. Возьмем последовательность точек $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ таких, что $A_i \in (\alpha(a), \beta(a))$ для $i \in \{1, 2, \dots\}$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = \alpha(a)$. Согласно лемме 9 найдутся $y_i \in D_{A_i B} \cap D_{\alpha\beta}$. Устремив i к ∞ , в пределе получим функцию x_2 , которая, очевидно, будет принадлежать множеству $D_{\alpha(a)B} \cap D_{\alpha\beta}$. Единственность такого решения и выполнение неравенства $x_2'(a) > \alpha'(a)$ следуют из условий 2.2, 2.3 и 2.5.

Лемма 13с. Пусть $\alpha < \beta$ на I , $\forall \epsilon \in (\alpha(b), \beta(b))$, выполняется условие с), $x_1 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\beta\alpha'}$, $x_2 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_{\alpha\beta}$, t_1 точка, в которой $x_1(t_1) = \beta(t_1)$, а t_2 точка, в которой $x_2(t_2) = \beta(t_2)$. Тогда $t_1 < t_2$ и для любого $t_0 \in [t_1, t_2]$ найдется единственная $x \in D_{\alpha(a)B}$ такое, что $x(t_0) = \beta(t_0)$. Эти решения непрерывно зависят

от t_0 .

Доказательство. Обозначим через t_3 точку, в которой $x_*(t_3) = \beta(t_3)$. Пусть $x_4, x_5 \in D_{\alpha(a)\alpha(b)} \cap D_\beta$ такие, что $x'_5(a) = \alpha'(a)$, $x'_4(b) = \alpha'(b)$, а t_4 и t_5 точки, в которых $x_4(t_4) = \beta(t_4)$ и $x_5(t_5) = \beta(t_5)$. Тогда из условий единственности легко получаются неравенства $t_1 < t_4 < t_5 < t_3 < t_2$. То, что для любого $t_0 \in [t_1, t_3]$ найдется $x \in D_{\alpha(a)B} \cap D_\beta$ такое, что $x(t_0) = \beta(t_0)$, доказывается в точности так же, как и в лемме 13а. Возьмем $B_0 \in (x_*(b), B)$. Согласно лемме 15 найдется единственное $x \in D_{\alpha(a)B_0} \cap D_\beta$. Из единственности и компактности следует, что эти решения непрерывно зависят от B_0 , и при изменении B_0 от $x_*(b)$ до B эти решения непрерывно изменяются от x_* до x_2 . Из условия 2.4 следует, что точка, в которой эти решения касаются β , будет непрерывно изменяться от t_3 до t_2 . Следовательно, для любого $t_0 \in (t_3, t_2)$ найдется $x \in D_{\alpha(a)}$ такое, что $x(t_0) = \beta(t_0)$ и $x(b) < B$. Согласно лемме 4 найдется $x \in D_{\alpha(a)B}$ такое, что $x(t_0) = \beta(t_0)$. Таким образом, доказано, что для любого $t_0 \in [t_1, t_2]$ найдется $x \in D_{\alpha(a)B}$ такое, что $x(t_0) = \beta(t_0)$. Из условия 2.5 следует, что такое решение единственно, а из единственности и компактности следует, что оно непрерывно зависит от t_0 .

Лемма 14с. Пусть $\alpha < \beta$ на I , $B \in (\alpha(b), \beta(b))$, выполняется условие с), $x_1 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_\beta \alpha'$, $x_2 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_\beta$. Тогда для любого $A_1 \in (x'_2(a), x'_1(a))$ найдутся единственные $x_4 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_\alpha$ и $x_5 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_\beta$ такие, что $x'_4(a) = x'_5(a) = A_1$, причем $x_4 < x_5$ на (a, b) .

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 14а.

Теорема 3с. Пусть $\alpha < \beta$ на I , $B \in (\alpha(b), \beta(b))$, выполняется условие с), $x_1 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_\beta \alpha'$, $x_2 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_\beta$, $A_1 \in (x'_2(a), x'_1(a))$, $x_4 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_\alpha$, $x_5 \in D_{\alpha(a)B} \cap D_\beta$, $x'_4(a) = x'_5(a) = A_1$, $B_1 \in (x'_5(b), x'_4(b))$. Тогда найдется единственное $x \in D_{\alpha(a)B}$ такое, что $x'(a) = A_1$, $x'(b) = B_1$. Эти решения монотонны как по A_1 , так и по B_1 и непрерывно зависят от A_1 и B_1 . Других решений множество $D_{\alpha(a)B}$ не содержит.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3а с тем отличием, что вместо леммы 14а используется лемма 14с.

Перейдем к рассмотрению случая, когда $\alpha < \beta$ на I , $A = \alpha(a)$, $B = \beta(b)$. При этом варианты, которые рассматривались в предыдущем случае, будут возникать на обеих сторонах интервала I . Итак, пусть y решение задачи Коши для уравнения (1), удовлетворяющее условиям $y(a) = \alpha(a)$, $y'(a) = \alpha'(a)$, $y''(a) = \alpha''(a)$, и найдется $t_* \in (a, b]$ такое, что $y(t_*) = \beta(t_*)$. Пусть далее z решение задачи Коши для уравнения (1) с условиями $z(b) = \beta(b)$, $z'(b) = \beta'(b)$, $z''(b) = \beta''(b)$ и найдется $t^* \in [a, b)$ такое, что $z(t^*) = \alpha(t^*)$. Вот девять возможных вариантов:

- a) $y(b) = \beta(b)$, $y'(b) > \beta'(b)$, $z(a) = \alpha(a)$, $z'(a) > \alpha'(a)$;
- b) $y(b) = \beta(b)$, $y'(b) > \beta'(b)$, $z(a) = \alpha(a)$, $z'(a) = \alpha'(a)$;
- c) $y(b) = \beta(b)$, $y'(b) > \beta'(b)$, $z(a) > \alpha(a)$;
- d) $y(b) = \beta(b)$, $y'(b) = \beta'(b)$, $z(a) = \alpha(a)$, $z'(a) > \alpha'(a)$;
- e) $y(b) = \beta(b)$, $y'(b) = \beta'(b)$, $z(a) = \alpha(a)$, $z'(a) = \alpha'(a)$;
- f) $y(b) = \beta(b)$, $y'(b) = \beta'(b)$, $z(a) > \alpha(a)$;
- g) $y(b) < \beta(b)$, $z(a) = \alpha(a)$, $z'(a) > \alpha'(a)$;
- h) $y(b) < \beta(b)$, $z(a) = \alpha(a)$, $z'(a) = \alpha'(a)$;
- i) $y(b) < \beta(b)$, $z(a) > \alpha(a)$.

В каждом из этих случаев существуют решения $x_1 \in D_{\alpha(a)\beta(b)} \cap D_{\beta\alpha}$ и $x_2 \in D_{\alpha(a)\beta(b)} \cap D_{\alpha\beta}$. Заметим, что в случаях d) и f) решения y и x_2 совпадают, в случаях b) и h) совпадают решения z и x_2 , а в случае e) совпадают все три решения y , z и x_2 . В случаях a), b) и c) множество $\{x \in D_{\alpha(a)\beta(b)} : x'(a) = \alpha'(a)\}$ состоит более, чем из одного элемента, но в нем обязательно есть минимальный элемент и он совпадает с y , а в случаях a), d) и g) множество $\{x \in D_{\alpha(a)\beta(b)} : x'(b) = \beta'(b)\}$ состоит более, чем из одного элемента, но в нем есть максимальный элемент, совпадавший с z .

Ниже без доказательства приведена теорема, которая справедлива для каждого из этих случаев. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теорем 3а, 3б и 3с и поэтому опущено.

Теорема 4. Пусть $\alpha < \beta$ на I , $x_1 \in D_{\alpha(a)\beta(b)} \cap D_{\beta\alpha}$, $x_2 \in D_{\alpha(a)\beta(b)} \cap D_{\alpha\beta}$, $A_1 \in [x_2'(a), x_1'(a)]$, $x_3 \in D_{\alpha(a)\beta(b)} \cap D_{\beta\alpha}$, $x_4 \in D_{\alpha(a)\beta(b)} \cap D_{\alpha\beta}$ такие, что $x_3'(a) = x_4'(a) = A_1$, причем, если $A_1 = \alpha'(a)$, то $x_4 = y$. Пусть далее $B_1 \in [x_3'(b), x_1'(b)]$. Тогда найдется

единственное $x \in D_{\alpha(a)\beta(a)}$ такое, что $x'(a)=A_1$, $x'(b)=B_1$. Эти решения монотонны как по A_1 , так и по B_1 и непрерывно зависят от A_1 и B_1 . Множество $D_{\alpha(a)\beta(a)}$ других решений не имеет.

Все возможные расположения точек $A \in [\alpha(a), \beta(a)]$ и $B \in [\alpha(b), \beta(b)]$ рассмотрены в теоремах 1-4 или могут быть сведены к ним с помощью замен $t \rightarrow -t$ и (или) $x \rightarrow -x$. Таким образом, теоремы 1-4 и симметричные им полностью описывают множество решений D , которое, таким образом, является связным и компактным.

Литература

1. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Рига: Зинатне, 1988. 212 с.
2. Лепин А.Я. Краевая задача для уравнения третьего порядка (в настоящем сборнике).

L.Lepin. On the structure of the set of solutions of the fourth order ordinary differential equation.

Summary. The set of solution of differential equation of fourth order

$$x^{IV} = f(t, x, x', x'', x'''), \quad (1)$$

lying between two given solutions of equation (1).
1991 MSC

L.Lepins. Par atrisinājumu kopas struktūru 4. kārtas parastam diferenciālvienādojumam ar funkcionāliem robežnosacījumiem.

Anotācija. Pētīta ceturrtās kārtas diferenciālvienādojuma

$$x^{IV} = f(t, x, x', x'', x''') \quad (1)$$

to atrisinājumu kopa, kuri atrodas starp diviem uzdotiem vienādojuma (1) atrisinājumiem.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, 6.Райня, 29

Поступила 12.12.94

ОБ ОТСУТСТВИИ МОНОТОННЫХ РЕШЕНИЙ
ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Л.А.Лепин

Аннотация. Для краевой задачи

$$z'' + \left(N - 2 - \frac{4}{\beta - 1}\right) z' - \frac{2}{\beta - 1} \left(N - 2 - \frac{2}{\beta - 1}\right) + z^\beta - \frac{1}{2} e^{2s} z' = 0,$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} z(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) < \infty$$

($\beta > 1$, N - размерность пространства),

возникающей при изучении автомодельных решений полулинейного уравнения теплопроводности, доказано отсутствие монотонных решений.

УДК 517.927.4+956.4

При изучении автомодельных решений полулинейного уравнения теплопроводности в N -мерном пространстве

$$u_t = \Delta u + u^\beta,$$

где $\beta > 1$, возникает краевая задача

$$x'' + \frac{N-1}{t} x' - \frac{1}{2} t x' - \frac{1}{\beta-1} x + x^\beta = 0, \quad (1)$$

$$x'(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (2)$$

С помощью замены переменных

$$x(t) = z(t) t^{-\frac{2}{\beta-1}}, \quad t = e^s,$$

задача (1)-(2) сводится к задаче

$$z'' + \left(N - 2 - \frac{4}{\beta - 1}\right) z' - \frac{2}{\beta - 1} \left(N - 2 - \frac{2}{\beta - 1}\right) + z^\beta - \frac{1}{2} e^{2s} z' = 0, \quad (3)$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} z(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) < \infty. \quad (4)$$

В работе [1] было показано, что если $N \leq 2 + \frac{4}{\beta - 1}$, то задача (1)-(2), а, следовательно, и задача (3)-(4), решений не имеет.

Случай $N > 2 + \frac{4}{\beta-1}$ исследовался в работах [2, 3]. Там было установлено, что если

$$2 + \frac{4}{\beta-1} < N < 6 + \frac{4}{\beta-1} + 4 \sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}}$$

то задача (3)-(4) имеет бесконечное множество решений, а если

$$6 + \frac{4}{\beta-1} + 4 \sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}} \leq N < 10 + \frac{6}{\beta-1}$$

то задача (3)-(4) имеет конечное число решений. Различные решения отличаются друг от друга числом экстремумов. При этом открытым оставался вопрос о существовании монотонных решений задача (3)-(4). В данной работе дается ответ на этот вопрос.

Теорема. Задача (3)-(4) монотонных решений не имеет.

Доказательство. Предположим противное, и пусть $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ монотонное решение задачи (3)-(4). Асимптотические исследования, проведенные способом, аналогичным тому, который применялся в [4], показывают, что решение z должно иметь асимптотики

$$z(s) = C_1 e^{\frac{2s}{\beta-1}} (1 + \omega_1(s)), \quad (5)$$

$$z(s) = C_2 (1 + \omega_2(s)), \quad (6)$$

где C_1 и C_2 произвольные положительные постоянные, а ω_1 и ω_2 имеют пределы

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \omega_1(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \omega_2(s) = 0,$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \omega_1'(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \omega_2'(s) = 0.$$

Сделаем в задаче (3)-(4) замену переменных

$$y(s) = \frac{z'(s)}{z(s)}$$

Учитывая асимптотики (5) и (6), получим краевую задачу

$$y'' + \left(N - 2 - \frac{4}{\beta-1} - \frac{1}{2} e^{2s} \right) y' + 2 \left(N - 2 - \frac{2}{\beta-1} - \frac{1}{2} e^{2s} \right) y - (\beta-1) \left(N - 2 - \frac{4}{\beta-1} - \frac{1}{2} e^{2s} \right) y^2 + (\beta-3) y y' - (\beta-1) y^3 = 0, \quad (7)$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} y(s) = \frac{2}{\beta-1} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} y(s) = 0 \quad (8)$$

Кроме того, можно показать, что решение y задачи (7)-(8),

соответствующее решению z задачи (3)-(4), должно иметь асимптотики

$$Y(s) = \frac{2}{\beta-1} - C_3 e^{2s} (1 + \omega_3(s)), \quad (9)$$

$$Y(s) = C_4 e^{-2s} (1 + \omega_4(s)), \quad (10)$$

где C_3 и C_4 положительные постоянные, а функции ω_3 и ω_4 имеют пределы

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \omega_3(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \omega_4(s) = 0.$$

Для дальнейшего доказательства потребуются следующая лемма.

Лемма 1. Для любого $C_3 \in (0, \infty)$ существует единственное решение уравнения (7), имеющее асимптотику (9). Для любого $C_4 \in (0, \infty)$ существует единственное решение уравнения (7), имеющее асимптотику (10).

Лемма доказывается путем сведения уравнения (7) к соответствующему интегральному уравнению и применения методов, аналогичных тем, которые применялись в работе [5].

Продолжим доказательство теоремы. Для этого рассмотрим семейство функций

$$Y_C = \frac{2}{\beta-1+Ce^{2s}}$$

Нетрудно проверить, что семейство $\{Y_C\}$ непрерывно и монотонно убывает по C , и, кроме того, при любом $C \in (0, \infty)$ функция Y_C является нижней функцией (см. [6]) для уравнения (7).

Сформулируем и докажем еще одну лемму, которая будет необходима в дальнейшем.

Лемма 2. Возьмем произвольное $C_0 \in (0, \infty)$ и точки $s_1, s_2 \in (-\infty, \infty)$, $s_1 < s_2$. Предположим, что $Y(s_1) \geq Y_{C_0}(s_1)$ и $Y(s_2) \geq Y_{C_0}(s_2)$. Тогда $Y(s) \geq Y_{C_0}(s)$ при всех $s \in [s_1, s_2]$.

Доказательство. Предположим, что это не так, и в некоторой точке $s_0 \in (s_1, s_2)$ $Y(s_0) < Y_{C_0}(s_0)$. Нетрудно убедиться, что $\lim_{C \rightarrow \infty} Y_C(s) = 0$ на всей числовой прямой, поэтому найдется $C \in (0, \infty)$ такое, что $Y(s) > Y_C(s)$ на всем интервале $[s_1, s_2]$. Пусть

$$C_H = \inf \left\{ C \in (0, \infty) : Y(s) > Y_C(s) \text{ при всех } s \in [s_1, s_2] \right\}.$$

Так как $Y_C(s_0) \leq Y(s_0) < Y_{C_0}(s_0)$, то $C_H > C_0$, а, следовательно,

$Y_{C_H}(s_1) < Y_{C_0}(s_1) \leq y(s_1)$ и $Y_{C_H}(s_2) < Y_{C_0}(s_2) \leq y(s_2)$. В силу определения C_H $Y_{C_H}(s) \leq y(s)$ при всех $s \in [s_1, s_2]$ и найдется $s_* \in (s_1, s_2)$ такое, что $Y_{C_H}(s_*) = y(s_*)$ и $Y'_{C_H}(s_*) = y'(s_*)$, а это противоречит единственности решения задачи Коши для уравнения (7).

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть $C_* = \frac{(\beta-1)^2}{2} C_3$. Тогда Y_{C_*} имеет асимптотику

$$Y_{C_*}(s) = \frac{2}{\beta-1} - C_3 e^{2s} (1 + \omega_5(s)),$$

где $\lim_{s \rightarrow -\infty} \omega_5(s) = 0$. Покажем, что $y(s) < Y_{C_*}(s)$ в некоторой окрестности $-\infty$. Если это не так, то из леммы 2 следует, что $Y_{C_*}(s) \leq y(s)$ в некоторой окрестности $-\infty$. Отметим, что, так как ни при каком C Y_C не является решением уравнения (7), то Y_{C_*} и y не совпадают. Так как Y_{C_*} нижняя функция для уравнения (7), а y решение, то согласно [7, с.146] найдется решение уравнения (7), лежащее между Y_{C_*} и y , и, следовательно, имеющее на $-\infty$ асимптотику (9) с той же константой C_3 . Это противоречит лемме 1.

Докажем теперь, что $y(s) < Y_{C_*}(s)$ на всей числовой прямой. Предположим, что это не так, и пусть $s_0 \in \mathbb{R}$ таково, что $Y(s_0) = Y_{C_*}(s_0)$ и $y(s) < Y_{C_*}(s)$ на $(-\infty, s_0)$. Если выбрать $C_0 > C_*$ достаточно близко к C_* , то функция Y_{C_0} на $-\infty$ будет иметь асимптотику

$$Y_{C_0}(s) = \frac{2}{\beta-1} - \frac{2}{(\beta-1)^2} C_0 (1 - \omega_6(s)),$$

где $\lim_{s \rightarrow -\infty} \omega_6(s) = 0$. Так как $\frac{2}{(\beta-1)^2} C_0 > C_3$, то в окрестности $-\infty$ будет выполняться неравенство $Y_{C_0}(s) < y(s)$. В точке s_0 также будет $Y_{C_0}(s_0) < y(s_0)$ в силу монотонности семейства Y_C по C . С другой стороны, так как Y_C непрерывно по C , а C_0 выбрано достаточно близко к C_* , то найдется точка $s_* \in (-\infty, s_0)$, в которой будет выполняться неравенство $y(s_*) < Y_{C_0}(s_*)$. Это противоречит лемме

2.

Пусть теперь $C^* = 2/C_4$. Тогда Y_{C^*} имеет асимптотику

$$Y_{C^*}(s) = C_4 e^{-2s} (1 + \omega_7(s)),$$

где $\lim_{s \rightarrow +\infty} \omega_7(s) = 0$. Так же, как и выше, можно показать, что $y(s) < Y_{C^*}(s)$ на всей числовой прямой. Нетрудно убедиться, что

$$C_* = \sup \left\{ C \in (0, \infty) : y(s) < Y_C(s) \text{ при всех } s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Точно так же

$$C^* = \sup \left\{ C \in (0, \infty) : y(s) < Y_C(s) \text{ при всех } s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Следовательно, $C_* = C^*$

Если теперь выбрать $C_0 \in (C_*, \infty)$ достаточно близко к C_* , то, как и выше, получим, что $Y_{C_0}(s) < y(s)$ в окрестностях $-\infty$ и $+\infty$, и в то же время найдутся точки, в которых $y(s) < Y_{C_0}(s)$. Это противоречит лемме 2.

Теорема доказана.

Литература

1. Giga Y., Kohn R.V. Asymptotically self-similar blow-up for a semilinear heat equations. - Comm. Pure and Appl. Math., 1985. - Vol. 38. P. 297-319.
2. Лепин Л.А. Счетный спектр собственных функций нелинейного уравнения теплопроводности с распределенными параметрами. Дифференц. уравнения, 1988. Т. 24, N 7. С. 1226-1234.
3. Лепин Л.А. Автомодельные решения полулинейного уравнения теплопроводности. Математ. моделирование, 1990. Т. 2, N 3. - С. 63-74.
4. Адытов М.М., Клоков Ю.А., Михайлов А.П. Исследование автомодельных тепловых структур в нелинейной среде. М., 1982 (Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР), N 108.
5. Гриванс Г.П., Клоков Ю.А. Об одной начальной задаче для уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью. Латв. мат. ежегодник. Рига: Зинатне, 1984. Вып. 28. С. 14-24.
6. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач

обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: Зинатне, 1978. 184 с.

7. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Рига: Зинатне, 1988. 212 с.

L.Lepin. Non-existence of monotonous solutions of nonlinear boundary value problem.

Summary. The absence of monotone solutions of boundary value problem

$$z'' + \left(N - 2\frac{4}{\beta - 1}\right) z' - \frac{2}{\beta - 1} \left(N - 2\frac{2}{\beta - 1}\right) + z^\beta - \frac{1}{2} e^{2s} z' = 0,$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} z(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) < \infty$$

($\beta > 1$, N is dimension of space),

which arises while investigating self-similar solutions of semilinear heat equation, is proved.

1991 MSC 34B99

L.Lepins. kārtas vienādojumam ar funkcionāliem robežnosacījumiem.

Anotācija. Robežproblēmai

$$z'' + \left(N - 2\frac{4}{\beta - 1}\right) z' - \frac{2}{\beta - 1} \left(N - 2\frac{2}{\beta - 1}\right) + z^\beta - \frac{1}{2} e^{2s} z' = 0,$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} z(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) < \infty$$

($\beta > 1$, N - telpas dimensiju skaits),

kura rodas, pētot puslineāra siltumvadēšanas vienādojuma automodeļu atrisinājumus, pierādīta monotonu atrisinājumu neeksistence.

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, 6.Райня, 29

Поступила 19.12.94

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ ОБРАЩЕНИЯ
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ И ГЕЛИОСЕЙСМИЧЕСКИХ ДАННЫХ

А.А.Степанов

Аннотация. Рассматриваются способы выбора параметра регуляризации в методе оптимально локализованного усреднения и методе сглаживающего функционала Тихонова при решении обратных задач геофизики и гелиосейсмологии.

УДК 519.612.4:642.3:520.88

1. В прикладных задачах очень часто возникает необходимость решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода, в частности, обратная двухточечная краевая задача фото-акустической спектроскопии сводится к решению уравнения с ядром экспоненциального типа [1]. При этом, как правило, информацию о правой части уравнения

$$\int_a^b K(t,s)u(s)ds=f(t), \quad t \in [c,d] \quad (1)$$

получают из эксперимента путем измерений, поэтому фактически исходными данными задачи является конечный набор чисел $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_N$, имеющих вид

$$\tilde{f}_j \int_a^b K_j(s)u(s)ds + \epsilon_j = f_j + \epsilon_j, \quad (2)$$

где $K_j(s)=K(t_j,s)$, $f_j=f(t_j)$, $c \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N \leq d$, ϵ_j -ошибки измерений, $u, K_j \in L_2[a,b]$. Аналогичная ситуация возникает в обратных задачах геофизики [2-3] и сейсмологии Солнца [4-5], где необходимо определить функцию $u(s)$ по конечной совокупности линейных функционалов вида (2), однако специфика этих задач заключается в том, что функция $f(t)$ может быть задана только для целочис-

ленных значений t из интервала $[c, d]$. Очевидно, что в таком случае любое решение может быть представлено в виде:

$$u(s) = \sum_{j=1}^N \kappa_j K_j(s) + u^1(s), \quad (3)$$

где функция $u^1(s)$ ортогональна функциям $K_j(s)$; коэффициенты разложения κ_j удовлетворяют уравнению

$$Q\kappa = f, \quad (4)$$

где $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$, $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N)^T$ — знак транспонирования, Q — матрица $N \times N$, элементы которой q_{jk} имеют вид

$$q_{jk} = \int_a^b K_j(s) K_k(s) ds, \quad j, k = 1, 2, \dots, N.$$

Поскольку матрица Q может быть вырожденной или плохо обусловленной, то вектор κ не может быть определен непосредственно по формуле $\kappa = Q^{-1}f$, $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_N)^T$

Так как правая часть интегрального уравнения (1) задана с некоторой погрешностью, то, как хорошо известно, такая задача является некорректной и, в принципе, может быть решена методом регуляризации Тихонова [6-7]. Поскольку данные задачи имеют вид (2), то целесообразно использовать сглаживающий функционал Тихонова в полудискретной форме:

$$\sum_{j=1}^N [(Ku)(t_j) - \tilde{f}_j]^2 + \alpha \|u\|_{L_2[a, b]}^2, \quad (5)$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. Такой подход использован в работе [8], см. также [9]. В таком случае регуляризованное приближенное решение $u_\alpha(s)$, $s \in [a, b]$, минимизирующее на пространстве $L_2[a, b]$ функционал (5), имеет вид [8-9]:

$$u_\alpha(s) = P(s)(Q + \alpha E)^{-1} \tilde{f}, \quad (6)$$

где $P(s) = (K(t_1, s), K(t_2, s), \dots, K(t_N, s))$, E — единичная $N \times N$ матрица.

Видно, что приближенное решение имеет аналогичный формуле (3) вид, в которой $u^1(s) \neq 0$, $s \in [a, b]$, и коэффициенты разложения по базисным функциям $K_j(s)$ есть функции параметра α :

$$u_{\alpha}(s) = \sum_{j=1}^N \tilde{k}_j(\alpha) K_j(s), \quad \tilde{k}(\alpha) = (\tilde{k}_1(\alpha), \tilde{k}_2(\alpha), \dots, \tilde{k}_N(\alpha))^T, \\ \tilde{k}(\alpha) = (Q + \alpha E)^{-1} \tilde{f}.$$

Кроме того, из (6) следует, что $u_{\alpha}(s)$ есть линейная комбинация данных, т.е.

$$u_{\alpha}(s) = \sum_{j=1}^N c_j(\alpha, s) \tilde{f}_j, \quad (7)$$

где

$$c(\alpha, s) = P(s)(Q + \alpha E)^{-1}, \quad c(\alpha, s) = (c_1(\alpha, s), \dots, c_N(\alpha, s)).$$

Далее, подставляя (2) и (4) в (7), можем записать, что

$$u_{\alpha}(s) = P(s)(Q + \alpha E)^{-1} Qk + P(s)(Q + \alpha E)^{-1} c = u_{\alpha}^1(s) + u_{\alpha}^2(s), \quad (8)$$

где $c = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T$. Ясно, что второе слагаемое $u_{\alpha}^2(s)$ в формуле (8) представляет собой ошибку в приближенном решении, обусловленную погрешностью измерений. По аналогии с работами [2-5] будем называть величину

$$\Lambda(\alpha, s) = |P(s)(Q + \alpha E)^{-1}| \left(\sum_{j=1}^N c_j^2(\alpha, s) \right)^{1/2} \quad (9)$$

коэффициентом увеличения ошибки.

Рассмотрим вопрос выбора параметра регуляризации α таким образом, чтобы, во-первых, гарантировать сходимость к нулю величины $|u^2(s)|$ при стремлении уровня погрешности данных $\delta =$

$\left(\sum_{j=1}^N \epsilon_j^2 \right)^{1/2}$ к нулю и, во-вторых, при фиксированном $\delta > 0$ обеспечить минимальную ошибку в решении. Пусть $Q = U \cdot D \cdot U^T$ ортогональное разложение матрицы Q (D - диагональная, U - ортогональная $N \times N$ матрицы). Тогда для коэффициента увеличения ошибки $\Lambda(\alpha, s)$ справедливо представление:

$$\Lambda(\alpha, s) = \sum_{j=1}^N z_j^2(s) / (d_j + \alpha)^2, \quad (10)$$

где d_j - элементы диагональной матрицы D - собственные значения матрицы Q , $z(s) = (z_1(s), z_2(s), \dots, z_N(s))$, $z(s) = PU$. Отсюда следует, что при фиксированном $\delta > 0$ и $\alpha \rightarrow 0$ в зависимости от числа обусловленности μ матрицы Q , равного

$$\mu = \max_{1 \leq j, k \leq N} |d_j| / |d_k|,$$

ошибка в решении может быть достаточно большой или даже бесконечной. Аналогичная ситуация может возникнуть и в случае, если при условии сходимости δ к 0 параметр α убывает слишком быстро. Отсюда следует важный вывод, что параметр α не может быть произвольным и должен быть согласован с уровнем погрешности данных δ . Очевидно, что параметр α должен быть таким, что величина $\Lambda(\alpha, s)\delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, $s \in [a, b]$ и является минимально возможной при фиксированном δ . Из формулы (10) видно, что $\Lambda(\alpha, s)$ монотонно убывает с ростом α и достигает минимума на бесконечности. Однако мы должны учитывать, что значения α ограничены условием величины невязки, а именно,

$$\rho(\alpha) = \sum_{j=1}^N [(Ku_\alpha)(t_j) - \tilde{f}_j]^2 \leq \delta^2 \quad (11)$$

Для определения множества допустимых α заметим, что из формулы (6) следует, что вектор-столбец $f_\alpha = ((Ku_\alpha)(t_1), \dots, (Ku_\alpha)(t_N))^T$ имеет вид $f_\alpha = Q(Q+\alpha E)^{-1}\tilde{f}$. Откуда имеем равенство $f_\alpha = \tilde{f} \alpha(Q+\alpha E)^{-1}$ и поэтому

$$\rho(\alpha) = \alpha^2 \tilde{f}^T (Q+\alpha E)^{-1} \tilde{f} = \sum_{j=1}^N \alpha^2 v_j^2 / (d_j + \alpha)^2,$$

где $v = U^{-1}\tilde{f}$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)$.

Нетрудно убедиться, что функция $\rho(1/\alpha)$ монотонно убывает с ростом $1/\alpha$, таким образом, $\rho(\alpha) \leq \delta^2$ при $\alpha \leq \alpha^*$, где α^* есть корень уравнения $\rho(\alpha^*) = \delta^2$. Отсюда окончательно получаем, что оптимальным в смысле минимума коэффициента увеличения ошибки является хорошо известный в теории некорректных задач [6-7] принцип невязки выбора параметра регуляризации.

2. Рассмотрим теперь первое слагаемое в представлении (8) для регуляризованного решения. Имеем

$$u_\alpha^1(s) = \sum_{j=1}^N c_j(\alpha, s) f_j = \sum_{j=1}^N c_j(\alpha, s) \int_a^b K_j(x) u(x) dx, \text{ т.е.}$$

$$u_\alpha^1(s) = \int_a^b \Lambda_\alpha(s, x) u(x) dx, \quad (12)$$

где

$$A_{\alpha}(s, x) = \sum_{j=1}^N c_j(\alpha, s) K_j(x), \quad s, x \in [a, b].$$

Из представления (12) следует, что регуляризованное решение есть некоторое среднее точного решения; если функция $A_{\alpha}(s, x)$, которую будем называть усредняющим ядром, является локализованной в окрестности точки s , то она характеризует получаемое решение. Таким образом, представление (12) может быть использовано для выяснения разрешающей способности метода. Ясно, что в идеале максимальное разрешение достигается, когда $A_{\alpha}(s, x)$ при каждом s есть δ -функция Дирака. Из определения $u_{\alpha}^1(s)$ видно, что δ -функция получается при $\alpha \rightarrow 0$, однако в этом случае возрастает второе слагаемое, т.е. ошибка, обусловленная неточностью исходных данных. Следовательно, метод регуляризации по существу заключается в компромиссе между разрешением и коэффициентом увеличения ошибки, при этом параметр регуляризации α регулирует этот компромисс. Как показано выше, принцип невязки выбора параметра регуляризации является оптимальным с точки зрения минимума коэффициента увеличения ошибки.

Получение коэффициентов c_j в формуле (7) мы можем и не связывать с методом регуляризации в форме (2) и пытаться выбирать их оптимально в некотором смысле. Для этого необходимо определить количественный критерий разрешающей способности, такой подход впервые был предложен в [2-3] при решении обратной задачи интерпретации геофизических данных и применен позднее для обработки гелиосейсмических данных [4], см. также работу [10], в которой приведены численные расчеты усредняющих ядер и коэффициентов увеличения ошибки для различных методов.

Согласно методу оптимально локализованного усреднения коэффициенты c_j определяются из условия минимума функционала [2-3]

$$\int_a^b A^2(s, x) J(s, x) dx + \alpha \sum_{j=1}^N c_j^2(s) \quad (13)$$

где

$$A(s, x) = \sum_{j=1}^N c_j(s) K_j(x), \quad \int_a^b A(s, x) dx = 1, \quad \alpha > 0.$$

Критериальную функцию $J(s, x)$ выбирают так, чтобы обеспечить локализованность усредняющего ядра $\Lambda(s, x)$, обычно $J(s, x) = 12(s-x)^2$. Вопрос выбора функции $J(s, x)$ подробно дискутируется в работах [2-3].

Условие минимума функционала (13) приводит к необходимости решения системы линейных алгебраических уравнений $N \times N$ при каждом $s \in [a, b]$. В работах [11-13] предложен более экономичный подход, при котором матрица системы не зависит от s , а именно, вместо (13) используется функционал следующего вида:

$$\int_a^b [\Lambda(s, x) - T(s, x)]^2 dx + \alpha \sum_{j=1}^N c_j^2(s), \quad (14)$$

где $T(s, x)$ критериальная функция, в работе [11] это δ -функция, в работах [12-13] использована функция Гаусса. Кроме того, в работе [14] сравниваются численные результаты, полученные различными подходами в методе оптимально локализованного усреднения и методом регуляризации Тихонова. Однако к настоящему времени в литературе не дано строгого обоснования для метода усреднения способов выбора критериальной функции и параметра α , играющего роль параметра регуляризации. Рассмотрим решение этой задачи для метода усреднения в форме (14).

Из условия минимума функционала (14) получаем, что вектор-столбец $c(\alpha, s) = (c_1(\alpha, s), \dots, c_N(\alpha, s))^T$ определяется равенством $c(\alpha, s) = (Q + \alpha E)^{-1} R(s)$, где $R(s) = (R_1(s), \dots, R_N(s))^T$ и

$$R_j(s) = \int_a^b K_j(x) T(s, x) dx.$$

Откуда в силу симметричности матрицы Q получаем, что

$$v_\alpha(s) = \int_a^b T(s, x) u_\alpha(x) dx.$$

Таким образом, выбирая критериальную функцию $T(s, x)$ в виде δ -функции, получаем схему регуляризации Тихонова в полудискретной форме (2). В этом случае для выбора параметра α можно использовать различные способы, разработанные ранее в теории некорректных задач, см., например, [7], а также обзор [15].

3. Рассмотрим вопрос о сходимости приближенного решения при $\delta \rightarrow 0$. Из формулы (8) следует, что

$$u_{\alpha}(s) = P(s)k - \alpha P(s)(Q + \alpha E)^{-1}k + u_{\alpha}^2(s), \quad (15)$$

откуда получаем следующую оценку:

$$|u_{\alpha}(s) - \bar{u}(s)| \leq \Lambda(\alpha, s)(\delta + \alpha \|k\|), \quad s \in [a, b],$$

где $\bar{u}(s)$ есть точное решение задачи, получаемое из (3) при $u^1(s) = 0$, $s \in [a, b]$. Следовательно, регуляризованное решение при стремлении правой части (16) к 0 сходится к решению задачи (2), имеющему в $L_2[a, b]$ минимальную норму. Так как величина $\|k\|$ заранее не известна и во всем пространстве L_2 может быть произвольно большой, то неравенство (16) показывает, что, во-первых, сходимость может быть как угодно медленной и, во-вторых, ошибка в приближенном решении при фиксированном $\delta > 0$ может быть сколь угодно большой. Эти выводы полностью согласуются с результатами, полученными в [16] для некорректных задач. Таким образом, во всем пространстве $L_2[a, b]$ не существует равномерной оценки погрешности решения. Однако, если априорно известна оценка $\|k\| \leq M$, то можно оптимально выбрать параметр регуляризации α в том смысле, что будет минимальна величина $\Lambda(\alpha, s)(\delta + \alpha M)$. Очевидно, что в таком случае принцип невязки уже не будет оптимальным, поскольку общая ошибка в решении может быть уменьшена за счет улучшения разрешающей способности и некоторого увеличения коэффициента ошибки $\Lambda(\alpha, s)$. Таким образом, при известной величине M возможно не только оптимально выбрать параметр регуляризации α , но и конструктивно указать оценку погрешности решения.

В заключение автор выражает благодарность Dr. J.Christensen-Dalsgaard и P.C.Hansen за постановку задачи и обсуждение результатов.

Литература

- Новиков В.П., Степанов А.А. Обратная задача оптико-акустической диагностики полупроводников // Математика. Дифференциальные уравнения. Рига: Изд-во Латв. ун-та. - 1992. - Т.570. - С. 94-101.

2. G.Backus, F.Gilbert. The resolving power of gross Earth Data // *Geophys. J. R. astr. Soc.* 1968. Vol.16. - P. 169-205.
3. G.Backus, F.Gilbert. Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data // *Phil. Trans. R. Soc. London. Ser. A.* 1970. Vol.266. P.123-192.
4. D.Gough. Inverting helioseismic data // *Solar Physics.* 1985. - Vol.100. - P.65-99.
5. J.Christensen-Dalsgaard. Lecture notes on stellar oscillation (3rd. ed.). Aarhus: Aarhus University. 1994.
6. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. - 232с.
7. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1987.
8. Wahba G. Practical approximate solutions to linear operator equations when the data are noisy // *SIAM J. Numer. Anal.* 1977. - Vol.14. No.4. P.651-667.
9. Степанов А.А. О численных алгоритмах выбора параметра регуляризации методом взвешенной перекрестной проверки // *Численный анализ: методы, алгоритмы, программы.* М.: Изд-во Моск. ун-та. 1983. - С.126-135.
10. J.Christensen-Dalsgaard, J.Schou, M.J.Thompson. A comparison of methods for inverting helioseismic data // *Mon. Not. R. astr. Soc.* 1990. - Vol.242. - P.353-369.
11. W.Jeffrey. Inversion of helioseismology data // *Astrophys. J.* 1988. - Vol.327. - P.987-992.
12. E.P.Pijpers, M.J.Thompson. Faster formulation of the optimally localized averages method for helioseismic inversions // *Astron. Astrophys.* 1992. - Vol.262. - P.L33-L36.
13. E.P.Pijpers, M.J.Thompson. The SOLA method for helioseismic inversion // *Astron. Astrophys.* 1994. Vol.281. P.231-240.
14. J.Christensen-Dalsgaard, M.J.Thompson. A preprocessing strategy for helioseismic inversions // *Astron. Astrophys.* - 1993. - Vol.272. - P.L1-L4.

15. P.C.Hansen. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve // SIAM Review. 1992. - Vol.34. No. 4. - P.561- 580.

16. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 199с.

A.Stepanov. On an numerical method for inversion of geophysic and helioseismic data.

Summary. The choice of trade-off parameter in the methods of optimally localized averages and Tikhonov regularization is considered.

1991 MSC 65F30, 65R20, 85-08, 86-08

A.Stepanovs. Par kādu skaitlisku metodi ģeofizikas un helioseismoloģijas datu inversijai.

Anotācija. Ir apskatīta regularizācijas parametra izvēle optimāli lokalizētās viduvēšanas un Tihonova metodēm.

Институт математики и информатики

Поступила 30.05.94

Латвийского Университета

Рига, б.Райня, 29

О МОЕЙ РАБОТЕ
В ЛАТВИЙСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
(несколько воспоминаний)
А. Д. Мьшкис

Аннотация. Приводятся воспоминания автора о его работе в Латвийском государственном университете (1948-1953 гг.), о контактах с математиками Латвии (Э.И.Аринь, И.М.Рабинович, Э.Я.Риекстыньш, Л.Э.Рейзинь и др.), о математической жизни в Риге в те годы. Освещается работа учебно-исследовательского семинара по дифференциальным уравнениям.
УДК 517

Назначение на работу в Ригу в 1947 году было неожиданным для меня. Перед этим я окончил в 1941 году Московский государственный университет, в 1944 году Военную воздушную инженерную академию и был оставлен на кафедре Высшей математики ВВИА младшим преподавателем (т.е. ассистентом); в 1946 году защитил кандидатскую диссертацию. Положение мое на кафедре, как мне кажется, было довольно прочным. Однако в результате некоторых неосторожных высказываний и порой независимого поведения я, по-видимому, приобрел среди политорганов репутацию человека, от которого лучше избавиться. Думаю, что сыграло роль то, что мать у меня еврейка. В ту пору на это стали обращать особое внимание. Так или иначе, но в июне 1947 года меня вызвали в отдел кадров ВВС и предложили поехать в одно из двух высших военных училищ ВВС, организуемых в Риге на базе средних военных училищ. Я не очень возражал, так как хотелось испытать себя на новом месте, хотя и было жаль оставить ИГУ, где я уже два года работал на полставки.

Итак, 23 июля 1947 года последовал приказ Главкома ВВС о

назначении меня преподавателем, т.е. доцентом кафедры Высшей математики II ЛКВАИВУ. Оно располагалось в Цитадели, хорошо известной рижанам. 7 августа я впервые приехал в Ригу. В те дни я вел дневник (к сожалению, только до конца 1947 года) и потому восстановить события того года мне очень легко. В частности, вот первая запись о Риге: "Рига очень красивая" – ее парки, канал, прекрасные здания (запись: "А безобразных домов совсем нет") Старый город, спокойные вежливые люди, своеобразный благозвучный язык все это произвело на меня глубокое впечатление. Я навсегда полюбил Ригу.

Наша кафедра была очень маленькая. Сначала ее начальником был С.Н.Крачковский, но потом начальство решило, что на такой должности лучше иметь военного и поэтому со второго семестра назначили "и.о. меня; впрочем, я так и остался "и.о." до конца. Еще было в разное время от одного до трех преподавателей школьного типа. Начальство училища благосклонно относилось к математике; помимо обычных учебных занятий я работал с интересующимися слушателями, т.е. студентами их было не так уж мало – читал лекции преподавателям, консультировал их.

С С.Н.Крачковским я быстро сошелся, он был мне симпатичен. Глубоко интеллигентный, всегда спокойный, доброжелательный, в то же время эрудированный математик, он сделал много полезного для развития математики в Латвии в те годы. Он образцово читал лекции и привлекал молодых людей к своей исследовательской работе, прежде всего в теории функциональных уравнений в банаховых пространствах. В частности, его прямым учеником был М.А.Гольдман, который позже в течение многих лет был доцентом ЛГУ. Были и другие ученики.

Очень скоро я стал посещать физмат ЛГУ, прежде всего из-за богатой математической библиотеки, правда, имевшей издания, в основном, до 1940 года. Но труды классиков в ней имелись, что было для меня очень полезно. Некоторые же более поздние издания оказались в библиотеке Академии наук, так что я стал систематически пользоваться обеими.

Насколько я помню, я начал преподавать на полставки на физмате с 1948/49 учебного года, еще будучи военным, начав с

Позже научная активность Е.Г. ослабла, хотя я помню кандидатскую диссертацию, выполненную под его руководством в том же направлении. Возможно, что он принадлежал к числу людей, которые охотно занимаются наукой, но при этом нуждаются в некотором подталкивании время от времени. Когда я уехал из Риги, у меня как-то был разговор с Е.Г. о возможной теме его докторской диссертации, но из этого так ничего и не вышло.

Теперь скажу о И.М.Рабиновиче, с которым я также подружился. Это была, без сомнения, колоритная фигура, как внешне, так и по манере держаться и по внутреннему содержанию. Очень темпераментный, обладавший познаниями в разнообразных областях, он был любитель построения всякого рода теорий и заядлый спорщик. Помню, например, как он с увлечением развивал собственную теорию происхождения русского слова "раз" или дискутировал по вопросу: верно ли, что в спичечной коробке число содержащихся слонов равно нулю. Е.Г.Аринь с восторгом парировал эти рассуждения, хотя я отнюдь не считал их бессодержательными.

И.М.Рабинович не занимался исследованиями в области собственно математики, но имел большие заслуги в области популяризации элементарной и основ высшей математики. Он издавал брошюры типа "Математика в жизни", читал небольшие циклы лекций (как я думаю, на уровне техникумов) и т.п. Я считаю эту его работу очень полезной.

И.М. с энтузиазмом занимался также историей науки. В частности, именно ему мы обязаны значительным усилением интереса к выдающемуся рижскому математику П.Болю. По-моему, И.М. изучал архивные материалы, связанные с Болом, в Тарту и Риге. Ранее имя Боля ассоциировалось только с квазипериодическими функциями; как-то считалось, что его результаты в области дифференциальных уравнений покрываются работами его великих современников. И.М. решил это проверить и дал мне оттиски всех работ Боля, чтобы я разобрал, что в них есть еще. Начав их читать, я с удивлением обнаружил, что в одной из них получен результат, из которого в качестве тривиального следствия вытекает знаменитая теорема Брауэра о

чтения лекций по дифференциальным уравнениям на II курсе. По-моему, тогда деканом был Э.Г.Кронберг, а заведовал кафедрой общей математики Н.А.Бразма. К сожалению, детали я плохо помню и могу поэтому ошибаться, это относится и к дальнейшему изложению.

Через С.Н.Крачковского я вскоре познакомился с Аринем (Евгением Генриховичем, как мы его звали, хотя по-латышски это звучало иначе Эйкен Индрикович). Е.Г.Аринь стал одним из моих ближайших друзей в Риге. Это был в высшей степени симпатичный человек. Он был широко образован, свободно говорил на нескольких языках, играл на скрипке, обладал живым, легким характером, высоким чувством юмора, был доброжелателен. Мы с ним часто встречались, гуляли по Риге или на взморье, подолгу беседовали на самые разнообразные темы. Немного позже к нам присоединился И.М.Рабинович начались прогулки втроем. Между прочим, Е.Г. отчаянно ругал всякое начальство и считал себя по складу характера совершенно чуждым тому, чтобы чем-либо или кем-либо руководить. Поэтому я позже с большим удивлением узнал, что он стал директором Вычислительного центра, организованного при ЛГУ, и видным общественным деятелем Латвии. Видно, его темперамент нашел выход в этом направлении.

Е.Г.Аринь любил математику (особенно теорию функций действительного переменного), хорошо читал лекции, был популярен у студентов, но ему не хватало научной инициативы. Мы не раз с ним говорили о возможной теме научной работы, которая могла бы послужить основой кандидатской диссертации. В конце концов мы остановились на обобщении вопроса о связи непрерывности функции нескольких переменных по их совокупности с непрерывностью по каждой из переменных в отдельности. Я уже раньше интересовался этим вопросом и некоторые соображения по этому поводу у меня были. Е.Г. существенно развил эту тему, мы его работу неоднократно обсуждали и в итоге он успешно защитил диссертацию. Его официальным руководителем считался Л.В.Келдыш, но эта тема была далека от ее научных интересов и, по-моему, она в работе Е.Г. непосредственного участия не принимала.

неподвижной точке, доказанная последним лишь через несколько лет.

Я прочитал об этом доклад от имени двух авторов на заседании Московского математического общества, и он был воспринят как сенсация: даже сам П.С.Александров не знал об этом результате в работе Боля. (Впрочем, П.С. знал о наличии в этой же работе теоремы о невозможности непрерывного снятия тождественного отображения сферы и упомянул имя Боля в связи с этим в своей книге.) Подробный отчет об этом докладе с изложением доказательства Боля был помещен в журнале "Успехи математических наук"; правда, редактор без моего ведома изменил название доклада, написав "...латышским математиком П.Г.Бодем", что не вполне точно.

Обнаружил я в работах Боля и некоторые другие понятия и утверждения, опередившие свое время. Мои выступления по этому поводу относятся к более позднему времени, когда я уехал из Риги, но я думаю, что о них здесь следует сказать. Так, в 1961 году вышли избранные труды Боля в переводе И.М.Рабиновича; предисловие написали мы с И.М., причем ему принадлежала биографическая часть, а мне обзор научных работ Боля. Затем мы это предисловие значительно расширили и в 1965 году вышла наша книжка "Математик Пирс Боль из Риги". (В нее был включен также обзор шахматного творчества Боля, написанный экс-чемпионом мира М.М.Ботвинником, который оказался дальним родственником И.М. Когда издательство "Зинатне" узнало о включении этого обзора, оно удвоило тираж книжки.) В том же году я выступил с обзором трудов Боля на всесоюзной научной конференции, проведенной в Риге в связи со 100-летием со дня его рождения. Позже наследием Боля активно занялся Л.Э.Рейзинь; на XIII Международном конгрессе по истории науки (Москва, 1971 год) он выступил с докладом "Пирс Боль один из создателей качественных методов математического анализа" в соавторстве со мной.

Я возвращаюсь к концу сороковых годов. Вскоре после моего знакомства с С.Н.Крачковским мы с ним решили, что было бы хорошо организовать постоянно действующий семинар или кружок,

имевший как учебный, так и научный характер, по образцу семинаров в Московском и Ленинградском университетах. Я не помню точно, когда такой семинар начал работать и чем мы занимались. Во всяком случае это было еще до моего перехода в ЛГУ, а встречались мы у С.Н. дома, на улице Калициема в Задвинье. По-моему, в работе семинара принимали участие Е.Г.Аринь, Я.Л.Энгельсон и несколько студентов старших курсов.

Занимаясь математикой, я чересчур поспешно, как я теперь понимаю, переходил от одной темы к другой, как бы следуя принципу Дон Жуана из оперы Моцарта: "Если ты верен одной женщине, то изменяешь всем остальным". Этот стиль работы был свойственен мне и в дальнейшем, он не давал возможности углубиться в какую-либо одну тему; результаты получались поверхностными, но, возможно, это и отвечало моим способностям. Одно из немногих исключений составила теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Я впервые узнал о таком уравнении 24 октября 1947 года в беседе с инженером О.В. Бялковским (в дневнике сохранилась запись об этом) и тогда абсолютно ничего не знал о них. Впоследствии оказалось, что хотя подобные уравнения уже встречались, начиная с 1770 года, систематически они не изучались. Передо мной открылось чистое поле для работы и результаты посыпались как из ведра. В декабре 1949 года я закончил докторскую диссертацию, представлявшую собой объединение четырех опубликованных и четырех принятых к печати статей на эту тему. Конечно, тут мне повезло. Позже, когда перешел в ЛГУ, я продолжал заниматься этой темой, привлекая к ней и студентов. И в 1951 году в Москве была издана моя первая книга "Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом"; Ученый совет ЛГУ за эту работу выдвинул меня на Сталинскую премию. (Однако гонорар за нее я получил большим трудом, так как по неопытности написал тему "Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом" в план моей научной работы. Ссылки на то, что у меня есть и другие публикации, успеха не имели и меня выручило только то, что в названии книги присутствовало слово "линейные", которого не было в теме работы, а это якобы существенно меняет содержание.

В конце 1949 года оба высших авиационных инженерных военных училища были слиты в одно, в результате чего произошли кадровые сокращения. В частности, обе математические кафедры объединили, и один из двух начальников оказался лишним, пришлось выбирать между Н.К.Усмановым и мной. Как мне позже рассказывал В.А.Дьяков, бывший заместителем начальника нашего училища и поддерживавший мою кандидатуру, на все его доводы следовал ответ: "Да, но Усманов - советский человек". На чем и порешили. В Москве мне предложили поехать начальником кафедры в Тамбовское среднее военное училище, и когда я, в свою очередь, предложил меня демобилизовать, за это предложение ухватились, как мне показалось, с явным облегчением. 20 января 1950 года я был демобилизован.

Два эпизода до демобилизации, которые мне трудно датировать. Как-то ко мне обратились (не помню, из какой инстанции) с просьбой принять участие в обследовании работы Рижского педагогического института. Я беседовал с зав.кафедрой математики Сиполсом, с преподавательницей, со студентами, впечатление осталось у меня негативное. Думаю, что объединение РПИ с ЛГУ, которое произошло уже после моего отъезда из Риги, было вполне обоснованным, тем более, что значительная часть выпускников ЛГУ все равно становились педагогами средних школ.

Другой эпизод: как-то ко мне на квартиру пришли Икауниекс (инициалы не помню)¹ и еще кто-то. Они имели определенный вес (по-моему, по партийной линии) и обратились ко мне с предложением демобилизоваться, перейти на работу в Академию наук Латвии и стать директором реорганизуемого института физики и математики Академии наук. Мне показалась демобилизация нереальной, и я отказался. Тогда такое же предложение было сделано И.И.Кирко (он заведовал кафедрой физики в том же училище, где работал я), и он согласился. В результате через некоторое время Институт физики и математики был реорганизован в Институт физики, и Латвия на многие годы

¹ Янис Янович Икауниекс.

осталась без академического института математики. Как велика роль случайностей в нашей жизни!

Итак, с февраля 1950 года я перешел на работу в ЛГУ и вскоре стал заведующим кафедрой общей математики. Я не знаю точно, почему решили заменить мной Н.А.Бразму; возможно, из-за того, что, как я слышал, он преподавал и во время оккупации Латвии немцами, а к этому тогда относились с преувеличенным вниманием.

В то время на физмате ЛГУ были две математические кафедры. Кафедрой математического анализа заведовал профессор А.Я.Лусис, на ней, если я не ошибаюсь, были еще Е.Г.Аринь, Я.М.Томсон, Г.К.Энгелис, не помню, кто еще. На кафедре общей математики кроме меня были Л.Я.Березина, Н.А.Бразма, В.К.Летловс, Э.Я.Риекстыньш и Я.Л.Энгельсон. Немного позже ликвидировали маленькую кафедру при инженерном факультете и на нашу кафедру пришли ее члены - Виксне, Вишкинд (их инициалы я не помню)² и К.А.Залт. Кафедра математического анализа вела почти все дисциплины для математиков, а наша кафедра обслуживала физиков и астрономов, а также вела курсы математики на других факультетах. Впрочем, некоторые курсы мы читали и математикам: в частности, я читал лекции по дифференциальным уравнениям и математической физике, Л.Я.Березина по геометрии.

Общим уважением пользовался А.Я.Лусис. Он был самый старший среди преподавателей, долгое время единственный профессор на факультете; был доброжелательным, всегда спокойным, не вступал в дискуссии. Во время моей работы в ЛГУ он, насколько мне известно, уже мало занимался активными исследованиями в области математики. Думаю, что в то время его деятельность была больше нацелена на общее математическое образование студентов, что он успешно осуществлял; но при переходе к самостоятельным исследованиям у студентов появлялись другие руководители (это относится, в частности, к Л.Э.Рейзиню). Мне известна за это время только одна довольно

² В.Виксне и К.Вишкинд.

простая статья А.Я. в Ученых записках факультета, а также две статьи, написанные совместно А.Я. с несомненно способным студентом Б.Б.Леви на основе дипломной работы последнего. К сожалению, Леви после окончания ЛГУ не приняли в аспирантуру, хотя мы его рекомендовали. Думаю, причиной было то, что Леви еврей. (Помню, как А.Я.Лусис негодовал по поводу того, что Леви предъявили обвинение: как тот мог выжить, находясь в немецком концлагере.) Как я слышал, в дальнейшем Леви оставил математику и в конце концов уехал в США.

На нашей кафедре самым опытным преподавателем был Н.А.Бразма. Он был очень добросовестным и исполнительным сотрудником, по характеру педантичным и несколько суховатым. Помню, как он при каждой встрече со мной доставал тетрадь с большим числом вопросов, которые он считал нужным обсудить. Каждый из этих вопросов после обсуждения он аккуратно вычеркивал; некоторые из них были совсем мелкие, но все равно они имели в списке свой номер. (При этом он употреблял своеобразное выражение: "Меня озабочивает, что...".) Ему очень долго не присваивали звание доцента, хотя он был кандидатом наук и кафедра неоднократно ходатайствовала об этом. Вероятно, причина была та же, что я упоминал выше.

Н.А.Бразма занимался исследованием обобщенной системы телеграфных уравнений (обобщение состоит в том, что вместо одного провода рассматривается пучок взаимодействующих проводов). Он имел ряд публикаций на эту тему, поддерживал связь с известными специалистами В.И.Коваленковым в Ленинграде и П.И.Кузнецовым в Москве, вовлек в эту тематику Э.Я.Риекстыньша, меня и дипломников. Думаю, что отчасти из-за этого у Риекстыньша усилился интерес к специальным функциям, а через них к асимптотическим разложениям, что определило основное направление его работы в дальнейшем.

У меня с Н.А.Бразмой была совместная статья на эту же тему, где по его предложению было четко оговорено, какая часть кем написана (обычно в совместных статьях я этого не делаю). Впоследствии у меня эта тема трансформировалась в исследование систем уравнений гиперболического типа с одной пространственной

переменной, что стало для меня одним из основных направлений работы.

Э.Я.Риекстыньш был также одним из основных сотрудников кафедры. В нем всегда чувствовалась некая основательность, уверенность в сочетании с ровным отношением ко всем и необходимым юмором. Думаю, что к нему хорошо относились все, кто его знал. В исследованиях он уверенно шел своей дорогой, и я несколько не был удивлен, когда увидел (уже после моего отъезда), что его целеустремленная работа привела к выдающимся результатам, и он превратился в ученого мирового класса. Когда я в 1953 году уезжал из Риги и меня спросили (проректор по научной работе и кто-то еще), кого я рекомендую на свое место, я уверенно назвал Э.Я. Надеюсь, что это в какой-то мере повлияло на его назначение, и полагаю, что он был образцовым заведующим кафедрой - во всяком случае, гораздо лучшим, чем я.

В.К.Детловса я знал хуже, так как его научные интересы (математическая логика) были далеки от моих. Но когда возник вопрос о его поездке в Ленинград к А.А.Маркову для обучения в аспирантуре, я его поддержал вопреки возражениям декана Э.К. Папедиса ("зачем нашему факультету это надо" и т.п. обратившись непосредственно к проректору по научной работе. Эта поездка состоялась, и диссертация Детловса написана на высоком уровне. Я знал его также как принципиального, смелого человека и, когда уезжал из Риги, рекомендовал его на должность декана факультета: это место освободилось, так как Папедис стал проректором по учебной работе. И эта рекомендация были принята во внимание, несмотря на то, что Детловс был одним из молодых преподавателей.

С удовольствием я вспоминаю работу с Я.Д.Энгельсоном, который тогда был самым молодым из преподавателей математики, студенты называли его "Яша". Мне приятно думать, что его выбор направления диссертации и научного руководителя (М.И.Вайнберг) вылился из обзорного доклада, который я поручил ему прочитать на семинаре по дифференциальным уравнениям.

Старейшим преподавателем на факультете в мое время был К.А.Залтс. Правда, он проработал на нашей кафедре совсем

недолго. Он был очень спокойным, тихим, даже, пожалуй, робким. Кто-то мне говорил, что он сохранял копии всех записок, даже самых незначительных, которые кому-либо писал. Он имел несчастье попасть в немилость к ректорату: где-то непочтительно отозвался о московском метро, а во времена Ульманиса опубликовал статью в газете крайне правого направления. (Правда, это была, кажется, статья о роли чисел в латышских дайнах.)³ Его собирались уволить из ЛГУ; не помню, успели ли это сделать, так как он в 1953 году умер.

Важной формой моей работы со студентами, весьма полезной и для меня, был семинар исследовательского характера при нашей кафедре. У меня сохранились объявления о 140 занятиях семинара, начиная с февраля 1951 года и до моего отъезда из Риги; занятия были и ранее, но материальных следов от них не осталось. Занятия проходили раз в неделю по вечерам в течение четырех часов — обычно два независимых заседания по два часа. В объявлениях указывалось, на какой уровень подготовки было рассчитано каждое занятие. На них студенты выступали с изложением журнальных статей, которые мне казались интересными или перспективными для самостоятельной работы, либо рассказывали о собственных результатах. Выступали преподаватели, а также гости из других организаций Риги и других городов.

Из числа наиболее активных участников семинара отмечу А.Я.Лепина. Он начал получать самостоятельные результаты, начиная со второго курса, а в аспирантуру поступил сразу после четвертого курса. (Правда, вскоре его чуть не отчислили, так как какое-то сочинение по основам марксизма-ленинизма он для ускорения дела откуда-то списал, и мне пришлось писать объяснение по этому поводу.) Когда я переехал из Риги в Минск, он качестве аспиранта поехал со мной, там он и защитил диссертацию. После этого он заинтересовался программированием

³ "Черепенок в латышских народных песнях". Латышские народные песни II, 1928, 457-538. За статью присвоена премия Кр.Барона.

на ЭВМ, и я "сосватал" его вместо себя в один из ВЦ в Подмоскowie. Оттуда он вернулся в Ригу, стал работать в ВЦ при ЛГУ и в конце концов стал его директором, вскоре после того как Е.Г.Аринов из-за плохого состояния здоровья стало трудно занимать эту беспокойную должность.

В начале шестидесятых годов, когда я уже жил в Харькове, я как-то встретился с А.Я.Лепиным, по-моему, на одной из математических школ. Я тогда заинтересовался статьей М.А.Рутмана об оценке производных априори ограниченного решения линейного дифференциального уравнения и предложил А.Я. распространить эти результаты на сильно нелинейные уравнения с точной оценкой степени нелинейности. Отсюда и из идеи априорной оценки решений краевой задачи получилось несколько совместных статей А.Я. со мной. В дальнейшем это направление активно развивалось А.Я. с сотрудниками ВЦ ЛГУ, появились монографии, а А.Я. защитил докторскую диссертацию, хотя и по ряду причин со значительной задержкой. Кстати, я не исключаю, что эта работа могла как-то повлиять и на Ю.А.Клокова, так как он тогда занимался исследованиями на близкую тему.

Из других участников семинара хочу отметить Э.И.Вигант (позже Лепина), Д.А.Фреймане (Боже) и И.Ю.Эгле, которые позже были моими аспирантками, успешно защитили диссертации и стали доцентами ЛГУ и РПИ. А самой первой моей аспиранткой была В.Э.Аболиня, которая закончила диссертацию в Минске и после этого работала в ВЦ ЛГУ.

Теперь я хочу написать о Л.Э.Рейзине. Когда я начал преподавание в ЛГУ, он только что закончил университет и стал аспирантом, его руководителем был А.Я.Лусис. Но через год ему предъявили какое-то обвинение и его исключили из аспирантуры (в декабре 1949 года); он на несколько лет (с 1950 по 1959 г.) стал преподавателем средней школы. Вскоре он заинтересовался качественной теорией дифференциальных уравнений. (Я не помню сейчас, как это произошло; возможно, что как-то повлиял спецкурс, который я тогда читал в ЛГУ на эту тему. Прочитав рукопись одной из его первых работ по теории точек покоя в трехмерном пространстве, я обратил его внимание на то, что

здесь можно с успехом применить алгебраическую топологию, чем он в дальнейшем широко пользовался. В итоге упорной целеустремленной работы он защитил докторскую диссертацию, получил заслуженную известность и стал одним из наших основных специалистов в данной области. Я неоднократно с ним встречался на различных конференциях, а также когда приезжал в Ригу; переписывался с ним по различным поводам и вообще считал его своим другом в широком смысле этого слова. В результате этих контактов возникло несколько совместных работ с любопытными примерами поведения траекторий автономных систем в трехмерном пространстве. Думаю, что его интерес к уравнениям Пфаффа также возник в какой-то степени в связи с моими выступлениями на эту тему. Я горжусь тем, что, как он мне как-то сказал, он считает меня одним из трех своих основных учителей, наряду с А.Я.Лусисом и В.В.Немышким. Л.Э.Рейзинь обладал ярко выраженным общественным темпераментом в хорошем смысле слова. Думаю, что никто из математиков не сделал столько для развития науки в Латвии, как он. Он мне рассказывал о своем участии в различных советах, экспертизах (причем не только по математике), в работе Латвийской энциклопедии и т.д. Он был редактором полного собрания сочинений П.Боля и написал к ним содержательные комментарии о развитии идей Боля. Когда Э.К. Фогелс (серьезный специалист в области теории чисел и весьма оригинальный человек так, он отказался от получения зарплаты, как его ни уговаривали – написал большую работу с доказательством гипотезы Римана о нулях ξ -функции. Л.Э. подробно разобрал рукопись и обнаружил ошибку, не замеченную Фогелсом. А когда я лет 10 назад подумывал о том, чтобы вернуться в Ригу, Л.Э. предпринял шаги в этом направлении, которые, правда, окончились ничем. Впрочем, с учетом современной ситуации, это, пожалуй, получилось к лучшему.

Возвращаясь к рассказу о моей работе в ЛГУ. Я в те годы тоже обладал общественным темпераментом. Не раз я читал лекции для преподавателей средней школы на различные темы. Принимал участие в организации одной из первых школьных математических олимпиад. Много сил затратил на подготовку

первого выпуска Ученых записок физмата ЛГУ (издан в 1952 году). С тех пор Ученые записки регулярно выходили. Еще помню, как однажды написал сочинение на тему "Как подготовиться к исследовательской работе", и оно долго висело в коридоре на русском и латышском языках (В.К.Детловс перевел по собственной инициативе).

Кстати о языках. Я неплохо понимал латышский язык, если разговор велся на известную мне тему, но сам говорить по-латышски стеснялся. Поэтому на экзаменах в латышской группе бывало так: я задавал вопрос по-русски, но просил студента отвечать по-латышски, если ему так было удобней.

Особо хочу вспомнить организованный мной студенческий конкурс решения задач "на ϵ и δ ". Идея была такая: в обычном определении равномерной непрерывности функции что-либо изменяется (например, не сказано, что $\epsilon > 0$, и т.п. и требуется выяснить, какой класс функций обладает данным свойством, написав соответствующее доказательство. (Такие задачи предлагал в моей группе доцент И.М.Гельфанд, когда я был студентом первого курса.) Задач было около 25, за каждую ставились баллы в соответствии со степенью трудности, и эти баллы суммировались. Победителем оказался Б.Б.Леви, набравший почти стопроцентный результат. (Вспоминается как курьез: что один из участников конкурса в случаях, когда сформулированным свойством обладали все функции, писал "все и только все", причем доказательство, как и в других случаях, состояло из двух частей: "все обладают" и "только все обладают". После этого мы часто говорили "все и только все".) Впоследствии группа сотрудников ВЦ ЛГУ под руководством А.Я.Лепина существенно пополнила набор этих задач и выпустила в свет брошюру "Задачи на ϵ и δ ", которая имела успех как в Риге, так и за ее пределами.

Воспитанный в духе традиций мехмата МГУ, я был сторонником неформального общения как со студентами, так и с преподавателями, когда это было возможно. После заседаний семинара студенты провожали меня, я ходил на их вечера и т.п. Моя квартира на улице К.Маркса (Гертрудинской), 54-1 была

открыта для посещений знакомым и незнакомым для консультаций и деловых бесед. Летом такой же открытой становилась дача на взморье, которую мы каждый год снимали в другом месте.

Вот один из многих примеров. Как-то ко мне на квартиру пришла незнакомая пожилая женщина и принесла толстенную рукопись, которая осталась от ее покойного мужа преподавателя средней школы. Оказалось, что он в течение многих лет составлял таблицы умножения трехзначных чисел на двузначные: такие таблицы могут существенно помочь при вычислениях вручную. Женщина просила, чтобы я помог в издании этих таблиц. Но они не только по содержанию, но даже по форме полностью совпадали с хорошо известными таблицами О'Рурка! Конечно, женщина была очень огорчена. Я написал заметку "Об одном педагоге выдающемся вычислителе" и попытался опубликовать ее в "Математике в школе", но к сожалению, там этим материалом не заинтересовались. Тогда я передал рукопись вместе с заметкой в библиотеку факультета; возможно, что она и сейчас там находится.

Постепенно я стал в какой-то мере известен и среди "сильных мира сего". Меня несколько раз приглашали в ЦК КП Латвии, чтобы я составил ответы на письма, имеющие отношение к математике, которые либо поступали непосредственно в ЦК КП Латвии, либо пересылались туда из ЦК КПСС. По большей части это были "открытия", сопровождавшиеся пышными словами. Так, запомнилось послание такого содержания: "Я открыл, что если концы отрезка движутся по сторонам прямого угла, то каждая точка этого отрезка описывает эллипс, и хочу преподнести это открытие в дар Советскому народу".

Репутация эксперта осталась за мной и после отъезда из Риги. Уже через несколько лет мне прислали из ЦК КП Латвии на отзыв рукопись учебника по высшей математике не известного мне автора. Но отзыв оказался отрицательным, так как в рукописи было много существенных недостатков. (Запомнился такой "шедевр": в качестве примера на применение интегралов автор вычислил площадь розы, вписанной в круг радиуса r , и в результате вычислительной ошибки получил ответ πr^2 , после чего

было написано: "Мы пришли к интересному результату: площадь розы, вписанной в круг, равна площади этого круга"!)

К концу моего пребывания в Риге относится моя первая и, к счастью, последняя попытка вступления в КПСС. Должен сказать, что я, как и многие из моего поколения, был убежден в прогрессивности нашего строя и правильности направления нашей политики, а ошибки и всякого рода эксцессы, вплоть до грубейших нарушений законности (я их, конечно, видел, но истинных масштабов не представлял) относил к деятельности отдельных людей. Думаю, что такие идеи я сообщал и студентам, в чем теперь должен покаяться; прозрение пришло значительно позже. Я советовался по этому поводу в ЦК КП Латвии, указав на два наиболее беспокоивших меня тогда явления: грубую критику наших великих композиторов и поощрение антисемитизма. Получив разъяснения по этому поводу, я стал собирать рекомендации; но "к счастью" в это время произошел скандал, о котором я чуть позже напишу, и этот вопрос отпал.

В работе возникали и конфликты, порой довольно существенные. Надо сказать, что на факультете "общественная жизнь" была ключом. Ни до, ни после ЛГУ я не видел, чтобы профсоюзные собрания собирали столь обширную аудиторию, проходили в такой активной форме и длились часами. Порой усердно обсуждались странные вопросы, например: можно ли подавать дипломные работы на конкурс студенческих научных работ или в качестве кого я руковожу семинаром по дифференциальным уравнениям. Время от времени сверху спускали кампании: по связи с предприятиями, по изучению и внедрению трудов Сталина и т.п., обо всем этом надо было отчитываться. А я все время говорил и писал об одном: надо развивать научную работу на кафедрах. Здесь я выступал вместе с моим другом, заведующим кафедрой теоретической физики П.Е.Куниным. (Позже я узнал, что он был другом и А.Д.Сахарова.) Думаю, что я при этом по молодости лет перегибал палку и не всегда был тактичен, о чем сейчас глубоко сожалею; я не учитывал психологию людей, воспитанных в совершенно иных условиях, с отличными от моих приоритетами.

Особенно трудные отношения у меня сложились с деканом (позже проректором) Э.К.Папедисом, который, по-моему, был совершенно чужд науке, но мог без подготовки произносить длинные речи на любую общественную тему. Он откровенно тормозил представление меня к званию профессора. Плохие отношения сложились у меня и с партийной организацией факультета. В "Цине" появилась большая критическая статья Н.А.Бразмы по моему адресу, в значительной мере основанная на недоразумениях; но мой ответ редакция опубликовать отказалась. Все это выводило меня из равновесия. Как-то раз, придя на лекцию, я обнаружил в маленькой аудитории, кроме студентов, еще стенографистку и техника, записывающего лекцию на сильно свистящий магнитофон. (Позже такая практика была осуждена.) Я был совершенно выбит из колеи и думал только о том, не прекратить ли мне лекцию, которая, по существу, была сорвана. В конце я не выдержал и произнес несколько резких слов, а позже подал ректору протест, составленный в еще более резких выражениях. Разразился скандал, по разным линиям меня дружно осуждали; как я узнал позже, ректорат отозвал представление меня на Сталинскую премию, сделанное ранее.

На это наложились еще одно существенное обстоятельство. У моего младшего сына обнаружилась бронхиальная астма, и за зиму он несколько раз болел воспалением легких. Врач сказал, что причина влажный климат Риги. Надо было уезжать, хотя я сердцем прирос к Риге. Студенты, бывшие в курсе моих дел, трогательно прошались со мной.

Ректор МГУ И.Г.Петровский предложил мне перейти в МГУ. Но ректорат ЛГУ оказал мне "последнюю услугу" характеристику выслали в МГУ после окончания срока подачи документов на конкурс (тогда была распространена такая форма мести). Петровский рассказал мне, что характеристика содержала, в частности, такие слова, вызвавшие общее удивление: "По характеру самолюбив и вспыльчив".

В итоге с осени 1953/54 учебного года я перешел в Белорусский государственный университет. Но контакты с рижскими математиками длились еще долго, о чем я частично написал выше.

Вероятно, мне следует рассказать еще об одном мрачном эпизоде. Примерно в 1956 году, когда я приехал в Ригу, мне передали, что со мной хочет встретиться доцент Эйдус (физик). Я был с ним немного знаком, когда жил в Риге, знал его как высокоинтеллигентного квалифицированного преподавателя. Знал, что он был репрессирован незадолго до смерти Сталина и реабилитирован, по-моему, в 1955 году. Он рассказал мне подробности своего ареста и сообщил, что при реабилитации он имел возможность ознакомиться со своим "делом". В числе прочего, там были утверждения, принадлежащие различным авторам, о том, что я являюсь организатором шпионско-вредительской группы. Эйдус назвал мне и авторов этих утверждений, один из них был мне довольно близок. Конечно, это могли быть фальшивки либо результаты усиленного давления, но все равно было тяжело узнать об этом.

В заключение хочу сказать несколько общих слов. Прежде всего, я пишу по памяти, почти без каких-либо материалов. Поэтому возможно, что я допустил те или иные фактические ошибки, но не по умыслу⁴. Кроме того, моя персона занимает в этих записках порой слишком много места, да и кое-что может показаться не слишком скромным. Но по названной причине я воспроизвожу, в основном, эпизоды, в которых я непосредственно участвовал. А по поводу нескромности могу сказать, что по прошествии стольких лет местоимение "я" почти не отличается от "он"; по существу, я вспоминаю о совсем другом человеке, чем автор этих записок...

A.D.Myshkis. On my work in Latvian State University.

Summary. Author's reminiscences are given on his work in the Latvian State University (1948-1953), on his contacts with Latvian mathematicians (Arinš E.G., Rabinowitz I.M., Riekstiņš E.Ja., Reizin L.E. etc.), on the mathematical life in a period. The work of scientific seminar on differential equations is enlightened.

1991 MSC 0A65

⁴ Некоторые из этих ошибок устранила И.А.Хениня, за что я ей глубоко благодарен.

A.Miškis. Par manu darbību Latvijas Valsts Universitātē.

Anotācija. Izklāstītas autora atmiņas par viņa darbu Latvijas Valsts Universitātē 1948.-1953.g., par kontaktiem ar Latvijas matemātiķiem (E.Āriņš, I.Rabinovičs, E.Riekstiņš, L.Reiziņš u.c.), par matemātisko dzīvi Rīgā tajos gados. Atspoguļots mācību-pētnieciskā semināra darbs diferenciālvienādojumos.

Поступила 10.11.93

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В. Д. Пономарев

Аннотация. При существовании нетривиального решения у краевой задачи на интервале $[0, h]$ для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка дается оценка на h .

УДК 517.927

Рассмотрим краевую задачу

$$x'''(\cdot) + f(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot), x''(\cdot)) = 0, \quad (1)$$

$$x(0) = x(r) = x(h) = 0, \quad (2)$$

где функция $f: [0, h] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори и $0 < r < h < +\infty$.

В работе будут приведены условия, при которых при наличии нетривиального решения у краевой задачи (1), (2) будет дана оценка на длину интервала $[0, h]$.

Аналогичные результаты в линейном случае получены в статьях [1-4].

Теорема. Пусть выполняются условия:

1. существует решение $x(t)$ краевой задачи (1), (2), обращающееся в нуль на множестве не более меры нуль;
2. существуют положительные, ограниченные почти всюду на $[0, h]$ функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ такие, что

$$|f(t, x, 0, x'')| \leq c(t)|x| + a(t)|x''|$$

для любых $(x, x'') \in \mathbb{R}^2$ и почти для всех $t \in [0, h]$ и

$$|D_x f(t, x, x', x'')| \leq b(t)$$

для любых $(x, x', x'') \in \mathbb{R}^3$ и почти для всех $t \in [0, h]$. Тогда

$$1 < A \frac{h}{4} + B \frac{h^2}{\pi^2} + C \frac{h^3}{2\pi^2}, \quad (3)$$

где $A = \text{vrai sup}_{t \in (0, h)} a(t)$, $B = \text{vrai sup}_{t \in (0, h)} b(t)$, $C = \text{vrai sup}_{t \in (0, h)} c(t)$.

Доказательство. Обозначая через $z(t)$ (следуя [4]) производную решения $x'(t)$, имеем

$$x(t) = \int_r^t z(s) ds \quad (4)$$

и, следовательно, существуют два числа α, β такие, что

$$z(\alpha) = z(\beta) = 0, \quad 0 < \alpha < r < \beta < h.$$

Исходное уравнение (1) с учетом (4) перепишется в виде

$$z''(t) + f(t, \int_r^t z(s) ds, z(t), z'(t)) = 0. \quad (5)$$

Умножая (5) на $z(t)$ и интегрируя на интервале $[\alpha, \beta]$, получим

$$-\int_{\alpha}^{\beta} z(t) z''(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} z(t) f(t, \int_r^t z(s) ds, z(t), z'(t)) dt. \quad (6)$$

Так как

$$-\int_{\alpha}^{\beta} z(t) z''(t) dt = -z(t) z'(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} (z'(t))^2 dt = \int_{\alpha}^{\beta} (z'(t))^2 dt,$$

то (6) перепишется в виде

$$\int_{\alpha}^{\beta} (z'(t))^2 dt = \int_{\alpha}^{\beta} z(t) f(t, \int_r^t z(s) ds, z(t), z'(t)) dt. \quad (7)$$

Из соотношения

$$\begin{aligned} f(t, \int_r^t z(s) ds, z(t), z'(t)) &= f(t, \int_r^t z(s) ds, z(t), z'(t)) \\ &- f(t, \int_r^t z(s) ds, 0, z'(t)) + f(t, \int_r^t z(s) ds, 0, z'(t)) = \\ &= D_3 f(t, \int_r^t z(s) ds, c(t), z'(t)) z(t) + f(t, \int_r^t z(s) ds, 0, z'(t)), \end{aligned}$$

где почти для всех t $0 < c(t) < z(t)$ и из (7) получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha}^{\beta} (z'(t))^2 dt + \int_{\alpha}^{\beta} \left| z(t) f(t, \int_r^t z(s) ds, z(t), z'(t)) \right| dt \\
& \quad + \int_{\alpha}^{\beta} \left| z^2(t) \left(D_3 f(t, \int_r^t z(s) ds, c(t), z'(t)) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + z(t) f(t, \int_r^t z(s) ds, 0, z'(t)) \right) \right| dt \\
& \int_{\alpha}^{\beta} \left(z^2(t) a(t) + b(t) \left| z(t) \int_r^t z(s) ds \right| + c(t) \left| z(t) z'(t) \right| \right) dt \\
& \int_{\alpha}^{\beta} z^2(t) a(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} b(t) \left| z(t) \int_r^t z(s) ds \right| dt + \int_{\alpha}^{\beta} c(t) \left| z(t) z'(t) \right| dt \\
& \leq A \int_{\alpha}^{\beta} z^2(t) dt + B \int_{\alpha}^{\beta} \int_r^t \left| z(t) z(s) \right| ds dt + C \int_{\alpha}^{\beta} \left| z(t) z'(t) \right| dt. \quad (8)
\end{aligned}$$

Имеем также в силу симметричности функции $(t, s) \cdot z(t) \cdot z(s)$ и области интегрирования

$$\begin{aligned}
I & \int_{\alpha}^{\beta} \int_r^t \left| z(t) z(s) \right| ds dt + \int_{\alpha}^{\beta} \int_r^t \left| z(t) z(s) \right| ds dt + \\
& \quad + \int_r^{\beta} \int_r^t \left| z(t) z(s) \right| ds dt \\
& = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \left| z(t) z(s) \right| ds dt + \frac{1}{2} \int_r^{\beta} \int_r^{\beta} \left| z(t) z(s) \right| ds dt \\
& \leq \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \left| z(t) z(s) \right| ds dt + \frac{1}{2} \int_r^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \left| z(t) z(s) \right| ds dt \\
& = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\alpha}^{\beta} \left| z(t) z(s) \right| ds \right) dt = \frac{1}{2} \left(\int_{\alpha}^{\beta} z(s) ds \right)^2 \quad (9)
\end{aligned}$$

Оценим (8), (9), используя из [5] неравенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left| z(t) z'(t) \right| dt \leq \frac{\beta - \alpha}{4} \int_{\alpha}^{\beta} \left(z'(t) \right)^2 dt.$$

Справедливо для непрерывно-дифференцируемой функции такой, что $z(\alpha)=z(\beta)=0$ и неравенство из [6, с.262], [7, с.219]

$$\int_{\alpha}^{\beta} z^2(t) dt \leq \frac{(\beta-\alpha)^2}{\pi^2} \int_{\alpha}^{\beta} (z'(t))^2 dt. \quad (10)$$

Имеем для (9)

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{\alpha}^{\beta} z(s) ds \right)^2 \leq \frac{\beta-\alpha}{2} \int_{\alpha}^{\beta} z^2(s) ds \leq \\ &\leq \frac{(\beta-\alpha)^3}{2\pi^2} \int_{\alpha}^{\beta} (z'(s))^2 ds, \end{aligned}$$

а также для (8)

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (z'(t))^2 dt &\leq A \frac{\beta-\alpha}{4} \int_{\alpha}^{\beta} (z'(t))^2 dt + B \frac{(\beta-\alpha)^2}{\pi^2} \int_{\alpha}^{\beta} (z'(t))^2 dt + \\ &+ C \frac{(\beta-\alpha)^3}{2\pi^2} \int_{\alpha}^{\beta} (z'(t))^2 dt. \end{aligned}$$

Если бы $z'(t)=0$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$, то согласно (4), (10) имели бы $z(t)=0$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$, что противоречит условию 1 теоремы. Поэтому из последнего неравенства получаем

$$1 \leq A \frac{\beta-\alpha}{4} + B \frac{(\beta-\alpha)^2}{\pi^2} + C \frac{(\beta-\alpha)^3}{2\pi^2}$$

Откуда и следует (3).

Литература

1. De la Vallée Poussin Ch.J. Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre // Journal Math.Pures Appl. - 1929. - 8, N 9. - P.125-144.
2. Hartman P., Wintner A. On a oscillation criterion of de la Vallée Poussin // Quart.Appl.Math. 1955.- 13. - P.330-332.
3. Opial Z. Sur une inégalité de C.de la Vallée Poussin dans la théorie de l'équation différentielle linéaire du second ordre // Ann.Polon.Math. - 1960. - 8. - P.29-32.
4. Lasota Z. Sur la distance entre les zéros de l'équation différentielle linéaire du troisième ordre // Ann.Polon.

- Math. 1963. 13, N 2. P.129-132.
5. Opial Z. Sur une inégalité // Ann.Polon.Math. 1960. 8. P.29-32.
6. Сансонне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: ИЛ, 1953. Т.1. 346 с.
7. Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948. - 456 с.

V.Ponomarev. On some boundary value problem for third order differential equation.

Summary. An estimate of the length of the interval $[0, h]$ is given provided that the BVP under consideration has a nontrivial solution.

1991 MSC 34B99

V.Ponomarjovs. Par kādu novērtējumu trešās kārtas vienādojuma robežproblēmai.

Anotācija. Nelineāra trešās kārtas diferenciāl-vienādojuma robežproblēmas netriviāla atrisinājuma intervālā $[0, h]$ eksistences gadījumā dots novērtējums pēc h .

Институт математики и информатики
Латвийского университета
Рига, б.Райня, 29

Поступила 10.02.94

НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ф. Ж. Садырбаев

Аннотация. Приводятся условия разрешимости краевых задач для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с нелинейными краевыми условиями. Как следствия, получен ряд результатов существования решения в нелинейных краевых задачах для уравнения третьего порядка.
УДК 517.927

1. Введение. В статье рассматриваются краевые задачи на конечном интервале, связанные с дифференциальной системой

$$x' = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad f = (f_1, f_2, f_3), \quad t \in [0, 1] \quad (1)$$

и ее частным случаем - уравнением третьего порядка

$$x''' = f(t, x, x', x'') \quad (2)$$

Краевые условия имеют вид

$$g_i(x_1(i), x_2(i), x_3(i)) = 0, \quad i = 0, 1, \quad (3)$$

$$h(x_1(c), x_2(c), x_3(c)) = 0, \quad c \in [0, 1] \quad (4)$$

либо

$$g_i(x(i), x'(i), x''(i)) = 0, \quad i = 0, 1, \quad (5)$$

$$h(x(c), x'(c), x''(c)) = 0, \quad c \in [0, 1] \quad (6)$$

Все, входящие в (1-6), функции предполагаются непрерывными, хотя для функций f из (1) и (2) это требование носит заведомо технический характер и результаты после соответствующих изменений справедливы и для функций, удовлетворяющих условиям Каратеодори.

Задачи упомянутого типа встречаются в приложениях и изучались в книгах [1], [2, гл. 8], [3, гл. 3], работах [4-12].

Применявшиеся для изучения подобных задач методы можно условно разделить на несколько групп: а) метод функции Грина; б) метод стрельбы; в) применение дифференциальных неравенств и сравнение решений; г) сведение к уравнению второго порядка. Часто различные методы и идеи исследования применяются в комбинациях.

Основной целью и результатом настоящей статьи является получение условий разрешимости указанных краевых задач в терминах существования некоторых функций, являющихся аналогами так называемых нижних и верхних функций в случае уравнения второго порядка. Напомним, что нижние и верхние функции для уравнения $x''=f(t, x, x')$ характеризуются неравенствами

$$\alpha'' \geq f(t, \alpha, \alpha'), \quad \beta'' \leq f(t, \beta, \beta')$$

которые используются при получении априорных оценок решения. Существование функций α, β вместе с выполнением условия Нагумо достаточно для разрешимости широкого класса краевых задач для уравнения второго порядка ([1, гл.1], [2, гл.3], [13]).

Используемый в данной статье подход основан на геометрической интерпретации упомянутых выше условий разрешимости для уравнения второго порядка (см. [14]) и ее экстраполяции на случай системы и уравнения третьего порядка. Центральным здесь является понятие инвариантного множества т.е. множества, обладающего свойством удерживать часть решений системы или уравнения. Эти множества, вместе с некоторым компактным множеством D образующие слой $[0,1] \times \mathbb{R}^3$, связываются с краевыми условиями таким образом, что решение, попавшее в одну из таких областей, удерживается в ней при увеличении либо уменьшении независимой переменной и не может удовлетворять всем трем краевым условиям сразу. Поэтому график предполагаемого решения должен принадлежать D и, следовательно, вместо исходной краевой задачи может быть рассмотрена задача с ограниченными нелинейностями. К подобным задачам применимы стандартные теоремы существования типа теоремы Контти [2, гл. 2].

Аналогичный подход для систем и уравнений четвертого порядка применен автором в статье [14]. Следует отметить, что случай третьего порядка имеет при этом особенности, связанные с нечетным числом фазовых переменных.

2. Система третьего порядка. В этой части статьи доказывается основная теорема о существовании решения для системы

$$x'_i = f_i(t, x_1, x_2, x_3), \quad i=1, 2, 3, \quad (7)$$

рассматриваемой вместе с крайними условиями (3), (4).

Рассмотрим группу параметров в дальнейшем условий, где $\alpha_i, \beta_i, \lambda_j, \mu_j \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$, $i=1, 2, 3$; $j=1, 2$. Для упрощения записи введем вспомогательную функцию-срезку:

$$\delta(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{if } y > z, \\ y, & \text{if } x \leq y \leq z, \\ x, & \text{if } y < x; \end{cases}$$

(A) Пусть существуют функции $\alpha_i, \beta_i, \lambda_j, \mu_j \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$, $i=1, 2, 3$; $j=1, 2$, такие, что:

$$(A1) \quad \forall t \in [0, 1] \quad \alpha_3(t) \leq \beta_3(t),$$

$$\alpha_i(t) \leq \lambda_i(t) \leq \beta_i(t), \quad \alpha_i(t) \leq \mu_i(t) \leq \beta_i(t), \quad i=1, 2;$$

$$(A2_1) \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall x_i \in [\alpha_i, \beta_i], \quad i=2, 3,$$

$$(\alpha'_1(t) - f_1(t, \alpha_1(t), x_2, x_3))(\lambda_2(t) - x_2) \geq 0,$$

$$(\beta'_1(t) - f_1(t, \beta_1(t), x_2, x_3))(\mu_2(t) - x_2) \geq 0,$$

$$(A2_2) \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall x_i \in [\alpha_i, \beta_i], \quad i=1, 3,$$

$$(\alpha'_2(t) - f_2(t, x_1, \alpha_2(t), x_3))(\lambda_1(t) - x_1) \geq 0,$$

$$(\beta'_2(t) - f_2(t, x_1, \beta_2(t), x_3))(\mu_1(t) - x_1) \geq 0,$$

$$(A3) \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall x_3 \in [\alpha_3, \beta_3]$$

$$\mu'_1(t) \leq f_1(t, \mu_1(t), \beta_2(t), x_3), \quad \lambda'_1(t) \geq f_1(t, \lambda_1(t), \alpha_2(t), x_3)$$

$$\mu'_2(t) \leq f_2(t, \mu_2(t), \beta_1(t), x_3), \quad \lambda'_2(t) \geq f_2(t, \lambda_2(t), \alpha_1(t), x_3)$$

$$(A4) \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall x_i \in [\alpha_i, \beta_i], \quad i=1, 2,$$

$$f_3(t, x_1, x_2, \beta_3(t))(t-c) \leq \beta'_3(t)(t-c)$$

$$f_3(t, x_1, x_2, \alpha_3(t))(t-c) \geq \alpha_3'(t)(t-c)$$

(B) Функции g_0, g_1, h из (3), (4) удовлетворяют следующим условиям:

$$(B1) \forall (x_1, x_2, x_3)$$

$$g_0(\alpha_1(0), \delta(\lambda_2(0), x_2, \beta_2(0)), \delta(\alpha_3(0), x_3, \beta_3(0))) \geq 0$$

$$g_0(\delta(\alpha_1(0), x_1, \mu_1(0)), \beta_2(0), \delta(\alpha_3(0), x_3, \beta_3(0))) \geq 0$$

$$g_0(\beta_1(0), \delta(\alpha_2(0), x_2, \mu_2(0)), \delta(\alpha_3(0), x_3, \beta_3(0))) \leq 0$$

$$g_0(\delta(\lambda_1(0), x_1, \beta_1(0)), \alpha_2(0), \delta(\alpha_3(0), x_3, \beta_3(0))) \leq 0$$

$$(B2) \forall (x_1, x_2, x_3)$$

$$g_1(\alpha_1(1), \delta(\alpha_2(1), x_2, \lambda_2(1)), \delta(\alpha_3(1), x_3, \beta_3(1))) \geq 0$$

$$g_1(\delta(\alpha_1(1), x_1, \lambda_1(1)), \alpha_2(1), \delta(\alpha_3(1), x_3, \beta_3(1))) \geq 0$$

$$g_1(\beta_1(1), \delta(\mu_2(1), x_2, \beta_2(1)), \delta(\alpha_3(1), x_3, \beta_3(1))) \leq 0$$

$$g_1(\delta(\mu_1(1), x_1, \beta_1(1)), \beta_2(1), \delta(\alpha_3(1), x_3, \beta_3(1))) \leq 0$$

$$(B3) \forall (x_1, x_2)$$

$$h(\delta(\alpha_1(c), x_1, \beta(c)), \delta(\alpha_2(c), x_2, \beta(c)), \alpha_3(c)) \geq 0,$$

$$h(\delta(\alpha_1(c), x_1, \beta(c)), \delta(\alpha_2(c), x_2, \beta(c)), \beta_3(c)) \leq 0.$$

Отметим, что условия группы А задают некоторую область в $[0, 1] \times \mathbb{R}^3$, а условия группы В поведение краевых функций на границе этой области.

Теорема 2.1. Пусть выполняются группы условий А и В. Тогда краевая задача (7), (3), (4) разрешима.

Доказательство этой основной теоремы требует рассмотрения некоторой модифицированной задачи, определяемой следующим образом.

$$\text{Пусть } X_i = \delta(\alpha_i(t), x_i, \beta_i(t)), \quad i=1, 2, 3,$$

$$F_1 = f_1(t, X_1, X_2, X_3) + \delta(0, x_2 - \beta_2, 1) - \delta(0, \alpha_2 - x_2, 1),$$

$$F_2 = f_2(t, X_1, X_2, X_3) + \delta(0, x_1 - \beta_1, 1) - \delta(0, \alpha_1 - x_1, 1),$$

$$F_3 = f_3(t, X_1, X_2, X_3) - \delta(0, x_3 - \beta_3, 1)(t-c) + \delta(0, \alpha_3 - x_3, 1)(t-c),$$

Рассмотрим систему

$$x' = F(t, x), \quad F = (F, F, F), \quad (8)$$

вместе с краевыми условиями

$$\begin{aligned}x_1(0) - x_2(0) &= G_0(x(0)) + X_1(0) - X_2(0), \\x_1(1) + x_2(1) &= G_1(x(1)) + X_1(1) + X_2(1), \\x_3(c) &= H(x(c)) + X_3(c)\end{aligned}\quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}G_i(x(i)) &= g_i(X_1(i), X_2(i), X_3(i)), \quad i=0,1 \\H(x(c)) &= h(X_1(c), X_2(c), X_3(c)).\end{aligned}\quad (10)$$

Лемма 2.1. Задача (8), (9) имеет решение.

Доказательство. Поскольку правые части в (8), (9) непрерывны и ограничены, и соответствующая однородная задача

$$x'_i = 0, \quad x_1(0) - x_2(0) = x_1(1) + x_2(1) = x_3(c) = 0$$

имеет лишь тривиальное решение, существование решения следует из хорошо известных результатов (например, [2, с.25]). Введем в рассмотрение следующие множества из $[0, 1] \times \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}D_0 &= \left\{ (t, x) : 0 \leq t \leq 1, \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, \quad i=1, 2, -\infty < x_3 < +\infty \right\}, \\D_1 &= \left\{ (t, x) : 0 \leq t \leq 1, x_1 > \mu_1, x_2 > \mu_2, -\infty < x_3 < +\infty \right\} \cup D_0 \cup \\&\cup \left\{ (t, x) : 0 \leq t \leq 1, x_1 < \lambda_1, x_2 < \lambda_2, -\infty < x_3 < +\infty \right\}, \\D_2 &= \left\{ (t, x) : 0 \leq t \leq 1, x_1 > \lambda_1, x_2 < \mu_2, -\infty < x_3 < +\infty \right\} \cup D_0 \cup \\&\cup \left\{ (t, x) : 0 \leq t \leq 1, x_1 < \mu_1, x_2 > \lambda_2, -\infty < x_3 < +\infty \right\}, \\D_3 &= \left\{ (t, x) : 0 \leq t \leq 1, -\infty < x_i < +\infty, \quad i=1, 2; \alpha_3 < x_3 < \beta_3 \right\},\end{aligned}$$

Обозначим через $D_i(t)$ сечение D_i гиперплоскостью $t = \text{const}$.

Лемма 2.2. Для любой функции $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей краевым условиям (9), верно следующее:

$$\begin{aligned}(0, x(0)) &\in D_1(0), \\(c, x(c)) &\in D_3(c), \\(1, x(1)) &\in D_2(1)\end{aligned}$$

Доказательство. Проверкой (с учетом знаковых условий группы В), что нули функций из краевых условий (9) лежат соответственно в $D_1(0)$, $D_2(1)$, $D_3(c)$.

Лемма 2.3. Для любого решения системы (8), удовлетворяющего третьему из краевых условий (9), справедливо следующее:

$$\forall t \in [0, 1] \quad \alpha_3(t) \leq x_3(t) \leq \beta_3(t) \quad (11)$$

Доказательство. От противного. Пусть, например, $x_3(t_0) > \beta_3(t_0)$ для некоторого $t_0 \in [0, 1]$. Пусть, для определенности, $t_0 > c$. Поскольку по лемме 2.2 должно быть $x_3(c) > \beta_3(c)$, найдется $t_1 \in (c, t_0)$ такое, что

$$x_3(t_1) - \beta_3(t_1) > 0, \quad x'_3(t_1) - \beta'_3(t_1) > 0$$

С другой стороны, из (14), (8) и определения функции F_3 следует, что при $t = t_1$

$$x'_3 - \beta'_3 = F_3 - \beta'_3 = f_3(t_1, X_1, X_2, \beta_3) - \beta'_3 \leq 0$$

Получено противоречие. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Лемма 2.4. Пусть $x(t)$ решение системы (8) и $x(\tau) \in D_1(\tau) \setminus D_0(\tau)$ для некоторого $\tau \in [0, 1]$.

Тогда $x(t) \in D_1(t) \setminus D_0(t)$ при $t > \tau$. Доказательство. Пусть $x(\tau) \in D_1(\tau) \setminus D_0(\tau)$. Тогда возможны следующие случаи ($t = \tau$):

- | | |
|---|---|
| 1) $x_1 > \beta_1, \quad x_2 > \mu_2;$ | 2) $x_1 > \mu_1, \quad x_2 > \mu_2;$ |
| 3) $x_1 < \alpha_1, \quad x_2 < \lambda_2;$ | 4) $x_1 < \lambda_1, \quad x_2 < \alpha_2.$ |

Рассмотрим случай 1. Покажем, что тогда неравенства $x_1(t) > \beta_1(t)$, $x_2(t) > \mu_2(t)$ выполняются для всех $t > \tau$. Предположим, что это не так. Пусть, например, $x_1(t_1) = \beta_1(t_1)$ для некоторого $t_1 > \tau$ и $x_1(t) > \beta_1(t)$, $x_2(t) \geq \mu_2(t)$ при $t \in (\tau, t_1)$. Однако для указанных значений t согласно определению F_1 и условию (12₁) получаем

$$x'_1 - \beta'_1 = f_1(t, \beta_1, X_2, X_3) + \delta(0, x_2 - \mu_2, 1) - \beta'_1 > 0$$

Пусть теперь $x_2(t_1) = \mu_2(t_1)$, $x_1(t) > \beta_1(t)$, $x_2(t) \geq \mu_2(t)$ при $t \in (\tau, t_1)$, откуда следует $x'_2(t_1) \leq \mu'_2(t_1)$.

С другой стороны, используя определение F_2 и условие (12₂), получаем при $t = t_1$

$$x'_2 - \mu'_2 = f_2(t_1, \beta_1, \mu_2, X_3) + \delta(0, x_1 - \beta_1, 1) - \mu'_2 > 0$$

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Лемма 2.5. Пусть $x(t)$ - решение системы (8) и $x(\tau) \in D_2(\tau) \setminus$

$\setminus D_0(\tau)$ для некоторого $\tau \in (0, 1]$.

Тогда $x(t) \in D_2(t) \setminus D_0(t)$ при $t < \tau$. Доказательство аналогично доказательству леммы 2.4.

Доказательство теоремы 2.1. По лемме 2.1, модифицированная задача (8), (9) имеет решение $x(t)$. Остается показать, что для этого решения выполняется $(t, x(t)) \in D_0 \cap D_3$, поскольку в этом случае $x(t)$ решает также исходную задачу (1), (3), (4).

Предположим, что это неверно. Тогда для некоторого t_1 выполняется одно из условий

1) $(t_1, x(t_1)) \in D_1 \setminus D_0$; 2) $(t_1, x(t_1)) \in D_2 \setminus D_0$; 3) $(t_1, x(t_1)) \in D_3$;
либо

- 4) $x_1 > \beta_1, x_2 = \mu_2$; 6) $x_1 = \mu_1, x_2 > \beta_2$;
5) $x_1 < \alpha_1, x_2 = \lambda_2$; 7) $x_1 = \lambda_1, x_2 < \alpha_2$.

Заметим, что соотношения (4-7) не могут выполняться в крайних точках интервала $[0, 1]$, так как тогда не выполняются краевые условия (9). Случай 3 также невозможен (лемма 2.3).

Если t_1 есть внутренняя точка интервала $(0, 1)$, случаи (4-7) сводятся к одному из случаев 1 или 2. Пусть, например, имеем случай 4. Тогда, как показано при доказательстве леммы 2.4, $x_2' - \mu_2' > 0$ при $t = t_1$ и $x(t) \in D_1(t) \setminus D_0(t)$ для значений t из некоторой левосторонней окрестности точки t_1 .

Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно рассмотреть случаи 1 и 2. Рассмотрим случай 1. Тогда по лемме 2.4 $x(1) \in D_1(1) \setminus D_0(1)$ (следовательно $x(1)$ не может принадлежать $D_2(1)$). Но по лемме 2.2 $x(1) \in D_2(1)$. Противоречие.

Аналогично рассматривается случай 2. Теорема доказана.

3. Уравнение 3-го порядка. В этой части статьи приводятся следствия из основной теоремы 2.1, а также некоторые дополнительные результаты, для случая краевой задачи вида (2), (5), (6).

Рассмотрим уравнение

$$x''' = f(t, x, x'') \quad (12)$$

Теорема 3.1. Пусть существуют функции $\alpha_i, \beta_i \in C^1$, $i=1, 2, 3$,

$\lambda, \mu \in C^1$ такие, что $\forall t \in [0, 1]$:

1) $\alpha_1 \leq \lambda \leq \beta_1, \alpha_1 \leq \mu \leq \beta_1$; 2) $\alpha'_1 \geq \beta'_3 \geq \alpha_3 \geq \beta'_1$;

3) $\forall x \in [\alpha_1, \beta_1]$

$$(\alpha'_2 - f(t, x, \alpha_2))(\lambda - x) \geq 0, \quad (\beta'_2 - f(t, x, \beta_2))(\mu - x) \geq 0;$$

4) $\mu' \leq \alpha_3 \leq \beta_3 \leq \lambda'$;

5) $\beta'_3 \leq \alpha_2 \leq \beta_2 \leq \alpha'_3, t < c$; $\alpha'_3 \leq \alpha_2 \leq \beta_2 \leq \beta'_3, t \geq c$;

6) $\forall x' \in [\alpha_3(0), \beta_3(0)]$

$$g_0(x, x', \beta_2(0)) \geq 0 \quad \forall x \in [\alpha_1(0), \mu(0)],$$

$$g_0(x, x', \alpha_2(0)) \leq 0 \quad \forall x \in [\lambda(0), \beta_1(0)];$$

$$\forall x' \in [\alpha_3(1), \beta_3(1)] \quad g_1(\alpha_1(1), x', x'') \geq 0 \quad \forall x'' \in [\alpha_2(1), \beta_2(1)],$$

$$g_1(x, x', \alpha_2(1)) \geq 0 \quad \forall x \in [\alpha_1(1), \lambda(1)],$$

$$g_1(\beta_1(1), x', x'') \leq 0 \quad \forall x'' \in [\alpha_2(1), \beta_2(1)], \quad g_1(x, x', \beta_2(1)) \leq 0$$

$$\forall x \in [\mu(1), \beta_1(1)];$$

$$\forall x \in [\alpha_1(c), \beta_1(c)], \quad \forall x'' \in [\alpha_2(c), \beta_2(c)]$$

$$h(x, \alpha_3(c), x'') \geq 0, \quad h(x, \beta_3(c), x'') \leq 0.$$

Тогда решение задачи (12), (5), (6) существует.

Доказательство. Для системы $x'_1 = x_3$, $x'_2 = f(t, x_1, x_2)$, $x'_3 = x_2$, эквивалентной (12) при $x_1 = x$, $x_2 = x''$, $x_3 = x'$ и для $\lambda_1 = \lambda$, $\mu_1 = \mu$, $\lambda_2 = \beta_2$, $\mu_2 = \alpha_2$ выполняются условия теоремы 2.1.

Теорема 3.2. Пусть существуют функции $\alpha_i, \beta_i \in C^1$, $i=1, 2, 3$, $\lambda, \mu \in C^1$ такие, что $\forall t \in [0, 1]$:

1) $\alpha_2 \leq \lambda \leq \beta_2, \alpha_2 \leq \mu \leq \beta_2$; 2) $\alpha'_2 \leq \alpha_3 \leq \beta_3 \leq \beta'_2$;

3) $\forall x \in [\alpha_2, \beta_2]$

$$(\alpha'_1 - f(t, x, \alpha_1))(\lambda - x) \geq 0, \quad (\beta'_1 - f(t, x, \beta_1))(\mu - x) \geq 0;$$

4) $\mu' \leq \alpha_3 \leq \beta_3 \leq \lambda'$;

5) $\beta'_3 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \alpha'_3, t < c$; $\alpha'_3 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta'_3, t \geq c$;

6) $\forall x'' \in [\alpha_1(0), \beta_1(0)] \forall x' \in [\alpha_3(0), \beta_3(0)]$

$$g_0(\beta_2(0), x', x'') \geq 0 \quad g_0(\alpha_2(0), x', x'') \leq 0,$$

6) $\forall x' \in [\alpha_3(0), \beta_3(0)] \quad g_0(x, x', \alpha_1(0)) \geq 0 \quad \forall x \in [\lambda(0), \beta_2(0)],$

$$g_0(x, x', \beta_1(0)) \leq 0 \quad \forall x \in [\alpha_2(0), \mu(0)],$$

$$\forall x' \in [\alpha_3(1), \beta_3(1)]$$

$$g_1(x, x', \alpha_1(1)) \geq 0 \quad \forall x \in [\alpha_2(1), \lambda(1)],$$

$$g_1(x, x', \beta_1(1)) \leq 0 \quad \forall x \in [\mu(1), \beta_2(1)];$$

6) $\forall x \in [\alpha_2(c), \beta_2(c)], \quad \forall x'' \in [\alpha_1(c), \beta_1(c)]$

$$h(x, \alpha_3(c), x'') \geq 0, \quad h(x, \beta_3(c), x'') \leq 0.$$

Тогда решение задачи (12), (5), (6) существует.

Доказательство. Для системы $x'_1=f(t, x_1, x_2)$, $x'_2=x_3$, $x'_3=x_1$, эквивалентной (12) при $x_1=x''$, $x_2=x$, $x_3=x'$ и для $\lambda_1=\alpha_1$, $\mu_1=\beta_1$, $\lambda_2=\lambda$, $\mu_2=\mu$ выполняются условия теоремы 2.1.

Теорема 3.3. Пусть существуют функции $\alpha_i, \beta_i \in C^1$, $i=1, 2, 3$, $\lambda, \mu \in C^1$ такие, что $\forall t \in [0, 1]$ условия 1, 3, 4, 5, 6₃ теоремы 3.2 остаются без изменения и:

$$2') \beta'_2 \leq \alpha'_3 \leq \beta'_3 \leq \alpha'_2;$$

$$6'_1) \forall x' \in [\alpha_3(0), \beta_3(0)] \quad g_0(x, x', \alpha_1(0)) \geq 0 \quad \forall x \in [\lambda(0), \beta_2(0)], \\ g_0(x, x', \beta_1(0)) \leq 0 \quad \forall x \in [\alpha_2(0), \mu(0)],$$

$$6'_2) \forall x' \in [\alpha_3(1), \beta_3(1)] \\ g_1(\alpha_2(1), x', x'') \geq 0 \quad \forall x'' \in [\alpha_1(1), \beta_1(1)], \\ g_1(\beta_2(1), x', x'') \leq 0 \quad \forall x'' \in [\alpha_1(1), \beta_1(1)], \\ g_1(x, x', \alpha_1(1)) \geq 0 \quad \forall x \in [\alpha_2(1), \lambda(1)], \quad g_1(x, x', \beta_1(1)) \leq 0 \\ \forall x \in [\mu(1), \beta_2(1)].$$

Тогда решение задачи (12), (5), (6) существует. Доказательство. Для системы $x'_1=f(t, x_2, x_1)$, $x'_2=x_3$, $x'_3=x_1$, эквивалентной (12) при $x_1=x''$, $x_2=x$, $x_3=x'$ и для $\lambda_1=\beta_1$, $\mu_1=\alpha_1$, $\lambda_2=\lambda$, $\mu_2=\mu$ выполняются условия теоремы 2.1.

Рассмотрим уравнение

$$x'' = f(t, x', x'') \quad (13)$$

Теорема 3.4. Пусть существуют $\alpha_i, \beta_i \in C^1$, $\lambda, \mu \in C^1$, $i=1, 2, 3$ такие, что $\forall t \in [0, 1]$:

$$1) \alpha_1 \leq \lambda \leq \beta_1, \quad \alpha_1 \leq \mu \leq \beta_1, \quad \alpha_3 \leq \beta_3;$$

$$2) \alpha_2 \leq \alpha'_1 \leq \beta_2, \quad \alpha_2 \leq \beta'_1 \leq \beta_2;$$

$$3) \forall x' \in [\alpha_1, \beta_1]$$

$$(\alpha'_2 - f(t, x', \alpha_2))(\lambda - x') \geq 0,$$

$$(\beta'_2 - f(t, x', \beta_2))(\mu - x') \geq 0;$$

$$4) \mu' \leq \beta_2, \quad \lambda' \geq \alpha_2;$$

$$5) \beta'_1 \leq f(t, \beta_1, \beta'_1), \quad \alpha'_1 \geq f(t, \alpha_1, \alpha'_1);$$

$$6) \forall x' \in [\alpha_1, \beta_1]$$

$$x'(t-c) \geq \alpha'_3(t-c), \quad x'(t-c) \leq \beta'_3(t-c);$$

$$7) \forall x \in [\alpha_3(0), \beta_3(0)]$$

$$g_0(x, \alpha_1(0), x'') \geq 0 \quad \forall x'' \in [\alpha'_1(0), \beta_2(0)],$$

$$g_0(x, \beta_1(0), x'') \leq 0 \quad \forall x'' \in [\alpha_2(0), \beta'_1(0)],$$

$$g_0(x, x', \beta_2(0)) \geq 0 \quad \forall x' \in [\alpha_1(0), \mu(0)].$$

$$\begin{aligned}
g_0(x, x', \alpha_2(0)) &\leq 0 & \forall x' \in [\lambda(0), \beta_1(0)]; \\
\forall x \in [\alpha_3(1), \beta_3(1)] \\
g_1(x, \alpha_1(1), x'') &\geq 0 & \forall x'' \in [\alpha_2(1), \alpha_1'(1)], \\
g_1(x, \beta_1(1), x'') &\leq 0 & \forall x'' \in [\beta_1'(1), \beta_2(1)], \\
g_1(x, x', \alpha_2(1)) &\geq 0 & \forall x' \in [\alpha_1(1), \lambda(1)], \\
g_1(x, x', \beta_2(1)) &\leq 0 & \forall x' \in [\mu(1), \beta_1(1)]; \\
\forall x' \in [\alpha_1(c), \beta_1(c)], \forall x'' \in [\alpha_2(c), \beta_2(c)] \\
h(\alpha_3(c), x', x'') &\geq 0, & h(\beta_3(c), x', x'') \leq 0.
\end{aligned}$$

Тогда решение задачи (13), (5), (6) существует.

Доказательство. Для системы $x_1' = x_2$, $x_2' = f(t, x_1, x_2)$, $x_3' = x_1$, эквивалентной (13) при $x_1 = x_1'$, $x_2 = x''$, $x_3 = x$, при $\lambda_1 = \lambda$, $\mu_1 = \mu$, $\lambda_2 = \alpha_1'$, $\mu_2 = \beta_1'$ выполняются условия теоремы 2.1.

Теорема 3.5. Пусть существуют функции $\alpha, \beta \in C^1$, $u, v \in C^2$, $\varphi \in C((0, +\infty), (0, +\infty))$ такие, что:

- 1) $\alpha \leq \beta$, $u \leq v$;
- 2) $\forall x \in [\alpha, \beta]$
 $u'' \geq f(t, x, u, u')$, $v'' \leq f(t, x, v, v')$;
- 3) $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $\forall x' \in [u, v]$
 $|f(t, x, x', x'')| \leq \varphi(|x''|)$ $\forall |x''| \in [\lambda, N]$,
 N
 $\int_{\lambda}^N \frac{s ds}{\varphi(s)} > \max_{(0,1)} v(t) - \min_{(0,1)} u(t)$,
 $\lambda = \max \left\{ |u(0) - v(1)|, |u(1) - v(0)| \right\}$;
- 4) $\alpha' \leq u \leq v \leq \beta'$, $t \geq c$, $\beta' \leq u \leq v \leq \alpha'$, $t < c$;
- 5) $\forall x \in [\alpha(0), \beta(0)]$

$$\begin{aligned}
g_0(x, u(0), x'') &\geq 0 & \forall x'' \in [u'(0), +\infty), \\
g_0(x, v(0), x'') &\leq 0 & \forall x'' \in (-\infty, v'(0)]; \\
\forall x \in [\alpha(1), \beta(1)] \\
g_1(x, u(1), x'') &\geq 0 & \forall x'' \in (-\infty, u'(1)], \\
g_1(x, v(1), x'') &\leq 0 & \forall x'' \in [v'(1), +\infty); \\
\forall x' \in [u(c), v(c)], \forall x'' \in [-N, N] \\
h(\alpha(c), x', x'') &\geq 0, & h(\beta(c), x', x'') \leq 0.
\end{aligned}$$

Тогда решение задачи (2), (5), (6) существует.

Замечание. Данная теорема не является прямым следствием основной теоремы 2.1, но может быть доказана сведением к

модифицированной задаче. Аналогично лемме 2.3 может быть получена оценка для x ($\alpha \leq x \leq \beta$). Далее, рассматривая уравнение (2) как уравнение второго порядка относительно x' и проводя стандартные рассуждения (равномерно по x), используя нижние и верхние функции и условие Нагумо, приходим к требуемому заключению.

4. Нижние и верхние функции. В этом параграфе собраны следствия результатов секции 3 для двухточечных и трехточечных краевых задач для уравнений третьего порядка. Для сокращения записи будем писать $(i, j; k)$, где $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$, вместо

$$x^{(i)}(0) = A_i, \quad x^{(j)}(0) = A_j, \quad x^{(k)}(1) = B_k,$$

и $(i; j; k)$ вместо

$$x^{(i)}(0) = A_i, \quad x^{(j)}(c) = C_j, \quad x^{(k)}(1) = B_k.$$

Следствие 4.1. Пусть существуют $\alpha, \beta \in C^3$, $\lambda, \mu \in C^1$ такие, что

1) $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, $\alpha \leq \mu \leq \beta$, $\beta'' \leq \alpha''$;

2) $\forall x \in [\alpha, \beta]$

$$(\beta''' - f(t, x, \beta''))(\lambda - x) \geq 0,$$

$$(\alpha''' - f(t, x, \alpha''))(\mu - x) \geq 0;$$

3) $\mu' \leq \beta' \leq \alpha' \leq \lambda'$

Тогда для уравнения (12):

а) задача $(0, 1; 2)$ разрешима, если

$$\mu(0) \leq A_0 \leq \lambda(0), \quad \beta'(0) \leq A_1 \leq \alpha'(0), \quad \beta''(1) = B_2 = \alpha''(1);$$

б) задача $(1, 2; 0)$ разрешима, если

$$\beta'(0) \leq A_1 \leq \alpha'(0), \quad \beta''(0) \leq A_2 \leq \alpha''(0), \quad \lambda(1) \leq B_0 \leq \mu(1).$$

в) задача $(2, 1; 0)$ разрешима, если

$$\beta''(0) \leq A_2 \leq \alpha''(0), \quad \beta'(0) \leq A_1 \leq \alpha'(0), \quad \lambda(1) \leq B_0 \leq \mu(1);$$

г) задача $(0, 1; 0)$ разрешима, если $\mu(0) \leq A_0 \leq \lambda(0)$, $\beta'(0) \leq A_1 \leq \alpha'(0)$, $\lambda(1) \leq B_0 \leq \mu(1)$;

д) задача $(2, 1; 2)$ разрешима, если

$$\beta''(0) \leq A_2 \leq \alpha''(0), \quad \beta'(0) \leq A_1 \leq \alpha'(0), \quad \beta''(1) = B_2 = \alpha''(1).$$

При этом во всех случаях решение удовлетворяет

$$\alpha \leq x \leq \beta, \quad \beta' \leq x' \leq \alpha', \quad \beta'' \leq x'' \leq \alpha''.$$

Доказательство. Применяя теорему 3.1 к случаю $c=0$, $(\alpha_1, \beta_1)=(\alpha, \beta)$, $(\alpha_2, \beta_2)=(\beta', \alpha')$, $(\alpha_3, \beta_3)=(\beta'', \alpha'')$.

Доказательство может быть получено также применением теоремы 3.3 к случаю $c=0$, $(\alpha_1, \beta_1)=(\beta'', \alpha'')$, $(\alpha_2, \beta_2)=(\alpha, \beta)$, $(\alpha_3, \beta_3)=(\beta', \alpha')$.

Следствие 4.2. Пусть существуют $\alpha, \beta \in C^3$, $\lambda, \mu \in C^1$ такие, что 1) $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, $\alpha \leq \mu \leq \beta$, $\alpha'' \leq \beta''$;

2) $\forall x \in [\alpha, \beta]$

$$(\alpha''' - f(t, x, \alpha''))(\lambda - x) \geq 0,$$

$$(\beta''' - f(t, x, \beta''))(\mu - x) \geq 0;$$

3) $\mu' \leq \beta' \leq \alpha' \leq \lambda'$.

Тогда для уравнения (12):

а) задача (0; 1; 2) разрешима, если

$$\mu(0) \leq A_0 \leq \lambda(0), \quad \beta'(1) \leq B_1 \leq \alpha'(1), \quad \alpha''(1) \leq B_2 \leq \beta''(1);$$

б) задача (2; 0; 1) разрешима, если

$$\alpha''(0) \leq A_2 \leq \beta''(0), \quad \lambda(1) \leq B_0 \leq \mu(1), \quad \beta'(1) \leq B_1 \leq \alpha'(1).$$

Доказательство. Применяя теорему 3.1 к случаю $c=1$, $\alpha_1=\alpha$, $\beta_1=\beta$, $\alpha_2=\beta'$, $\beta_2=\alpha'$, $\alpha_3=\alpha''$, $\beta_3=\beta''$.

Следствие 4.3. Пусть существуют $\alpha, \beta \in C^3$, $\lambda, \mu \in C^1$ такие, что 1) $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, $\alpha \leq \mu \leq \beta$, $\alpha'' \leq \beta''$;

2) $\forall x \in [\alpha, \beta]$

$$(\alpha''' - f(t, x, \alpha''))(\lambda - x) \geq 0,$$

$$(\beta''' - f(t, x, \beta''))(\mu - x) \geq 0;$$

3) $\mu' \leq \alpha' \leq \beta' \leq \lambda'$.

Тогда для уравнения (12):

а) задача (0, 1; 0) разрешима, если

$$\mu(0) \leq A_0 \leq \lambda(0), \quad \alpha'(0) \leq A_1 \leq \beta'(0), \quad \lambda(1) \leq B_0 \leq \mu(1);$$

б) задача (0, 1; 2) разрешима, если $\mu(0) \leq A_0 \leq \lambda(0)$, $\alpha'(0) \leq A_1 \leq \beta'(0)$, $\alpha''(1) \leq B_2 \leq \beta''(1)$;

в) задача (2, 1; 2) разрешима, если

$$\alpha''(0) \leq A_2 \leq \beta''(0), \quad \alpha'(0) \leq A_1 \leq \beta'(0), \quad \alpha''(1) \leq B_2 \leq \beta''(1).$$

Доказательство. Применением теоремы 3.2 к случаю $c=0$, $(\alpha_1, \beta_1)=(\alpha'', \beta'')$, $(\alpha_2, \beta_2)=(\alpha, \beta)$, $(\alpha_3, \beta_3)=(\alpha', \beta')$.

Следствие 4.4. Пусть существуют $\alpha, \beta \in C^3$, $\lambda, \mu \in C^1$ такие,

- что 1) $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, $\alpha \leq \mu \leq \beta$;
 2) $\mu' \leq \alpha' \leq \beta' \leq \lambda'$;
 3) $u \leq v$, где

$$u = \begin{cases} \beta'', & t < c, \\ \alpha'', & t \geq c; \end{cases} \quad v = \begin{cases} \alpha'', & t < c, \\ \beta'', & t \geq c; \end{cases}$$

- 4) $\forall x \in [\alpha, \beta]$

$$(u' - f(t, x, u))(\lambda - x) \geq 0, \quad (v' - f(t, x, v))(\mu - x) \geq 0.$$

Тогда для уравнения (12):

- а) задача (0; 1; 2) разрешима, если

$$\mu(0) \leq A_0 \leq \lambda(0), \quad \alpha'(c) \leq C_1 \leq \beta'(c), \quad \alpha''(1) \leq B_2 \leq \beta''(1);$$

- б) задача (0; 2; 2) разрешима, если $\mu(0) \leq A_0 \leq \lambda(0)$,
 $\alpha''(c) = C_2 = \beta''(c)$, $\alpha''(1) \leq B_2 \leq \beta''(1)$.

Доказательство. Применением теоремы 3.2 к случаю $0 < c < 1$,
 $(\alpha_1, \beta_1) = (u, v)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (\alpha, \beta)$, $(\alpha_3, \beta_3) = (\alpha', \beta')$.

Следствие 4.5. Пусть существуют $\alpha, \beta \in C^3$, $\lambda, \mu \in C^1$ такие,
 что 1) $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, $\alpha \leq \mu \leq \beta$;

- 2) $\mu' \leq \beta' \leq \alpha' \leq \lambda'$;
 3) $u \leq v$, где

$$u = \begin{cases} \alpha'', & t < c, \\ \beta'', & t \geq c; \end{cases} \quad v = \begin{cases} \beta'', & t < c, \\ \alpha'', & t \geq c; \end{cases}$$

- 4') выполняется условие 4 следствия 4.4.

Тогда для уравнения (12):

- а) задача (2; 2; 0) разрешима, если

$$\alpha''(0) \leq A_2 \leq \beta''(0), \quad \alpha''(c) = C_2 = \beta''(c), \quad \lambda(1) \leq B_0 \leq \mu(1);$$

- б) задача (0; 1; 0) разрешима, если $\mu(0) \leq A_0 \leq \lambda(0)$,
 $\beta'(c) \leq C_1 \leq \alpha'(c)$, $\lambda(1) \leq B_0 \leq \mu(1)$.

Доказательство. Применением теоремы 3.3 к случаю $0 < c < 1$,
 $(\alpha_1, \beta_1) = (u, v)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (\alpha, \beta)$, $(\alpha_3, \beta_3) = (\beta', \alpha')$.

Следствие 4.6. Пусть существуют $\alpha, \beta \in C^2$, $\lambda, \mu \in C^1$, $\varphi, \psi \in C^1$
 такие, что

- 1) $\alpha \leq \beta$, $\varphi \leq \psi$;
 2) $\alpha' \leq \lambda \leq \beta'$, $\alpha' \leq \mu \leq \beta'$;
 3) $\forall x' \in [\alpha', \beta']$

$$(\varphi' - f(t, x', \varphi))(\lambda - x') \geq 0,$$

$$(\psi - f(t, x', \psi))(\mu - x') \geq 0;$$

$$4) \mu' \leq \psi, \lambda' \geq \varphi;$$

$$5) \beta''' \leq f(t, \beta', \beta''), \alpha''' \geq f(t, \alpha', \alpha'').$$

Тогда для уравнения (13):

а) задача $(0, 1; 1)$ разрешима, если

$$\alpha(0) \leq A_0 \leq \beta(0), \quad \mu(0) \leq A_1 \leq \lambda(0), \quad \lambda(1) \leq B_0 \leq \mu(1);$$

б) задача $(0, 2; 2)$ разрешима, если

$$\alpha(0) \leq A_0 \leq \beta(0), \quad \beta''(0) \leq A_2 \leq \alpha''(0), \quad \alpha''(1) \leq B_2 \leq \beta''(1).$$

Доказательство. Применением теоремы 3.4 к случаю $c=0$, $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha', \beta')$, $(\alpha_2, \beta_2) = (\varphi, \psi)$, $(\alpha_3, \beta_3) = (\alpha, \beta)$.

Следствие 4.7. Пусть для функций $\alpha, \beta, \varphi, \psi, \lambda, \mu$ выполняются условия 1, 3, 4 следствия 4.6 и

$$2') \beta' \leq \lambda \leq \alpha', \beta' \leq \mu \leq \alpha';$$

$$5') \alpha''' \leq f(t, \alpha', \alpha''), \beta''' \geq f(t, \beta', \beta'').$$

Тогда для уравнения (13): а) задача $(1; 0, 1)$ разрешима, если

$$\mu(0) \leq A_1 \leq \lambda(0), \quad \alpha(1) \leq B_0 \leq \beta(1), \quad \lambda(1) \leq B_1 \leq \mu(1);$$

б) задача $(2; 0, 2)$ разрешима, если

$$\beta''(0) \leq A_2 \leq \alpha''(0), \quad \alpha(1) \leq B_0 \leq \beta(1), \quad \alpha''(1) \leq B_2 \leq \beta''(1).$$

Доказательство. Применением теоремы 3.4 к случаю $c=1$, $(\alpha_1, \beta_1) = (\beta', \alpha')$, $(\alpha_2, \beta_2) = (\varphi, \psi)$, $(\alpha_3, \beta_3) = (\alpha, \beta)$.

Следствие 4.8. Пусть существуют $\alpha, \beta \in C^3$ такие, что

$$1) \alpha \leq \beta, \alpha' \leq \beta';$$

$$2) \forall x \in [\alpha, \beta] \quad \alpha''' \geq f(t, x, \alpha', \alpha''), \quad \beta''' \leq f(t, x, \beta', \beta'');$$

3) условие 3 теоремы 3.5 относительно пары (α', β') .

Тогда для уравнения (2):

а) задача $(0, 1; 1)$ разрешима, если $\alpha(0) \leq A_0 \leq \beta(0)$, $\alpha'(0) \leq A_1 \leq \beta'(0)$, $\alpha'(1) \leq B_1 \leq \beta'(1)$;

б) задача $(0, 1; 2)$ разрешима, если $\alpha(0) \leq A_0 \leq \beta(0)$, $\alpha'(0) \leq A_1 \leq \beta'(0)$, $\alpha''(1) \leq B_2 \leq \beta''(1)$;

в) задача $(0, 2; 2)$ разрешима, если $\alpha(0) \leq A_0 \leq \beta(0)$, $\beta''(0) \leq A_2 \leq \alpha''(0)$, $\alpha''(1) \leq B_2 \leq \beta''(1)$.

Доказательство. Применением теоремы 3.5 с $c=0$, $(u, v) = (\alpha', \beta')$.

Следствие 4.9. Пусть существуют $\alpha, \beta \in C^3$ такие, что

1) $\alpha \leq \beta, \beta' \leq \alpha'$;

2) $\beta''' \geq f(t, x, \beta', \beta''), \alpha''' \leq f(t, x, \alpha', \alpha'')$;

3') условие 3 теоремы 3.5 относительно пары (β', α') .

Тогда для уравнения (2):

а) задача $(1; 0, 1)$ разрешима, если $\beta'(0) \leq \lambda_1 \leq \alpha'(0)$,
 $\alpha(1) \leq B_0 \leq \beta(1), \beta'(1) \leq B_1 \leq \alpha'(1)$;

б) задача $(2; 0, 2)$ разрешима, если $\alpha''(0) \leq \lambda_2 \leq \beta''(0)$,
 $\alpha(1) \leq B_0 \leq \beta(1), \beta''(1) \leq B_2 \leq \alpha''(1)$;

в) задача $(1; 0, 2)$ разрешима, если $\beta'(0) \leq \lambda_1 \leq \alpha'(0)$,
 $\alpha(1) \leq B_0 \leq \beta(1), \beta''(1) \leq B_2 \leq \alpha''(1)$.

Доказательство. Применением теоремы 3.5 с $c=1$,
 $(u, v) = (\beta', \alpha')$.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Н.Х.Розова и В.Г.Сущко, беседы с которыми оказали стимулирующее влияние на написание данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. S.R. Bernfeld and V. Lakshmikantham, An Introduction to Nonlinear Boundary Value Problems, New Yorke/London, 1974.
2. Васильев Н. И., Клоков Ю. А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига, 1978.
3. Кигурадзе И. Г. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси, 1974.
4. Клоков Ю. А. Об одной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, 1988.
5. Barr D., Sherman T. Existence and Uniqueness of Solutions of Three-Point Boundary Value Problems // J. Diff Equations. 1973. V. 13. P. 197-212.
6. Das K., Lalli B. Boundary value problems for $y''' = f(t, y, y', y'')$ // J. Math. Anal. Appl. 1981. V. 81. P. 300-307.
7. Utz W. The existence of solutions of a third order boundary value problem // Nonlinear Anal.:TMA. 1981. V. 5,

N 4. P. 445-448.

8. Jackson L., Schrader K. Subfunctions and Third Order Differential Inequalities // J. Diff. Equations. 1970. V. 8, P. 180-194.
9. G.Klaasen, Differential Inequalities and Existence Theorems for Second and Third Order Boundary Value Problems, J.Diff.Equations, 18 (1975), 529-537.
10. Aftabizadeh A., Wiener J. On the solutions of third order nonlinear boundary value problems, "Trends Theory and Pract. Nonlinear Anal. Amsterdam e.a., 1985, 1 6.
11. Клоков Ю. А., Поспелов Л. Н. Условия априорной ограниченности решений краевых задач для уравнения третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, N 8. С. 1425-1431.
12. Азбелев Н.В., Хохряков А.Я., Цалук З.Б. Теоремы о дифференциальном неравенстве для краевых задач // Матем. сборник. 1962. Т. 59 (101). С. 125-143.
13. J.W. Bebernes and R. Fraker, A priori bounds for boundary sets, Proc. Amer. Math. Soc., 29 (1971), 313-318.
14. Sadyrbaev F. Existence of solutions of even order nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations // Proc. Latv. Acad. Sci., B. 1993. N 4 (549). P. 62-66.

F. Sadyrbaev. Nonlinear third order boundary value problems
Summary. Conditions are given for solvability of boundary value problems for third order nonlinear systems of ordinary differential equations with nonlinear boundary conditions. A number of existence results are derived for boundary value problems for a third order scalar equation.
 1991 MSC 34B15

F. Sadirbajevs. Trešās kārtas nelineāras robežproblēmas
Anotācija. Doti atrisināmības nosacījumi triju pirmās kārtas PDV sistēmai ar nelineāriem robežnosacījumiem. Kā secinājumi iegūta virkne rezultātu par trešās kārtas vienādojuma nelineāru robežproblēmu atrisinājumu eksistenci.

Институт математики и информатики
 Латвийского университета
 Рига, Б.Райня, 29

Поступила 16.01.95

PIESĀRŅŪJUMA IZPLATĪŠANĀS MODELIS NO LINEĀRA AVOTA

J.Viržbickis

Anotācija. Iegūta piesārņojuma koncentrācijas izteiksme lineāram piesārņojuma avotam.

Ievads. Atmosfēras piesārņojums ir kļuvis par mūsdienu civilizācijas neatņemamu sastāvdaļu. Piesārņojuma galvenais avots ir sadegšanas procesi, bez kuriem nav iedomājama sabiedrības eksistence. Sadegšanas produkti ir oglekļa dioksīds un ūdens, kā arī tādi blakusprodukti kā oglekļa oksīds, sēra un slāpekļa oksīdi, sodrēji, nesadeģušie ogļūdeņraži un smago metālu savienojumi. Pēdējie rodas no kurināmā un degvielas piemaisījumiem, nepietiekama skābekļa daudzuma un pārāk augstas vai zemas degšanas temperatūras.

Degvielas sadedzināšana dzinējos ir viens no būtiskiem atmosfēras piesārņotājiem. Tāpēc, veidojot piesārņojuma izplatīšanās matemātiskos modeļus, blakus punktveida piesārņojuma avotiem ir jāpēta arī lineārie modeļi. Viens no tādiem lineārā piesārņojuma avotiem ir automaģistrāles.

Šajā rakstā turpināti pētījumi, kas publicēti [1]. Ir mēģināts izvest analītiskas formulas, kas izsaka piesārņojuma koncentrāciju lineāra avota gadījumā.

1. Matemātiskais modelis. Apskatīsim plaknē bezgalīgu taisni, kas būs piesārņojuma avots. Ņemsim šajā plaknē Dekarta koordinātu sistēmu $Oxyz$. Asi x novietosim uz dotās taisnes, asi y perpendikulāri x asij.

Pieņemsim, ka vējš pūš x ass virzienā, tā ātrums ir u . Ar

c apzīmēsim piesārņojuma koncentrāciju ar q izmestā piesārņojuma daudzumu laika vienībā uz vienu garuma vienību. Vienkāršības labad pieņemsim, ka vējš nemaina ātrumu un virzienu, izmešu daudzums q nemainās. Ar t apzīmēsim laiku, d_1 un d_2 difūzijas koeficientus asu x un y virzienos attiecīgi.

Parciālais otrās kārtas diferenciālvienādojums, kas apraksta piesārņojuma izplatīšanos vēja ietekmē, ir

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = d_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + d_2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + q \quad (1)$$

(izvedumu skat. [1]).

Šim vienādojumam pievienosim sākuma nosacījumus

$$c \Big|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Lai vienkāršotu vienādojumu (1), pāriesim uz citiem mainīgumiem

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{d_1}}, \quad y_1 = \frac{y}{\sqrt{d_2}}, \quad u_1 = \frac{u}{\sqrt{d_1}}.$$

Izdarot ar jaunu mainīgo ieviešanu saistītos pārveidojumus un turpmāk vienkāršības dēļ mainīgo x_1 , y_1 un u_1 vietā rakstot mainīgos x , y un u , iegūstam vienādojumu

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + q \quad (3)$$

Lai atbrīvotos no locekļiem, kas satur 1. kārtas parciālos atvasinājumus vienādojumā (3), lietosim substitūciju

$$c = \varphi \exp(\mu_1 t + \mu_2 x + \mu_3 y), \quad (4)$$

kur μ_i nezināmie koeficienti. Ievietojot vienādojumā (3) substitūciju (4), koeficientus μ_i var izvēlēties tā, ka attiecībā pret φ iegūst vienādojumu ar sākuma nosacījumiem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + q \exp\left(-\frac{u^2}{4} t - \frac{u}{2} x\right), \quad (6) \\ \varphi|_{t=0} = 0. \quad (7) \end{array} \right.$$

Koši problēmas atrisinājums siltumvadišanas tipa vienādojumam izsakās ar formulu (skat. [2])

$\varphi(t, x, y)$

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} q \exp\left(\frac{u^2}{4} \tau - \frac{u}{2} \xi\right) (2\sqrt{\pi(t-\tau)})^{-2} \times \\ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right) d\xi d\eta d\tau \quad (8)$$

Ievērojot, ka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (2\sqrt{\pi(t-\tau)})^{-1} \exp\left(-\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right) d\eta = 1$$

un

$$\frac{u^2}{4} \tau = \frac{u^2}{4} t - \frac{u^2}{4} (t-\tau),$$

kā arī lietojot substitūciju

$$z = \sqrt{t-\tau}$$

pēc pārveidojumiem iegūst

$$\varphi(t, x, y) = \frac{q \exp\left(\frac{u^2}{4} t\right)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4z^2} - \frac{u^2 z^2}{4}\right) dz.$$

Ņemot vērā, ka pārejot no vienādojuma (1) uz vienādojumu (3) mēs pārgājām uz jauniem mainīgiem,

$$\varphi(t, x, y) = \frac{q \exp\left(\frac{u^2}{4d_1} t\right)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4z^2 d_1} - \frac{u^2 z^2}{4d_1}\right) dz.$$

Ievietojot atrasto izteiksmi (4), dabūsim

$$c(t, x, y) = \frac{q \exp\left(-\frac{u x}{2d_1}\right)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4d_1 z^2} - \frac{u^2 z^2}{4d_1}\right) dz.$$

Ievērosim ka c nav atkarīga no y

$$c(t, x, y) = c(t, x).$$

Lai atrastu atrisinājumu stacionāram procesam nav atkarīgs no argumenta t), ņemsim robežu no c liekot t tiekties uz bezgalību.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} c(t, x) &= \frac{q \exp\left(-\frac{u x}{2d_1}\right)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4d_1 z^2} - \frac{u^2 z^2}{4d_1}\right) dz \\ &= \frac{2\sqrt{d_1} x \exp\left(-\frac{u x}{2d_1}\right)}{\sqrt{\pi} u} K_1\left(\frac{ux}{2d_1}\right), \end{aligned}$$

kur $K_1(z)$ ir modificētā Hankeļa funkcija,

$$K_1(z) = \int_0^{\infty} \exp(-z \operatorname{ch} t) \operatorname{ch} t dt \quad (\text{skat. [3]}).$$

Izmantotā literatūra

1. V.Gudkov, V.Liepina, J.Wirzhbitskis. The mathematical model of atmospheric pollution transfer and its numerical realization / Proc. of Latvian Ac.Sc. B. 1993. - N 6(551). P. 58. - 62.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики // М.:Наука, 1977. 736 с.
- 3 Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // М.:ФМ, 1959. 1100 стр.

Виржибитскис Я. Модель распространения загрязнения от линейных источников.

Аннотация. Выведена формула концентрации для линейного источника загрязнения

УДК 502:551.510 + 517.955

J.Wirzhbitskis The propagation of pollution in the case of linear source.

Summary. The expression of pollution concentration is carried out in case of linear pollution source.

1991 MSC 35R15 + 92D40

LU Matemātikas un informātikas
institūts

Iesniegts 1.06.1994

Raiņa bulv. 29, RĪGA, LV-1459

PUNKTVEIDA AVOTA PIESĀRŅŪJUMA KONCENTRĀCIJA

J. Viržbickis

Anotācija. Iegūta piesārņojuma koncentrācijas izteiksme punktveida piesārņojuma avotam.

Ievads. Šajā rakstā turpināti pētījumi, kas publicēti [1]. Ir mēģināts izvest analītiskas formulas, kas izsaka piesārņojuma koncentrāciju punktveida avota gadījumā.

1. Matemātiskais modelis. Ņemsim plaknē Dekarta koordinātu sistēmu $Oxyz$. Pieņemsim, ka vējš pūš x ass virzienā, tā ātrums ir u . Ar c apzīmēsim piesārņojuma koncentrāciju ar q izmestā piesārņojuma daudzumu laika vienībā. Piesārņojuma avots atrodas punktā $(0, 0, H)$. Vienkāršības labad pieņemsim, ka vējš nemaina ātrumu un virzienu, izmešu daudzums q nemainās. Ar t apzīmēsim laiku, d_1 , d_2 un d_3 difūzijas koeficientus ass x , y un z virzienos attiecīgi.

Parciālais otrās kārtas diferenciālvienādojums, kas apraksta piesārņojuma izplatīšanos vēja ietekmē no punktveida piesārņojuma avota, ņemot vērā piesārņojuma krišanu smaguma spēka ietekmē, ir

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = d_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + d_2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + d_3 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad g \frac{\partial c}{\partial z} + q \quad (1)$$

(izvedumu skat. [1]).

Šim vienādojumam pievienosim sākuma nosacījumus

$$c \Big|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Lai vienkāršotu vienādojumu (1), pāriesim uz citiem mainīgiem

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{d_1}}, \quad y_1 = \frac{y}{\sqrt{d_2}}, \quad z_1 = \frac{z}{\sqrt{d_3}}, \quad u_1 = \frac{u}{\sqrt{d_1}}, \quad g_1 = \frac{g}{\sqrt{d_3}}$$

Izdarot ar jaunu mainīgo ieviešanu saistītos pārveidojumus un turpmāk vienkāršības dēļ mainīgo x_1, y_1, z_1, u_1 un g_1 vietā rakstot mainīgos x, y, z, u un g , iegūstam vienādojumu

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - g \frac{\partial c}{\partial z} + q \quad (3)$$

Lai atbrīvotos no locekļiem, kas satur 1. kārtas parciālos atvasinājumus vienādojumā (3), lietojam substitūciju

$$c = \varphi \exp(\mu t + \mu x + \mu y + \mu z), \quad (4)$$

kur μ_i nezināmie koeficienti. Ievietojot vienādojumā (3) substitūciju (4), koeficientus μ_i var izvēlēties tā, ka attiecībā pret φ iegūst vienādojumu ar sākuma nosacījumiem:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + q \exp\left(-\frac{u^2 + g^2}{4} - \frac{u}{2}x + \frac{g}{2}z\right) \quad (6) \\ \varphi|_{t=0} &= 0. \quad (7) \end{aligned} \right.$$

Koši problēmas atrisinājums siltumvadīšanas tipa vienādojumam izsakās ar formulu (skat. [2])

$\varphi(t, x, y)$

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} q \exp\left(\frac{u^2 + g^2}{4} \tau - \frac{u}{2} \xi + \frac{g}{2} \zeta\right) (2\sqrt{\pi(t-\tau)})^{-3} \times \\ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4(t-\tau)}\right) d\xi d\eta d\zeta d\tau \quad (8)$$

Ievērojot, ka piesārņojuma avots ir punktveida ar koordinātēm $(0, 0, H)$ un sakarību

$$\frac{u}{4} \tau = \frac{u}{4} t - \frac{u}{4} (t-\tau),$$

kā arī, lietojot substitūciju

$$v = \sqrt{t-\tau}$$

pēc pārveidojumiem iegūst

$$\varphi(t, x, y) = \frac{q \exp(-\mu_1 t + \mu_4 H)}{4\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{\exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + (z-H)^2}{4v^2} + \mu_1 v^2\right) dv}{v^2} dv.$$

Ņemot vērā, ka pārejot no vienādojuma (1) uz vienādojumu (3) mēs pārgājām uz jauniem mainīgkiem, pēc pārveidojumiem iegūst

$$\varphi(t, x, y) = \frac{q \exp(-\mu_1 t + \mu_4 H)}{4\pi\sqrt{\pi}}$$

$$\int_0^{\sqrt{t}} \frac{\exp\left(\left(\frac{x^2}{d_1} + \frac{y^2}{d_2} + \frac{(z-H)^2}{d_3}\right) \frac{-1}{4v^2} + \mu_1 v^2\right)}{v^2} dv.$$

Ievietojot šo izteiksmi (4), kā arī ievietojot μ_1 vietā to vērtības $\mu_1 = \frac{u^2 + g^2}{4}$, $\mu_2 = \frac{u}{2}$, $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = \frac{g}{2}$.

dabūsim

$$c(t, x, y) = \frac{q \exp\left(\frac{ux}{2\sqrt{d_1}} + \frac{g(H-z)}{2\sqrt{d_3}}\right)}{4\pi\sqrt{\pi}}$$

$$\times \int_0^{\sqrt{t}} \frac{\exp\left(\left(\frac{x^2}{d_1} + \frac{y^2}{d_2} + \frac{(z-H)^2}{d_3} - \frac{1}{4\nu^2}\left(\frac{u^2}{4d_1} + \frac{g^2}{4d_3}\right)\nu^2\right)\nu^2\right)}{\nu^2} d\nu.$$

Lai atrastu atrisinājumu stacionāram procesam (nav atkarīgs no argumenta t), ņemsim robežu no c liekot t tiekties uz bezgalību.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t, x, y) =$$

$$q \exp\left(\frac{ux}{2\sqrt{d_1}} + \frac{g(H-z)}{2\sqrt{d_3}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2}{d_1} + \frac{y^2}{d_2} + \frac{(z-H)^2}{d_3}} \sqrt{\frac{u^2}{d_1} + \frac{g^2}{d_3}}\right)$$

$$4\pi \sqrt{\frac{x^2}{d_1} + \frac{y^2}{d_2} + \frac{(z-H)^2}{d_3}}$$

(skat. [3]).

Izmantotā literatūra

1. V.Gudkov, V.Liepina, J.Wirzhbitskis The mathematical model of atmospheric pollution transfer and its numerical realization / Proc. of Latvian Ac.Sc. B. 1993. N 6(551). P. 58. - 62.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики // М.:Наука, 1977. 736 с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // М.:ФМ, 1959. 1100 стр.

Виржибитскис Я. Концентрация загрязнения точечного источника. Аннотация. Выведена формула концентрации для точечного источника загрязнения
УДК 502:551.510 + 517.955

J. Wirzbitskis The concentration of pollution in the case of pointwise source.

Summary. The expression of pollution concentration is carried out in case of pointwise pollution source.

1991 MSC 35K15 + 92D40

LU Matemātikas un informātikas
institūts

Iesniegts 16.06.1994

Raiņa bulv. 29, RĪGA, LV-1459

THE STABILITY OF SEMIDYNAMICAL SYSTEM IN METRIC SPACE

A.Reinfelds

Summary. Asymptotic behavior of semidynamical system in complete metric space is considered.

1991 MSC 34C35, 54E20, 58F99

0. Introduction

The purpose of this paper is to extend stability results for systems of semilinear ordinary differential equations and semilinear discrete dynamical systems in Euclidean and Banach spaces [1-11, 15] to corresponding ones for mapping in complete metric space.

We prove that asymptotic behavior of semidynamical system given by a continuous mapping

$$(x, y, s) \quad (f(x, y, s), g(x, y, s), \sigma(s))$$

is determined by the reduced semidynamical system given by continuous mapping

$$(\xi, s) \quad (f(\xi, u(\xi, s), s), \sigma(s))$$

on the invariant set.

1. Main result

Let X and Y be complete metric spaces with metrics ρ_1 and ρ_2 , respectively, and let S be a topological space. Consider a continuous and possibly noninvertible mapping $T: X \times Y \times S \rightarrow X \times Y \times S$, where $T(x, y, s) = (f(x, y, s), g(x, y, s), \sigma(s))$.

We will make the following hypotheses:

$$(H1) \quad \rho_1(x, x') \leq \alpha \rho_1(f(x, y, s), f(x', y, s)), \quad \alpha > 0.$$

$$(H2) \quad \rho_1(f(x, y, s), f(x, y', s)) \leq \beta \rho_2(y, y').$$

$$(H3) \quad \rho_2(g(x, y, s), g(x', y', s)) \leq \tau \rho_1(x, x') + \delta \rho_2(y, y'),$$

where $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$.

(H4) Mapping $f(\cdot, y, s): X \rightarrow X$ is surjective.

(H5) Mapping $\sigma: S \rightarrow S$ is a homeomorphism.

Denote

$$k = 2\alpha\gamma \left[1 - \alpha\delta + \sqrt{(1 - \alpha\delta)^2 + 4\alpha^2\beta\gamma} \right]^{-1}$$

and

$$l = 2\alpha\beta \left[1 - \alpha\delta + \sqrt{(1 - \alpha\delta)^2 + 4\alpha^2\beta\gamma} \right]^{-1}$$

Let us give a sufficient condition for the existence of a mapping $u: X \times S \rightarrow Y$, whose graph is an invariant set.

Theorem 1. [11] Let the hypotheses (H1)–(H5) hold and let there exist continuous mappings $x_0: S \rightarrow X$ and $y_0: S \rightarrow Y$ such that

$$\begin{aligned} f(x_0(s), y_0(s), s) &= x_0(\sigma(s)), \\ g(x_0(s), y_0(s), s) &= y_0(\sigma(s)). \end{aligned}$$

Then there exists a continuous mapping $u: X \times S \rightarrow Y$ satisfying the functional equation

$$u(f(x, u(x, s), s), \sigma(s)) = g(x, u(x, s), s), \quad (1)$$

the Lipschitz condition

$$\rho_2(u(x, s), u(x', s)) \leq k\rho_1(x, x') \quad (2)$$

and $u(x_0(s), s) = y_0(s)$.

Theorem 2. [12–14] Let the hypotheses (H1)–(H5) hold and let there exist a continuous mapping $u: X \times S \rightarrow Y$ satisfying (1) and (2). Then there exists a continuous mapping $q: X \times Y \times S \rightarrow X$, Lipschitzian with respect to the second variable and a homeomorphism $H: X \times Y \times S \rightarrow X \times Y \times S$ such that the diagram commutes,

$$\begin{array}{ccc} X \times Y \times S & \xrightarrow{T} & X \times Y \times S \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ X \times Y \times S & \xrightarrow{R} & X \times Y \times S \end{array}$$

where $R(x, y, s) = (f(x, u(x, s), s), g(q(x, y, s), y, s), \sigma(s))$.

Remark. From the proof of theorem follows that

$$H(x, y, s) = (p(x, y, s), y, s), \quad H^{-1}(x, y, s) = (x, q(x, y, s), s)$$

and

$$d(p, id_x) = \sup_{x, y, s} (\rho_1(p(x, y, s), x) (\rho_2(y, u(x, s))^{-1})) \leq 1.$$

Now we will formulate the main result of the paper.

Theorem 3. Let the conditions of the Theorem 1 are satisfied and let $(x, y, s) \in X \times Y \times S$. Then there exists $\xi \in X$ such that as $n \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \rho_1(x^n, x_0(s^n)) &\leq l(k\beta + \delta)^n \rho_2(y, u(x, s)) + \rho_1(\xi^n, x_0(s^n)), \\ \rho_2(y^n, y_0(s^n)) &\leq (1 + kl)(k\beta + \delta)^n \rho_2(y, u(x, s)) + k\rho_1(\xi^n, x_0(s^n)) \end{aligned}$$

and

$$\rho_1(\xi, x_0(s)) \leq l\rho_2(y, y_0(s)) + (1 + kl)\rho_1(x, x_0(s)),$$

where

$$T^n(x, y, s) = (f^n(x, y, s), g^n(x, y, s), \sigma^n(s)) \quad (x^n, y^n, s^n)$$

is n -th iterate of T .

2. Proof of Theorem 3

Proof. According to (1), (2), (H2) and (H3) we have

$$\begin{aligned} &\rho_2(u(f(x, y, s), \sigma(s)), g(x, y, s)) \\ &\leq \rho_2(u(f(x, y, s), \sigma(s)), u(f(x, u(x, s), s), \sigma(s))) \\ &+ \rho_2(g(x, u(x, s), s), g(x, y, s)) \leq (k\beta + \delta)\rho_2(y, u(x, s)). \end{aligned}$$

Using the mathematical induction, we obtain

$$\rho_2(u(f^n(x, y, s), \sigma^n(s)), g^n(x, y, s)) \leq (k\beta + \delta)^n \rho_2(y, u(x, s))$$

or

$$\rho_2(y^n, u(x^n, s^n)) \leq (k\beta + \delta)^n \rho_2(y, u(x, s)).$$

Let $\xi = p(x, y, s)$. Then

$$\begin{aligned} \xi^1 &= f(\xi, u(\xi, s), s) = f(p(x, y, s), u(p(x, y, s), s), s) \\ &= p(f(x, y, s), g(x, y, s), \sigma(s)) = p(x^1, y^1, s^1). \end{aligned}$$

Using mathematical induction, we obtain $\xi^n = p(x^n, y^n, s^n)$. Therefore

$$\begin{aligned} \rho_1(x^n, \xi^n) &\leq \rho_1(x^n, p(x^n, y^n, s^n)) \\ &\leq d(p, id_1)\rho_2(y^n, u(x^n, s^n)) \leq l(k\beta + \delta)^n \rho_2(y, u(x, s)). \end{aligned}$$

We get

$$\begin{aligned} \rho_1(x^n, x_0(s^n)) &\leq \rho_1(x^n, \xi^n) + \rho_1(\xi^n, x_0(s^n)) \\ &\leq l(k\beta + \delta)^n \rho_2(y, u(x, s)) + \rho_1(\xi^n, x_0(s^n)) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \rho_2(y^n, y_0(s^n)) &\leq \rho_2(y^n, u(x^n, s^n)) + \rho_2(u(x^n, s^n), y_0(s^n)) \\ &\leq (1 + kl)(k\beta + \delta)^n \rho_2(y, u(x, s)) + k\rho_1(\xi^n, x_0(s^n)). \end{aligned}$$

Let us note that

$$\begin{aligned} \rho_2(y, u(x, s)) &\leq \rho_2(y, y_0(s)) + \rho_2(u(x, s), u(x_0(s), s)) \\ &\leq \rho_2(y, y_0(s)) + k\rho_2(x, x_0(s)) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \rho_1(\xi, x_0(s)) &\leq \rho_1(p(x, y, s), x) + \rho_1(x, x_0(s)) \\ &\leq l\rho_2(y, u(x, s)) + \rho_1(x, x_0(s)) \\ &\leq l\rho_2(y, y_0(s)) + (1 + kl)\rho_1(x, x_0(s)). \end{aligned}$$

Thus the theorem is proved.

3. Example

Let us consider a nonautonomous system of difference equations on Z of the form

$$\begin{aligned} x(n+1) &= A(n)x(n) + F(x(n), y(n), n), \\ y(n+1) &= B(n)y(n) + G(x(n), y(n), n), \end{aligned} \quad (3)$$

where $X \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$, \mathcal{X} and \mathcal{Y} are Banach spaces, $A(n)$ and $B(n)$ are bounded linear mappings, $A(n)$ is invertible, $\|B(n)\| < \|A^{-1}(n)\|^{-1}$, and mappings $F: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times Z \rightarrow \mathcal{X}$, $G: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times Z \rightarrow \mathcal{Y}$ satisfy Lipschitz conditions

$$|F(x, y, n) - F(x', y', n)| \leq \varepsilon(|x - x'| + |y - y'|),$$

$$|G(x, y, n) - G(x', y', n)| \leq \varepsilon(|x - x'| + |y - y'|),$$

$$F(0, 0, n) = 0 \text{ and } G(0, 0, n) = 0.$$

It is easy to verify that this mapping satisfies the hypotheses (H1)–(H5), where $\alpha = ((\sup_n \|A^{-1}(n)\|)^{-1} - \varepsilon)^{-1}$, $\beta = \gamma = \varepsilon$, $\delta = \sup_n \|B(n)\| + \varepsilon$ and $\sigma(n) = n + 1$. The mapping given by formula $x_1 = A(n)x + F(x, y, n)$ for fixed n and y is surjective, if $\varepsilon \sup_n \|A^{-1}(n)\| < 1$. The condition $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$ reduces to the inequality

$$\varepsilon \leq 4^{-1}((\sup_n \|A^{-1}(n)\|)^{-1} - \sup_n \|B(n)\|).$$

Let us note that $\varepsilon \sup_n \|A^{-1}(n)\| < 4^{-1} < 1$. Moreover, the conditions of the Theorem 1 are fulfilled.

According to Theorem 3 we get estimates

$$\|x(n)\| \leq l(k\beta + \delta)^n(\|y\| + k\|x\|) + \|\xi(n)\|,$$

$$\|y(n)\| \leq (1 + kl)(k\beta + \delta)^n(\|y\| + k\|x\|) + k\|\xi(n)\|,$$

where

$$\zeta(n+1) = A(n)\zeta(n) + F(\zeta(n), u(\zeta(n), n), n) \quad (4)$$

and

$$\|\zeta\| \leq l\|y\| + (1 + kl)\|x\|.$$

Hence, the stability of the zero solution of (3) can be proved by studying (4). If $k\beta + \delta < 1$ and zero solution of (4) is stable, so zero solution of (3) is stable. If $k\beta + \delta < 1$ and

zero solution of (4) is asymptotically stable, so zero solution of (3) is asymptotically stable.

Acknowledgment

This work was supported by the Latvian Council of Science, Grant 93.809.

References

1. Aulbach B. Continuous and discrete dynamics near manifolds of equilibria. Lect. Notes in Math. Berlin: Springer, 1984. - Vol. 1058.
2. Aulbach B., Garay B.M. Partial linearization for noninvertible mappings. // J. Appl. Math. Phys. 1994. Vol. 45. P. 505-542.
3. Florio J.S., Seibert P. Some aspects of the reduction problem of stability for nonlinear systems. // Aportaciones Matematicas. Ser. Com. 1994. Vol.14. P. 269 281.
4. Hartman P. Ordinary differential equations. Second Edition. - Boston: Birkhauser, 1982.
5. Carr J. Applications of centre manifold theory. Berlin: Springer, 1981.
6. Kirchgraber U., Palmer K.J. Geometry in the neighbourhood of invariant manifolds of maps and flows and linearization. Pitman Res. Notes Math. Ser.- Harlow: Longman Sci. Tech., 1991. - Vol.233.
7. Marsden J.E., McCracken M. The Hopf bifurcation and its applications. - Berlin: Springer, 1976.
8. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. - М.: Наука, 1973.
9. Неймарк Ю.М. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1972.
10. Плисс В.А. Интегральные множества периодических систем, дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1977.
11. Reinfelds A. Invariant sets for splitting mapping in metric space. // Latv. Univ. Zinātn. Raksti. Matemātika. - 1993. - 588. - P. 35-44.

12. Reinfelds A. Decoupling of mappings in a metric space. // Proc. Latvian Acad. Sci. Sect. B. 1994. N 2(559) P. 67-75.
13. Reinfelds A. The reduction principle for discrete dynamical and semidynamical systems in metric spaces. // J. Appl. Math. Phys. 1994. - Vol. 45. - P. 933-955.
14. Reinfelds A. Partial decoupling for noninvertible mappings. // Differential Equations and Dynamical Systems 1994. Vol. 2, N 3. - P. 205-215.
15. Seibert P., Florio J.S. A reduction principle in the theory of stability. // Aportaciones Matematicas. Ser. Com. 1994. Vol.14. P. 337 343.

A. Рейнфельд. Устойчивость семидинамической системы в метрическом пространстве.

Аннотация. Исследуется асимптотика семидинамической системы в метрическом пространстве.

УДК 517.988.6, 517.938, 517.965

A.Reinfelds. Semidinamiskas sistēmas stabilitāte metriskā telpā.

Anotācija. Metriskā telpā pētīta semidinamiskas sistēmas asimptotika.

Institute of Mathematics
Latvian Academy of Science
University of Latvia
Turģeneva ielā 19,
Rīga, LV-1524, Latvia

Received 03.03.95

SATURA RĀDĪTĀJS

1. М.М.Адъятов, Ю.А.Клоков. Оценки некоторых интегральных функционалов для уравнений типа Эйдена-Фаулера.....5
2. М.М.Адъятов, Ю.А.Клоков. О некоторых теоремах сравнения для решений нелинейных уравнений типа Эйдена-Фаулера.....12
3. Ю.А.Клоков. Об асимптотике решений некоторых рекуррентных уравнений для коэффициентов Чебышева...19
4. Ю.А.Клоков. О задаче Неймана для нелинейного ОДУ четвертого порядка.....25
5. А.Я.Лепин. Краевая задача для уравнения третьего порядка.....30
6. В.Д.Пономарев. Существование решения краевой задачи для уравнения третьего порядка с функциональными граничными условиями.....42
7. Н.И.Васильев. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка.....47
8. А.И.Звягинцев, О.В.Тихая. Об ограниченности и существовании решений краевых задач.....52
9. Л.А.Лепин. О структуре множества решений обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка.....59
10. Л.А.Лепин. Об отсутствии монотонных решений одной нелинейной краевой задачи.....75
11. А.А.Степанов. Об одном численном методе обращения геофизических и гелиосейсмических данных.81
12. А.Д.Мышкис. О моей работе в Латвийском государственном университете.....90
13. В.Д.Пономарев. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка.....109
14. Ф.И.Садырбаев. Нелинейные краевые задачи третьего порядка.....114
15. J.Viržbickis. Piesārņojuma izplatīšanās

modelis no lineāra avota.....	131
16. J.Viržbickis. Punktveida avota piesārņojuma koncentrācija.....	135
17. A.Reinfelds. The stability of semidynamical system in metric space.....	139