

АСТРОНОМИЯ

ВЫПУСК 12

**ТОЧНОСТЬ  
АСТРОМЕТРИЧЕСКИХ  
НАБЛЮДЕНИЙ  
МАЛЫХ ТЕЛ  
И ВРЕМЕНИ**

Министерство высшего и среднего специального образования  
Латвийской ССР

Латвийский ордена Трудового Красного Знамени  
государственный университет имени Петра Стучки

Астрономическая обсерватория

А С Т Р О Н О М И Я

Выпуск 12

ТОЧНОСТЬ АСТРОМЕТРИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ  
МАЛЫХ ТЕЛ И ВРЕМЕНИ

Республиканский межведомственный сборник  
научных трудов



Латвийский государственный университет им. П. Стучки  
Рига 1977

УДК 521.2

522.43

525.73

В статьях, помещенных в настоящем сборнике, точность определения времени и определения орбит трактуется с различных точек зрения. Рассматривается улучшение аппаратуры, на которой происходят наблюдения, усовершенствование методов обработки и организации наблюдений, учет боковой рефракции, а также непосредственный анализ наблюдений с выделением новых закономерностей.

Работы Астрономической обсерватории Латвийского государственного университета до 1977 года публиковались в издании "Ученые записки Латвийского государственного университета имени Петра Стучки". С 1977 года в связи с расширением сотрудничества между вузами и учреждениями сборник будет именоваться "Республиканский межведомственный сборник научных трудов".

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Э.Каупш (отв. ред.),

К.Лапушка, Л.Лауцениек

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
ЛГУ им. П.Стучки от 24 декабря 1976 года

© Латвийский государственный университет им. П.Стучки, 1977

Т 20602-008v 215-77  
М 812(II)-77

УДК 525.73

К. А. Штейне

ЛГУ им. П. Стучки

### ОЦЕНКА БОКОВОЙ РЕФРАКЦИИ

#### § 1. Дифференциальное уравнение криволинейного луча

В классических теориях рефракции считается, что уровенные поверхности коэффициента преломления суть концентрические сферы, что приводит к отсутствию боковой рефракции. В моделях атмосферы с осевой симметрией в меридиональных плоскостях также отсутствует боковая рефракция. Нами разработана модель рефракции атмосферы [1], по которой можно определить по метеонаблюдениям рефракцию луча, идущего в произвольном направлении. В настоящей статье упомянутая модель применена для определения боковой рефракции и получены сравнительно простые выражения для определения боковой рефракции. Численным методом боковую рефракцию по метеоданным определял С. Такаги [2]. Для определения неплоского луча выгодно применять принцип Ферма. Нас интересует боковая рефракция в меридиане; ограничимся рассмотрением луча, направленного в зенит, если вращение Земли не учитывается, то для простоты выкладки будем считать

$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv 0, \quad \varphi = \varphi_0,$$

где  $\varphi_0$  широта места наблюдения,  $\varphi$  — широта точки луча,  $r$  — радиус-вектор, отсчитываемый от центра Земли.

Для подсчета отклонения луча от меридиана имеем следующее уравнение

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{n r^2 \cos^2 \varphi \frac{d\lambda}{dz}}{\sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}} \right] = \frac{\partial n}{\partial \lambda} \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2},$$

где  $\lambda$  - долгота точки луча, отсчитываемая от меридиана,  $n$  - коэффициент рефракции. Учитывая, что  $\lambda$  и  $r \frac{d\lambda}{dz}$  суть малые величины, уравнение луча можно упростить ( $\lambda_1 = 0$ )

$$\frac{d}{dz} \left( n r^2 \cos^2 \varphi \frac{d\lambda}{dz} \right) = \frac{\partial n}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \quad (1)$$

## § 2. Уравнение для поверхностей уровня коэффициента рефракции

Предполагается, что метеоданные могут интерполироваться линейно в слое между уровнями наблюдений. Это предположение обеспечивается метеорологами, сознательно выбирающими соответственно высотам достаточно малые расстояния между уровнями наблюдений. Уровневые поверхности предполагаются сферами с линейными поправками. В случае определения боковой рефракции используются данные двух станций, находящихся по возможности на одной параллели. Соответствующее уравнение в сферической системе координат имеет следующий вид

$$r = R_0 + b\lambda, \quad (2)$$

где параметры  $R_0$  и  $b$  определяются по метеоданным в предположении возможности линейной интерполяции коэффициента рефракции. Чтобы между станциями не получились инверсия коэффициента рефракции и двухзначность его, следует выравнивать метеоданные так, чтобы в одном слое градиенты рефракции на обеих метеостанциях имели одинаковый знак. Следовательно,

$$R_{02} + b_2 \lambda_1 = r_1(\lambda_1) + \tau \Delta_1(\lambda_1),$$

$$R_{i+1}(\lambda_2) = r_i(\lambda_2) + \tau \Delta_i(\lambda_2),$$

$$\tau = \frac{n - n_i}{n_{i+1} - n_i} = \frac{n - n_i}{\Delta_i n}, \quad \Delta_i(\lambda) = r_{i+1}(\lambda) - r_i(\lambda).$$

Здесь  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  "долготы метеостанций". После нахождения параметров  $R_{i+1}$   $b_i$  и подстановки их значений в уравнение поверхности уровня имеем

$$\tau = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) r_i - \lambda_1 r_i(\lambda_2) + \lambda_2 r_i(\lambda_1) - \lambda [r_i(\lambda_1) - r_i(\lambda_2)]}{\lambda_1 \Delta_i(\lambda_2) - \lambda_2 \Delta_i(\lambda_1) + \lambda [\Delta_i(\lambda_1) - \Delta_i(\lambda_2)]}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \lambda} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) [-r_i(\lambda_1) \Delta_i(\lambda_2) + r_i(\lambda_2) \Delta_i(\lambda_1) - r_i [\Delta_i(\lambda_1) - \Delta_i(\lambda_2)]]}{[\lambda_1 \Delta_i(\lambda_2) - \lambda_2 \Delta_i(\lambda_1) + \lambda [\Delta_i(\lambda_1) - \Delta_i(\lambda_2)]]^2}, \quad (4)$$

Нас интересует  $\left. \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$ ,  $\lambda_1=0$ , что можно получить из (4). Имеем

$$\left. \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = a_i + b_i r_i, \quad n_i \geq n \geq n_{i+1}, \quad (5)$$

$$a_i = \Delta_i n \frac{r_i(0) \Delta_i(\lambda_2) - r_i(\lambda_2) \Delta_i(0)}{\lambda_2 \Delta_i^2(0)}, \quad (6)$$

$$b_i = \Delta_i n \frac{\Delta_i(0) - \Delta_i(\lambda_2)}{\lambda_2 \Delta_i^2(0)}. \quad (7)$$

### § 3. Интегрирование дифференциального уравнения криволинейного луча

Учитывая (5), уравнение (I) принимает следующий вид

$$n r^2 \cos^2 \varphi \frac{d\lambda}{dz} = a_i r + \frac{1}{2} b_i r^2 + C_i. \quad (8)$$

На основе (8) составим алгоритм для определения  $C_i$ ; т.е.  $C$  для  $i$ -того слоя. Для первого слоя имеем

$$0 = C_1 + a_1 z_1 + \frac{1}{2} b_1 z_1^2.$$

В начале второго слоя, т.е. в конце первого, имеем

$$n_2 z_2^2 \frac{d\lambda}{dz} = C_1 + a_1 z_2 + \frac{1}{2} b_1 z_2^2 = C_2 + a_2 z_2 + \frac{1}{2} b_2 z_2^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} C_2 &= -a_1 z_1 - \frac{1}{2} b_1 z_1^2 + a_1 z_2 + \frac{1}{2} b_1 z_2^2 - a_2 z_2 - \frac{1}{2} b_2 z_2^2 = \\ &= a_1 \Delta_1(0) + \frac{1}{2} b_1 (z_1 + z_2) \Delta_1(0) - a_2 z_2 - \frac{1}{2} b_2 z_2^2. \end{aligned}$$

Аналогично для  $i$ -того слоя

$$C_i = \sum_{k=1}^{i-1} \left[ a_k + \frac{1}{2} b_k (z_k + z_{k+1}) \right] \Delta_k(0) - a_i z_i - \frac{1}{2} b_i z_i^2. \quad (9)$$

Подставляя значения для  $a_k$  и  $b_k$ , получим

$$C_i = \sum_{k=1}^{i-1} \Delta_k n \bar{p}_k - a_i z_i - \frac{1}{2} b_i z_i^2, \quad (10)$$

где  $\bar{p}_k$  среднее значение подъема  $k$ -того слоя

$$\bar{p}_k = \frac{1}{\lambda_2} \left[ \frac{z_{k+1}(\lambda_1) + z_k(\lambda_1)}{2} - \frac{z_{k+1}(\lambda_2) + z_k(\lambda_2)}{2} \right].$$

Следовательно,

$$n_N z_N^2 \cos^2 \varphi \left. \frac{d\lambda}{dz} \right|_N = a_{N-1} z_N + \frac{1}{2} b_{N-1} z_N^2 + C_{N-1} = \sum_{k=1}^{N-1} \Delta_k n \bar{p}_k. \quad (11)$$

Для определения рефракции необходимо знать

$$z_N \left. \frac{d\lambda}{dz} \right|_N = \frac{1}{n_N z_N \cos^2 \varphi} \sum_{k=1}^{N-1} \Delta_k n \bar{p}_k \cong \sum_{k=1}^{N-1} \Delta_k n \bar{p}_k^0, \quad (12)$$

где  $\bar{p}_k$  — наклон  $k$ -того слоя в радианах.

Для определения рефракции следует определить также значение  $\lambda_N$ .

Интегрируя (8) вторично, имеем

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\sec^2 \varphi}{n^2} \left( C_i + a_i z + \frac{1}{2} b_i z^2 \right) dz. \quad (13)$$

Учитывая, что числитель в подынтегральном уравнении есть малая величина, приближенно имеем

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i = \frac{\Delta_i(0) \sec^2 \varphi}{\bar{n}_i \bar{z}_i^2 \cos^2 \varphi} \left[ C_i + \frac{1}{2} a_i (z_{i+1} + z_i) + \frac{1}{6} b_i (z_{i+1}^2 + z_{i+1} \cdot z_i + z_i^2) \right]. \quad (14)$$

Учтем, что  $\lambda_0 = 0$ . Суммируя выражение (14) от  $i=0$  до  $i=N$ , получим

$$\lambda_N = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\Delta_i(0) \sec^2 \varphi}{\bar{n}_i \bar{z}_i^2} \left[ \sum_{k=1}^{i-1} \Delta_k n \bar{p}_k + \frac{1}{2} \Delta_i n \bar{p}_i + \frac{1}{12} \Delta_i n \bar{g}_i \right], \quad (15)$$

где

$$\bar{g}_i = \frac{\Delta_i(\lambda_2) - \Delta_i(0)}{\lambda_2}.$$

Следует отметить, что  $\bar{p}_k$  и  $\bar{g}_i$  — малые величины.

Боковой рефракцией мы будем называть поправку к наблюдениям времени по лучу, идущему в среде с коэффициентом рефракции, равным единице. Следует подсчитать  $\lambda$  и  $\frac{d\lambda}{dz}$  для слоя  $n=1$ . Известно  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\frac{d\varphi}{dz}$ , которые являются в нашей гипотезе величинами постоянными. Угол между лучом и меридианом в точке  $z$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$  определяется из соображений

$$\vec{\tau} = S \vec{r}, \quad (16)$$

$\vec{r}$  — единичный вектор касательной,  $S$  — постоянная, что дает приближенно

$$\text{рефр.} = \lambda + z \frac{d\lambda}{dz}. \quad (17)$$

## § 4. Пример

Рассмотрим боковую рефракцию 19/1-72 г. в Риге. Учтем только нижние слои атмосферы т.е. до 1 км. Метеостанции: Рига и Лиепая.

$n_i - 1$	$z_i = 6400$			
	Рига	Лиепая	$\lambda_2 \bar{p}_i$	$\Delta_1 n \lambda_2 \bar{p}_i$
$10^{-7}$				
3364 -39	0,220	0,401	-0,173	$6,74 \cdot 10^{-7}$
3325 -14	0,310	0,474	-0,157	2,20
3311 -54	0,349	0,500	-0,261	14,09
3257 -18	0,500	0,872	-0,390	7,02
3239	0,591	1,000		

Численное интегрирование дает, что рефр =  $0,40 \cdot 10^{-7}$ ,  $\lambda$  практически равно 0. Различие объясняется ошибками округления. Рефракция в радианах равна  $0,36 \cdot 10^{-7}$ .

## Л и т е р а т у р а

1. Штейнс К.А., Каупус Э.Я., Розенберг П.П., См.наст. сб. с. II.
2. Takagi S. "Pub. Inter. Latit. Observ. Mizusawa", 1974, N 2, t. 9.

К. А. Штейн

## ОЦЕНКА БОКОВОЙ РЕФРАКЦИИ

На основе принципа Ферма в предположении сферически слоистой атмосферы с линейной поправкой вдоль параллели и с постоянным градиентом рефракции в направлении радиуса вектора Земли получены приближенные формулы для определения боковой рефракции по двум станциям метеонаблюдений. Результаты, полученные по приближенным формулам, практически совпадают с результатами полученными численным интегрированием дифференциальных уравнений Эйлера.

Таблиц - I; библиогр. - 2 назв.

K o r a a v i l k u m s

K. Š t e i n s

## SĀŅUS REFRAKCIJAS NOVĒRTĒJUMS

Balstoties uz Fermā principu, sfēriski kĀrtainai atmosfĒrai ar lineĀru korekciju paralĒles virzienā un nemainīgu refrakcijas gradientu Zemes radiusvektora virzienā, atrastas tuvinas formulas sāņus refrakcijas aprĒķināšanai pēc divu staciju meteorovĒrojumiem. Rezultāti praktiski neatsķiras no rezultātiem, ko iegūst Eilera diferenciālvienādojumus skaitliski integrējot.

## S u m m a r y

K. Š t e i n s

## ESTIMATION OF LATERAL REFRACTION

Based on Fermat principle, formulae are derived for approximate calculation of lateral refraction. The re-

fraction model of atmosphere is spherical one with linear correction in longitude and with constant gradient in direction to the Earth Centre. It is necessary to know data of Radio Sonde observations made at two stations. The results agree with results obtained by numerical integrations of Euler's differential equations.

УДК 525.73

К. А. Штейнс,  
Э. Я. Каупш,  
П. П. Розенберг  
ЛГУ им. П. Стучки

СФЕРИЧЕСКИ СЛОИСТАЯ МОДЕЛЬ РЕФРАКЦИИ АТМОСФЕРЫ  
С ЛИНЕЙНЫМИ ПОПРАВКАМИ

§ I. Модель атмосферы

Классической является сферически слоистая модель. В этой модели нет боковой рефракции при наблюдениях в меридиане. Сферическая модель близка к действительности, однако нуждается в уточнении [1]. Имеются некоторые затруднения при реализациях моделей. Числовые данные о состоянии атмосферы на разных метеорологических станциях могут приводить к противоречиям в некоторых промежуточных точках атмосферы, а именно, в некоторых точках могут получаться два или несколько значений коэффициента рефракции. В настоящей статье строится модель свободная от упомянутой нелепости. С другой стороны, в определяемой модели первые и высшие производные от коэффициентов рефракции по высоте будут претерпевать скачки. Это обстоятельство не вносит существенных осложнений, т.к. всю атмосферу можно рассматривать как состоящую из конечного числа слоев, где упомянутых скачков нет.

Предлагается следующая модель атмосферы. Уровенные поверхности имеют вид

$$\begin{aligned}x &= (R_0 + a\varphi + b\lambda) \cos\varphi \cos\lambda, \\y &= (R_0 + a\varphi + b\lambda) \cos\varphi \sin\lambda, \\z &= (R_0 + a\varphi + b\lambda) \sin\varphi,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\lambda$  и  $\varphi$  соответственно долгота и широта точки поверх-

ности уровня, у которой прямоугольные геоцентрические координаты суть  $x, y, z$ . В формуле (I) постоянные  $R_0, \alpha, \beta$  определяются по согласованным метеорологическим данным нескольких станций, предполагая линейность изменения коэффициента рефракции  $n$  с высотой между двумя узлами измерений. С таким именно расчетом проводятся метеорологические измерения. Чтобы избежать многозначности область наблюдений разделяется на части (см. рис. I) и в каждой подобласти коэффициенты  $R_0, \alpha, \beta$  определяются только по вершинам соответствующего сферического треугольника. Данные станции

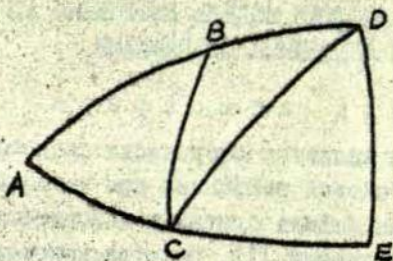


Рис. I. Разделение атмосферы на подобласти

можно исправлять по данным соседних станций. Это целесообразно, если луч проходит через области, определенные только тремя станциями, а метеорологических станций больше. Так или иначе данные наблюдений следует выравнять так, чтобы коэффициент рефракции данного слоя  $n$  монотонно увеличивался или уменьшался на всех трех станциях одновременно с высотой. Чтобы избежать скачков в производных линейной интерполяцией для общего значения  $n$  определяются высоты уровнейных поверхностей для любой из трех станций.

## § 2. Основная система дифференциальных уравнений и ее приведение к каноническому виду

Траектория света определяется согласно принципу Ферма. Принцип Ферма выражает факт, что при отражении и преломлении луч идет по пути, где требуется наименьшее

время. Его можно записать в различных системах координат. Если принцип Ферма записывается в сферической системе координат, то соответствующие уравнения будут [2]

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{N_{\varphi} \cos \varphi}{z \sqrt{n^2 z^2 \cos^2 \varphi - N_{\lambda}^2 - N_{\varphi}^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (2)$$

$$\frac{d\lambda}{dz} = \frac{N_{\lambda}}{z \cos \varphi \sqrt{n^2 z^2 \cos^2 \varphi - N_{\lambda}^2 - N_{\varphi}^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\varphi}}{dz} &= \frac{\partial n}{\partial \varphi} \sqrt{1 + z^2 \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + z^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2} - \\ &= \frac{n z^2 \cos \varphi \sin \varphi \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}{\sqrt{1 + z^2 \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + z^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}}, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\frac{dN_{\lambda}}{dz} = \frac{\partial n}{\partial \lambda} \sqrt{1 + z^2 \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + z^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2} \quad (5)$$

Подставив (2) и (3) в формулы (4) и (5), получим систему (2) (3) (4a) (5a), пригодную для решения со стандартной программой:

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\varphi}}{dz} &= \frac{\partial n}{\partial \varphi} \frac{z \cos \varphi}{\sqrt{n^2 z^2 \cos^2 \varphi - N_{\lambda}^2 - N_{\varphi}^2 \cos^2 \varphi}} - \\ &= \frac{\sin \varphi N_{\lambda}^2}{z \cos^2 \varphi \sqrt{n^2 z^2 \cos^2 \varphi - N_{\lambda}^2 - N_{\varphi}^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (4a) \end{aligned}$$

$$\frac{dN_{\lambda}}{dz} = \frac{\partial n}{\partial \lambda} \frac{n z \cos \varphi}{\sqrt{n^2 z^2 \cos^2 \varphi - N_{\lambda}^2 - N_{\varphi}^2 \cos^2 \varphi}} \quad (5a)$$

### § 3. Определение постоянных модели рефракции атмосферы

Рассмотрим, как найти значения  $R_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . На рис. 2 схематически показаны две уровенные поверхности  $n_i, n_{i+1}$ , соответствующие двум узлам и соответствующие геоцентрические радиус-векторы на станциях  $\lambda_1, \varphi_1$ :  $r_i(\lambda_1, \varphi_1)$ ,  $r_{i+1}(\lambda, \varphi)$  и аналогичные на станциях  $\lambda_2, \varphi_2$ ;  $\lambda_3, \varphi_3$ . Показана также текущая промежуточная уровенная поверхность  $n$ . Вследствие предполагаемой линейности имеем

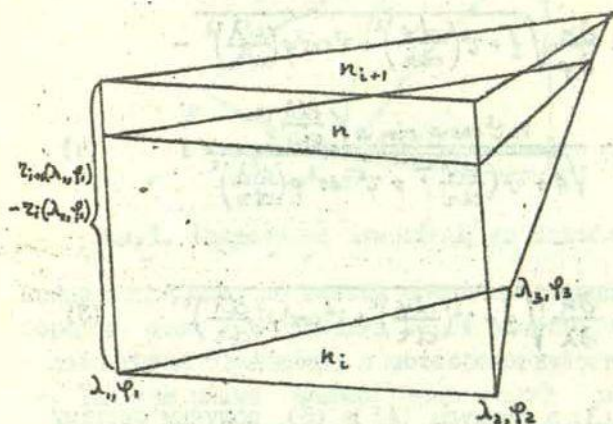


Рис. 2.

$$\frac{n - n_i}{n_{i+1} - n_i} = \frac{r(\lambda_j, \varphi_j) - r_i(\lambda_j, \varphi_j)}{r_{i+1}(\lambda_j, \varphi_j) - r_i(\lambda_j, \varphi_j)}, \quad (6)$$

$$j = 1, 2, 3.$$

Мы предполагаем, что радиус-вектор  $r$  для уровенных поверхностей ( $n$  — постоянное значение) не является постоянным, т.е. уровенные поверхности не являются сферами, а аппроксимируются линейным выражением

$$r = R_0 + \alpha\varphi + \beta\lambda \quad (7)$$

где  $R_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  для каждой поверхности уровня свои и определяются по данным 3 станций. Следовательно,

$$r_i(\lambda_j, \varphi_j) = \Delta r_i(\lambda_j, \varphi_j) \tau = R_{oi} + \alpha_i \varphi_j + b_i \lambda_j, \quad (8)$$

где

$$\tau = \frac{n - n_i}{n_{i+1} - n_i}, \quad \Delta r_i(\lambda_j, \varphi_j) = r_{i+1}(\lambda_j, \varphi_j) - r_i(\lambda_j, \varphi_j),$$

$$j = 1, 2, 3.$$

Для определения  $R_{oi}$ ,  $\alpha$  и  $b$  имеем три линейных уравнения о трех неизвестных. Обозначим алгебраические дополнения определителя системы

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} 1 & \varphi_1 & \lambda_1 \\ 1 & \varphi_2 & \lambda_2 \\ 1 & \varphi_3 & \lambda_3 \end{vmatrix} \quad (9)$$

через  $A_{ij}$ . В таком случае имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} R_{oi} &= \sum_{\ell} r_i(\lambda_{\ell}, \varphi_{\ell}) A_{i\ell} + \sum_{\ell} \Delta r_i(\lambda_{\ell}, \varphi_{\ell}) A_{i\ell} \tau, \\ \mathfrak{D} \alpha_i &= \sum_{\ell} r_i(\lambda_{\ell}, \varphi_{\ell}) A_{2\ell} + \sum_{\ell} \Delta r_i(\lambda_{\ell}, \varphi_{\ell}) A_{2\ell} \tau, \\ \mathfrak{D} b_i &= \sum_{\ell} r_i(\lambda_{\ell}, \varphi_{\ell}) A_{3\ell} + \sum_{\ell} \Delta r_i(\lambda_{\ell}, \varphi_{\ell}) A_{3\ell} \tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Уровневые поверхности будут пересекаться, если для двух значений  $n'$ ,  $n''$  будем иметь

$$r(n') = r(n''). \quad (11)$$

Следовательно,

$$R_{oi}(n') + \alpha_i(n') \varphi + b_i(n') \lambda = R_{oi}(n'') + \alpha_i(n'') \varphi + b_i(n'') \lambda. \quad (11')$$

Так как значения  $R_{oi}$ ,  $\alpha_i$ ,  $b_i$  являются линейными относительно  $\tau'$  и  $\tau''$  и  $\tau' - \tau'' \neq 0$ , то на основе (11') имеем

$$\begin{aligned} F &= \sum_{\ell} \Delta r_i(\lambda_{\ell}, \varphi_{\ell}) A_{1\ell} + \sum_{\ell} \Delta r_i(\lambda_{\ell}, \varphi_{\ell}) A_{2\ell} \varphi + \sum_{\ell} \Delta r_i(\lambda_{\ell}, \varphi_{\ell}) A_{3\ell} \lambda = \\ &= \begin{vmatrix} \Delta r_i(\lambda_1, \varphi_1) & \varphi_1 & \lambda_1 \\ \Delta r_i(\lambda_2, \varphi_2) & \varphi_2 & \lambda_2 \\ \Delta r_i(\lambda_3, \varphi_3) & \varphi_3 & \lambda_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \Delta r_i(\lambda_1, \varphi_1) & \lambda_1 \\ 1 & \Delta r_i(\lambda_2, \varphi_2) & \lambda_2 \\ 1 & \Delta r_i(\lambda_3, \varphi_3) & \lambda_3 \end{vmatrix} \varphi + \begin{vmatrix} 1 & \varphi_1 & \Delta r_i(\lambda_1, \varphi_1) \\ 1 & \varphi_2 & \Delta r_i(\lambda_2, \varphi_2) \\ 1 & \varphi_3 & \Delta r_i(\lambda_3, \varphi_3) \end{vmatrix} \lambda = \\ &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

По знаку  $F$  (12) можно установить принадлежат ли данные  $\varphi$  и  $\lambda$  к области, в которой модель корректна, или нет. Если  $F$  для данной точки  $F$  имеет тот же знак, как и во всех вершинах (равенство знака  $F$  следует из одинаковой монотонности в узловых точках), то  $\varphi, \lambda$  принадлежит к области, где модель математически корректна.

Для определения  $n$  имеем на основе (7) следующую формулу

$$\tau = \frac{\mathcal{D}n - \sum_{\epsilon} r_i(\lambda_{\epsilon}, \varphi_{\epsilon}) A_{1\epsilon} - \sum_{\epsilon} r_i(\lambda_{\epsilon}, \varphi_{\epsilon}) A_{2\epsilon} \varphi - \sum_{\epsilon} r_i(\lambda_{\epsilon}, \varphi_{\epsilon}) A_{3\epsilon} \lambda}{\sum_{\epsilon} \Delta r_i(\lambda_{\epsilon}, \varphi_{\epsilon}) A_{1\epsilon} + \sum_{\epsilon} \Delta r_i(\lambda_{\epsilon}, \varphi_{\epsilon}) A_{2\epsilon} \varphi + \sum_{\epsilon} \Delta r_i(\lambda_{\epsilon}, \varphi_{\epsilon}) A_{3\epsilon} \lambda} \quad (13)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial n}{\partial \varphi} = \Delta n_i \frac{b_i a'_i - b'_i a_i + \lambda (b_i c'_i - b'_i c_i)}{\mathcal{D}_{ii}^2}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial n}{\partial \lambda} = \Delta n_i \frac{c_i a'_i - c'_i a_i + \varphi (c_i b'_i - c'_i b_i)}{\mathcal{D}_{ii}^2},$$

где

$$a_i = \mathcal{D}r - \sum_{\epsilon} r_i(\lambda_{\epsilon}, \varphi_{\epsilon}) A_{1\epsilon}, \quad a'_i = \sum_{\epsilon} \Delta r_i(\lambda_{\epsilon}, \varphi_{\epsilon}) A_{1\epsilon},$$

$$b_i = - \sum_{\epsilon} r_i(\lambda_{\epsilon}, \varphi_{\epsilon}) A_{2\epsilon}, \quad b'_i = \sum_{\epsilon} \Delta r_i(\lambda_{\epsilon}, \varphi_{\epsilon}) A_{2\epsilon},$$

$$c_i = - \sum_{\epsilon} r_i(\lambda_{\epsilon}, \varphi_{\epsilon}) A_{3\epsilon}, \quad c'_i = \sum_{\epsilon} \Delta r_i(\lambda_{\epsilon}, \varphi_{\epsilon}) A_{3\epsilon},$$

$$\mathcal{D}_{ii} = a'_i + b'_i + c'_i.$$

#### § 4. Определение рефракции луча

Определение рефракции луча состоит из нескольких этапов.

I. Во-первых, по метеоданным следует найти коэффици-

нт рефракции. Для этого используются следующие формулы [2]

$$(n-1)_{p,f} = (n-1) \frac{p-f}{720,775} \frac{1+(p-f)(0,817-0,0133t) \cdot 10^{-5}}{1+0,003661t} + \frac{(315t+0,2963) \cdot 10^{-8} \cdot f \cdot (1+27 \cdot 10^{-6} f)}{1+0,003661t}, \quad (15)$$

где  $p$  - давление,  $f$  - давление пара,  $n_s$  - коэффициент преломления для данной длины волны стандартной атмосферы. Давление пара можно определить по таблице Landolt - Börnstein [3].

2. Для всех наблюдаемых значений коэффициентов рефракции на каждой из трех (по крайней мере) станций линейным интерполированием следует определить соответствующие значения  $n_i(\lambda_j, \varphi_j)$ . Все значения  $n_i$ , для которых  $n_i$  для соответствующих станций могут быть найдены интерполированием, а не экстраполированием, считаются основными уровнями поверхностями, т.е. они являются основами слоистой атмосферы, в отдельных слоях которой имеет место формула (7). Для первого слоя начальные условия задаются произвольно, а для второго слоя начальные условия равны данным для луча при выходе из первого слоя и т.д. Например, если при наблюдениях в меридиане для зенитного луча имеем

$$r = R_0, \quad N_r = 0, \quad N_\lambda = 0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \lambda = \lambda_0,$$

где  $\varphi_0, \lambda_0, R_0$  есть координаты места наблюдателя, то для второго слоя соответствующие данные равны значениям  $\varphi, \lambda, n, N_r, N_\lambda$  при выходе из первого слоя.

3. В принципе интегрирование системы дифференциальных уравнений следует продолжить до самых внешних слоев атмосферы, где  $n=1$ . Однако это невозможно, т.к. не имеются для данного момента метеоданные для столь высоких слоев. Остальную часть искажения хода луча можно оценить по более или менее точным теориям рефракции, в которых предполагаются та или другая модель атмосферы. Мы не бу-



дем в настоящей статье заниматься этими вопросами, а формально определим рефракцию по формулам, в которых предполагается, что луч вышел в среду, где  $n=1$ . Следовательно,

$$\vec{r} = s \vec{c}, \quad (16)$$

где  $\vec{c}$  - единичный вектор касательной в крайней точке интегрирования,  $s$  - постоянная,  $\vec{r}$  - радиус-вектор луча вне атмосферы.

Формула (16) дает [2]

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \varphi \sin \lambda - \frac{d\varphi}{dr} r \sin \varphi \sin \lambda + \frac{d\lambda}{dr} r \cos \varphi \cos \lambda}{\cos \varphi \cos \lambda - \frac{d\varphi}{dr} r \sin \varphi \cos \lambda - \frac{d\lambda}{dr} r \cos \varphi \sin \lambda}, \quad (17)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sin \varphi + \frac{d\varphi}{dr} r \cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 r^2 \sin^2 \varphi + \left(\frac{d\lambda}{dr}\right)^2 r^2 \cos^2 \varphi - 2 \frac{d\varphi}{dr} \sin \varphi \cos \varphi}} \quad (18)$$

## § 5. Влияние боковой рефракции при наблюдениях точного времени в Риге в 1972 году

При применении вышеизложенной теории, основные трудности представляет недостаток подходящих метеоданных. Метеостанции размещены сравнительно далеко друг от друга и вполне возможно, что значения градиентов метеоданных не являются постоянными на всем расстоянии между станциями, чего требует теория. Например, анализ метеоданных станций Риги и Лиепая показывает, что изменения давлений и изменения температуры во всех слоях плавные и небольшие, а изменения влаги весьма хаотичны, что и следовало ожидать, учи-

тывая климатические условия упомянутых станций. Мы считаем, что невозможно предполагать, что в упомянутом случае имеется возможность значения градиента влаги в Риге или Лиенае определять только по данным о влажности Риги и Лиенаи. Мы считаем целесообразным предполагать, что уровенные поверхности влажности суть геоцентрические сферы. Возможно более простое предположение, а именно, что водяной пар в атмосфере отсутствует. В таблице I помещены поправки в тысячных долях секунды на боковую рефракцию к точному времени, определенные в предположении сухого воздуха по нами предложенной теории.

Таблица I

Дата	рефр. 0 <sup>5</sup> ,000	Дата	рефр. 0 <sup>5</sup> ,000	Дата	рефр. 0 <sup>5</sup> ,000	Дата	рефр. 0 <sup>5</sup> ,000
1972г.		1972г.		1972г.		1972г.	
6 I	-2	5 III	-2	26 III	I	23 V	-I
8 I	0	19 II	-3	11 IV	-3	3 VI	0
13 I	-I	4 III	-2	16 IV	-I	4 VI	0
14 I	-I	5 III	-2	22 IV	-I	5 VI	-I
15 I	-I	6 III	-2	23 IV	-I	6 VI	0
17 I	-I	10 III	-2	4 V	-I	7 VI	-I
18 I	-I	13 III	I	5 V	0	8 VI	6
19 I	-2	14 III	I	12 V	-I	10 VI	I
21 I	-I	15 III	0	13 V	-I	11 VI	-I
2 II	-II	20 III	0	15 V	0	20 VI	0
3 II	-I	24 III	I	17 V	-I	21 VI	0
4 II	-I	25 III	3	22 V	0	28 VI	-I

Поправки не превышают одну сотую долю секунды. Реальность этих поправок, по нашему мнению, следует выяснять, сравнивая соответствующие поправки, полученные по данным различных метеостанций.

1. Нефелдьева А.И. Астрономическая рефракция, ч. II. — "Известия Астр. Энгельгардт. обсерв." 1973, № 40, с. 3.
2. Takagi S. astronomical Refraction of the atmosphere. — "Publ. Int. Latit. Observ. Mizusawa", 1974, № 2, p. 241.
3. Landolt-Börnstein. Physikalisch-Chemische Tabellen. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1923.

## Р е з ю м е

К. А. Ш т е й н с ,  
 Э. Я. Кау п у ш ,  
 П. П. Р о з е н б е р г

СФЕРИЧЕСКИ СЛОИСТАЯ МОДЕЛЬ РЕФРАКЦИИ АТМОСФЕРЫ  
 С ЛИНЕЙНЫМИ ПОПРАВКАМИ

Построена сферически слоистая модель рефракции атмосферы с линейными поправками по угловым сферическим координатам. Градиент коэффициента рефракции считается постоянным в каждом слое. Дифференциальные уравнения Эйлера приведены к виду, удобному для вычислений на ЭВМ. Теория применена к наблюдениям точного времени АО Латв. гос. университета и показано, что поправки не превышают одну сотую долю секунды. Табл. — 1, иллюстр. — 2, библиогр. — 3 назв.

## K o r s a v i l k u m s

K. Š t e i n s ,  
 E. Kaupusa,  
 P. Rozenbergs

SFĒRISKI SLĀŅAINIS ATMOSPĒRAS REFRAKCIJAS MODELIS  
 AR LINEĀRAM KOREKCIJĀM

Izveidots sfēriski slāņains atmosfēras refrakcijas mo-

delis ar lineārām korekcijām pēc leņķiskām sfēriskām koordinātēm, refrakcijas koeficienta gradientu vertikālā virsieni skaita konstantu katrē slānī. Eilera diferenciālvienādojumi pārveidoti ērtā veidā rēķināšanai ar ESM. Teorijā pielietota Latvijas valsts universitātes Astronomiskās observatorijas precizā laika novērojumiem un parādīts, ka korekcija par sānu refrakciju nepārsniedz sekundes simtdaļu.

### Summary

K. S t e i n s ,  
E. K a u p u š a ,  
P. R o z e n b e r g s

#### A SPHERICAL LAMELLAR ATMOSPHERIC REFRACTION MODEL WITH LINEAR CORRECTIONS

A spherical atmosphere model for refraction with linear corrections for both angles is developed. The gradient of refraction is assumed to be constant in vertical direction in each layer. The differential equations of Euler are reduced in a form convenient for numerical integration on the computer. The theory derived has been used for time determination in the AO of the Latvian State University. It is shown that corrections for lateral refraction are smaller than 0,01 sec.

Латвийский ордена Трудового Красного Знамени  
государственный университет им. П. Стучки

Точность астрометрических наблюдений малых тел и времени  
Астрономия, выпуск 12, 1977

УДК 522.4.44

М. К. А б е л е,  
Я. В. В я т е р  
ЛГУ им. П. Стучки

### ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОРИЕНТАЦИИ ОРБИТАЛЬНОЙ ОСИ МОНТИРОВКИ ТЕЛЕСКОПА

В настоящее время для наблюдений ИСЗ часто используют трехосные или четырехосные монтировки телескопов. В эксплуатации имеется много фотоустановок на таких монтировках [1]. Во время фотографирования или в промежутках между экспозициями фотокамера поворачивается вокруг орбитальной оси. Эта ось ориентирована таким образом, чтобы при перемещении ИСЗ по небесной сфере при повороте камеры вокруг оси объект находился в поле зрения [2]. Имеются также и телескопы для визуальных наблюдений ИСЗ на трехосной монтировке [3]. При отслеживании ИСЗ таким телескопом поворот орбитальной оси регистрируют угломерным устройством, а окулярным микрометром измеряют положение изображения ИСЗ в поле зрения телескопа [4].

Орбитальная ось выставляется по эфемеридным данным — азимуту и высоте точки кульминации ИСЗ. Эти данные известны с точностью до  $\pm 0,1$ . Если фиксировано положение ИСЗ в поле зрения телескопа, то, зная ориентацию орбитальной оси, можно определить координаты ИСЗ на небесной сфере. Более точную ориентацию орбитальной оси можно определить по наблюдениям звезд. Предлагаем методику для вычисления направления орбитальной оси.

Пусть на рис. 1  $AA'$  — фокальная плоскость телескопа,  $B$  — вторая главная точка объектива,  $B'$  — оптический центр фокальной плоскости,  $\vec{S}_1$  — направление на наблюдаемую звезду,  $\vec{S}'$  — направление оптической оси телескопа,  $\vec{N}$  — направление орбитальной оси.

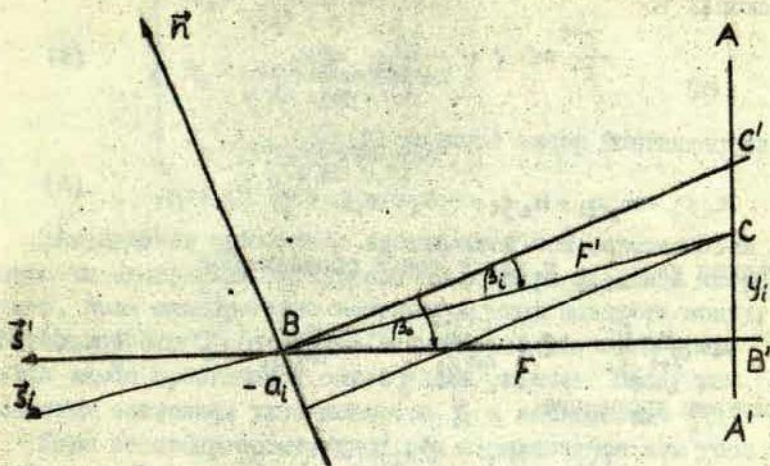


Рис. I. Телескопическая система

Предполагается, что наблюдения звезд происходят на нити телескопа, продолжение которой пересекает орбитальную ось телескопа. В таком случае можно считать, что единичные векторы находятся в плоскости рисунка. Оптическая ось телескопа наклонена под углом  $90^\circ + \beta_0$  к орбитальной оси. Фокусное расстояние телескопа равно  $F$ . Измеряется величина  $y_i$  в фокальной плоскости телескопа. Направление на звезду образует угол  $90^\circ + \beta_i$  с орбитальной осью. Координаты вектора  $\vec{n} \{n_x, n_y, n_z\}$ . Координаты вектора  $\vec{s}_i \{\xi_i, \eta_i, \zeta_i\}$  вычисляются по видимым координатам звезды  $A_i, h_i$  в горизонтальной системе координат

$$\begin{aligned} \xi_i &= \cos A_i \cos h_i, \\ \eta_i &= \sin A_i \cos h_i, \\ \zeta_i &= \sin h_i. \end{aligned} \quad (1)$$

Из треугольников  $BB'C$  и  $BB'C'$  (рис. I) имеем

$$\vec{n} \vec{s}_i = -\frac{F}{F'} \sin \beta_0 + \frac{y_i}{F'} \cos \beta_0, \quad (2)$$

где  $F' = \sqrt{F^2 + y_i^2}$ .

Если  $y_i \ll F$ , что имеет место при длиннофокусных телескопах, то

$$\frac{F'}{F} \approx 1 + \frac{y_i^2}{2F^2} = \kappa_i \quad (3)$$

В координатной форме формула (2)

$$n_x \xi_i + n_y \eta_i + n_z \zeta_i = -\kappa_i \sin \beta_0 + \frac{y_i}{F} \kappa_i \cos \beta_0. \quad (4)$$

Умножая на  $\frac{F}{\cos \beta_0}$  и вводя новые обозначения

$$A = \frac{n_x F}{\cos \beta_0}, \quad B = \frac{n_y F}{\cos \beta_0}, \quad C = \frac{n_z F}{\cos \beta_0}, \quad D = -F \operatorname{tg} \beta_0, \quad (5)$$

получаем уравнение

$$A \xi_i + B \eta_i + C \zeta_i + D \kappa_i = y_i \kappa_i. \quad (6)$$

$\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  вычисляются по координатам звезд,  $y_i$  — измеряются,  $\kappa_i$  вычисляются по известному  $y_i$  и  $F$ . Неизвестными являются коэффициенты. Для их определения необходимо иметь четыре уравнения типа (6). Если наблюдаются  $n$  звезд, составляется система условных уравнений (7).

$$\begin{cases} A \xi_1 + B \eta_1 + C \zeta_1 + D \kappa_1 = y_1 \kappa_1, \\ A \xi_2 + B \eta_2 + C \zeta_2 + D \kappa_2 = y_2 \kappa_2, \\ \text{-----} \\ A \xi_i + B \eta_i + C \zeta_i + D \kappa_i = y_i \kappa_i, \\ \text{-----} \\ A \xi_n + B \eta_n + C \zeta_n + D \kappa_n = y_n \kappa_n \end{cases} \quad (7)$$

При измерениях положений звезд следует наложить следующее ограничение: измеряемые звезды не должны находиться на одном большом круге, что имеет место при неподвижном телескопе (камере). В таком случае нельзя найти  $A, B, C, D$ , так как определитель системы равен нулю. Система уравнений решается методом наименьших квадратов.

По найденным коэффициентам  $A, B, C$  вычисляются координаты вектора  $\vec{n}$ , то есть направление орбитальной оси.

$$\begin{cases} n_x = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ n_y = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ n_z = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{cases} \quad (8)$$

Направление ориентации орбитальной оси определяется только по измерениям окулярного микрометра по одной координате. Если одновременно измеряется угол поворота вокруг орбитальной оси  $\gamma_i$ , то может вычисляться поправка нуля-пункта лимба орбитальной оси  $\Delta\gamma$  как разность между вычисленным значением угла поворота  $\gamma_i$  и наблюдаемым  $\gamma_{i0}$ .

Угол поворота орбитальной оси определяется как угол между плоскостью  $\rho_i$ , определяемой векторами  $\vec{n}$  и  $\vec{s}_i$  и плоскостью  $\rho_0$ , в которой лежит вектор  $\vec{n}$  и  $\vec{k}$ , направленный на зенит.

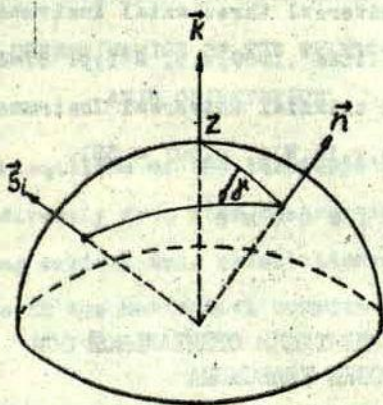


Рис. 2. Угол поворота орбитальной оси.

В векторной форме угол поворота

$$\sin \gamma_i = - \frac{\vec{k} \cdot \vec{n} \cdot \vec{s}_i}{|\vec{k} \times \vec{n}| \cdot |\vec{s}_i \times \vec{n}|} \quad (9)$$

Подставляя координаты векторов, угол поворота орбитальной оси

$$\sin \gamma_i = \frac{-\xi_i n_y + \eta_i n_x}{\cos \beta_i \sqrt{n_x^2 + n_y^2}}. \quad (10)$$

По приведенным формулам можно вычислить ориентацию орбитальной оси и вычислить поправку нуля лимба орбитальной оси. Зная эти величины, можно определить сферические координаты ИСЗ по отсчетам окулярного микрометра и отсчетам лимба орбитальной оси.

### Л и т е р а т у р а

1. Основы спутниковой геодезии. М., "Недра", 1974, с. 114-134.
2. Архангельский Ю.Б., Коротков С.В., Лийгант М.К., Чучуев Г.П. Методы использования трехосных астрономических монтировок. - Сб. "Теория и проектир. высокоточн. систем упр.", Л. "Наука", 1973, с. 122-127.
3. Kordylewski Z. Universal three axial instrument. - "Artificial Satellites", 1969, v.5, N 1, p. 27-31.
4. Kordylewski Z. "A triaxial universal instrument" Acta astronomica", 1969, v.19, N 4, p.307 - 321.

### Р е з ю м е

М. К. А б е л е ,

Я. В. В я т е р .

#### ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОРИЕНТАЦИИ ОРБИТАЛЬНОЙ ОСИ МОНТИРОВКИ ТЕЛЕСКОПА

Определяется ориентация орбитальной оси по непосредственным наблюдениям звезд. Получены формулы расчета ориентации и угла поворота орбитальной оси монтировки телескопа в горизонтальной системе координат.

Иллюстр. - 2, библиогр. - 4 назв.

M. Ābele,

J. Vjaters

PAR TELESKOPA MONTĀŽAS ORBITĀLĀS ASS ORIENTĀCIJAS  
NOTEIKŠANU

Tiek noteikta orbitālās ass orientācija pēc tiešiem zvaigžņu novērojumiem. Iegūtas aprēķinu formulas orbitālās ass orientācijas un pagrieziens leņķa noteikšanai horizontālās koordinātu sistēmā.

## Summary

M. Ābele,

J. Vjaters

ON THE DETERMINATION OF THE TELESCOPE ORBITAL  
AXIS ORIENTATION

The orientation of the telescope orbital axis can be determined directly from star observations. The formulae for computing orbital axis orientation and the axis rotation angle in the horizontal coordinate system is given.

УДК 521.2.29

Я. В. В я т е р

ЛГУ им. П. Стучки

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЗВЕЗД, ПЕРЕСЕКАЮЩИХ  
ЗОНУ НАБЛЮДЕНИЯ ИСЗ

Автоматизация процесса определения координат ИСЗ с применением ЦВМ требует осуществить также автоматическую идентификацию опорных звезд. Имеется ряд работ [1], [2], [3], в которых рассмотрены вопросы идентификации звезд в случаях, когда координаты области неба заданы с низкой точностью или не заданы совсем и, где известны дополнительные сведения, ограничивающие или определяющие наиболее вероятную область неба. При этом для отождествления опорных звезд в ЭВМ имеются специальные большие каталоги звезд [4].

Ниже рассматривается метод определения прохождения звезд через зону наблюдения ИСЗ, применимый при идентификации звезд, при условии, что параметры зоны на небе заданы с высокой точностью. Это обеспечивается в поле зрения телескопа при использовании устройств отслеживания на четырехосных монтировках при точно известных эфемеридах ИСЗ. Телескоп соответственно ориентируют для наблюдения рассчитанного ИСЗ, а наблюдения звезд производят на тех участках неба, где они проходят по полю зрения инструмента, что позволяет использовать каталоги с малым числом звезд, например, FK - 4 [5].

§ I. У с т а н о в о ч н ы е п а р а м е т р ы  
ч е т ы р е х о с н ы х м о н т и р о в о к  
т е л е с к о п о в

При отслеживании ИСЗ телескопами (фотокамерами, фотометрами и т.п.) с четырехосной монтировкой необходимо

знать эфемериды ИСЗ с большой точностью, т.е. установочные параметры четырехосной монтировки телескопа. Установочными параметрами является азимут  $A_k$  и высота  $h_k$  точки кульминации ИСЗ, угол наклона  $\beta_0$  четвертой оси монтировки (параметр малого круга), закон изменения угла отслеживания  $\gamma$  (угловой скорости) орбитальной оси для отслеживаемого ИСЗ, начальное  $M_{нач.}$  и конечное  $M_{кон.}$  время наблюдения (отслеживания) ИСЗ с соответствующими  $\gamma_{нач.}$  и  $\gamma_{кон.}$  углами поворота орбитальной оси четырехосной монтировки [6].

Рассмотрим порядок определения звезд, попадающих в поле зрения телескопа (поле фотоснимка) при отслеживании ИСЗ, при известных выше названных установочных параметрах четырехосной монтировки.

## § 2. Условия пересечения звездами зоны наблюдения

Рассмотрим небесную сферу рис. I.  $P_N$ ,  $P_S$ , соответственно северный и южный полюсы,  $P_0$  - полюс видимой орбиты ИСЗ. Дуга  $NS$  - горизонт,  $Z$  - зенит.

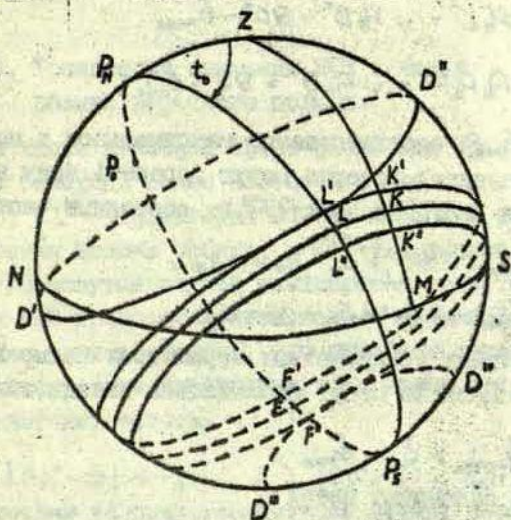


Рис. I. Небесная сфера с траекториями ИСЗ и звезд

Траектория ИСЗ аппроксимирована малым кругом  $KF$ , где  $K$  - точка кульминации наблюдаемого ИСЗ,  $\angle SM = A_k$  ази-

30  
 мут точки кульминации,  $\sphericalangle MK = h_K$  - высота точки кульминации. Предполагаем, что изображение ИСЗ при отслеживании проходит по середине поля зрения телескопа, которое охватывает середину зоны наблюдения ИСЗ. Зона наблюдения (поле фотоснимка) перпендикулярна движению ИСЗ -  $\sphericalangle L'L'' = \sphericalangle K'K'' = 2\Delta\beta_m$  (рис. I).

Предполагаем, что ИСЗ проходит южнее зенита места наблюдения, которое расположено в северном полушарии, так что полюс видимой орбиты  $P_0$  также в северном полушарии (рис. I). Вводим  $t_0$ -часовой угол круга склонений полюса орбиты. Учитывая видимую орбиту ИСЗ относительно места наблюдения,  $\sphericalangle P_0 P_K L = 90^\circ + \beta_0$ , где  $\beta_0$  - угол наклона четвертой оси монтировки (параметр малого круга).  $\beta_0$  известная величина и  $\sphericalangle P_K P_0 = 90^\circ - \delta_p$ , где  $\delta_p$  - склонение полюса орбиты ИСЗ (рис. I).

При суточном движении зону наблюдения пересекают звезды, заключенные между параллелями  $D'L'D''$  и  $D''F''D''$ . Вводим склонения звезд, которые могут еще пересечь зону наблюдения

$$\sphericalangle P_K L' = \sphericalangle P_K D' = 90^\circ - \delta_{max}$$

и

$$\sphericalangle P_K P_0 F'' = \sphericalangle P_K D'' = 90^\circ - \delta_{min},$$

где  $\delta_{max}$ ,  $\delta_{min}$  соответственно максимальное и минимальное склонение звезд, которые могут пересечь зону наблюдения. Разлагая  $\sphericalangle P_K L'$  и  $\sphericalangle P_K P_0 F''$  на составные части имеем

$$\delta_{max} = 90^\circ - \delta_p - \beta_0 + \Delta\beta_m, \quad (1)$$

$$\delta_{min} = -90^\circ + \delta_p - \beta_0 - \Delta\beta_m. \quad (2)$$

При заданных установочных параметрах четырехосной монтировки телескопа могут наблюдаться звезды, склонения которых

$$\delta_{max} > \delta > \delta_{min}, \quad (3)$$

причем, если склонение звезд

$$\delta_{min} + 2\Delta\beta_m > \delta > \delta_{max} - 2\Delta\beta_m, \quad (4)$$

то они могут пересечь зону наблюдения один раз (войти в зону наблюдения и выйти), а звезды, склонения которых

$$\delta_{max} - 2\Delta\beta_m \geq \delta \geq \delta_{min} + 2\Delta\beta_m, \quad (5)$$

могут дважды пересечь зону наблюдения.

31

### § 3. У с л о в и я   н е п о к и д а н и я з в е з д о й   з о н ы   н а б л ю д е н и я

Рассмотрим случай, когда звезда находится в зоне наблюдения и при суточном движении не покидает ее.

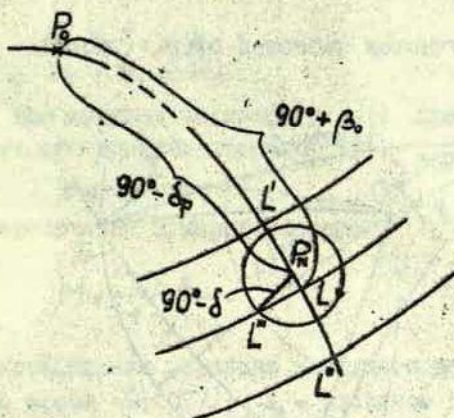


Рис. 2. Траектории движения ИСЗ и звезд  
вблизи небесного полюса

Рассмотрим часть небесной сферы рис. 2, где  $P_N$ ,  $P_0$  соответственно северный полюс небесной сферы и полюс видимой орбиты ИСЗ,  $L, L''$  — траектория ИСЗ на небесной сфере.  $P_0 P_N$  — круг склонения полюса орбиты,  $\cup L' L'' = 2\Delta\beta_m$  — ширина зоны наблюдения. Упомянутый случай реализуется, если, во-первых, траектория ИСЗ проходит вблизи полюса небесной сферы, т.е.  $\cup P_N L < \Delta\beta_m$ , и, во-вторых, при суточном движении звезды не покидают зоны наблюдения, т.е. склонения звезд удовлетворяют неравенства

$$|90^\circ - \delta| < P_N L' \quad \text{и} \quad |90^\circ - \delta| < P_N L''.$$

Рассмотрим условия, реализующие данный случай. Можно оценить расстояние траектории ИСЗ от полюса небесной сферы

$$P_N L = \beta_0 + \delta_p < \Delta\beta_m \quad (6)$$

и склонения звезд, удовлетворяющих определенным выше ус-



$$\cos \alpha = \frac{\sin \delta_p \sin \delta + \sin \beta}{\cos \delta_p \cos \delta} \quad (8)$$

2. Параметрами пересечения зоны наблюдения является также моменты времени пересечения звездой границы зоны наблюдения. Часовые углы звезды при пересечении зоны наблюдения

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 - \alpha, \\ t_2 &= t_0 + \alpha. \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая взаимосвязь часового угла  $t$ , прямого восхождения  $\alpha$  и звездного времени светил  $s$  [7]

$$s = \alpha + t,$$

момент пересечения в мировом времени

$$M = \frac{s - s_0}{1 + \mu},$$

где  $\mu$  — коэффициент перевода звездного времени в среднее солнечное время (0,0027);  $s_0$  — звездное время в точке наблюдения, причем  $s_0 = S_0 + \lambda$ , где  $S_0$  — звездное время в среднюю гринвичскую полночь,  $\lambda$  — восточная долгота меридиана места наблюдения.

Следовательно, моменты пересечения в мировом времени звездами зоны наблюдения

$$M_1 = \frac{t}{1 + \mu} (t_0 - S_0 - \lambda - \alpha + \alpha), \quad (10)$$

$$M_2 = \frac{t}{1 + \mu} (t_0 - S_0 - \lambda + \alpha + \alpha). \quad (11)$$

Аналогично можно определить часовой угол для момента наблюдения

$$t = M(1 + \mu) + S_0 + \lambda - \alpha. \quad (12)$$

3. Высота точки пересечения. Определяем параллактический треугольник  $P_N Z G_1$  (рис. 3). По теореме синусов имеем

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \quad (13)$$

4. Угол отслеживания  $\gamma$  орбитальной оси четырехосной монтировки и угол наклона  $\beta$  четвертой оси. Рассмотр-

рим сферический треугольник  $P_0 P_N G$  (рис.3). Предполагаем, что звезда находится в зоне наблюдения в точке  $G$ . Угол  $\gamma$  есть угол при полюсе орбиты отсчитываемый от северного полюса. Часовой угол звезды для момента наблюдения -  $t$ . Из сферического треугольника по теореме синусов имеем

$$\sin \gamma = \frac{\cos \delta \sin(t - t_0)}{\cos \beta} \quad (14)$$

и по теореме косинусов наклон четвертой оси монтировки телескопа для границы зоны наблюдения

$$\sin \beta = -\sin \delta_p \sin \delta + \cos \delta_p \cos \delta \cos(t - t_0). \quad (15)$$

При известном установочном параметре  $\beta_0$  разница углов наклона определяет полуширину зоны наблюдения

$$\Delta \beta_m = \beta - \beta_0, \quad (16)$$

Причем выбор ширины зоны  $2\Delta \beta_m$  определяет экстремальные величины наклона  $\beta$ .

## § 5. У с л о в и я п р о х о ж д е н и я звезд по зоне наблюдения

Рассмотрим процедуру определения прохождения звезд по зоне наблюдения.

1. Определим критерии возможности наблюдения звезд. Во-первых, предполагаем, что звезды наблюдаются во временном интервале от  $M_{\min}$  до  $M_{\max}$ . Во-вторых, высоты звезд над горизонтом  $h > h_{\min}$ .

Определим момент времени, когда звезда находится на высоте  $h = h_{\min}$ . Находим часовой угол при  $h_{\min}$

$$\cos t_{\min} = \frac{\sin h_{\min} - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}, \quad (17)$$

и откуда

$$M_{\min} = \frac{1}{1 + \mu} (t_{\min} - S_0 - \lambda + \alpha). \quad (18)$$

Рассмотрим отдельно возможные случаи пересечения звездами зоны наблюдения.

2. Случай, когда опорные звезды пересекают зону на-

блюдения один раз, который реализуется при условии выполнения формулы (4). Расчет условий прохождения звезд производится в следующем порядке. По формуле (8) рассчитываем расстояние  $s$  от точки пересечения параллели звезды с границей зоны наблюдений до круга склонений полюса орбиты, предполагая, что  $\beta = \beta_0 + \Delta\beta_m$  или  $\beta = \beta_0 - \Delta\beta_m$  при соответствующем направлении полюса траектории отслеживаемого ИСЗ. По формулам (10) и (11) рассчитывают  $M_1$  и  $M_2$ .

Возможны несколько случаев при определении прохождения наблюдаемых звезд. Рассмотрим временную ось, где интервал наблюдения звезд (или ИСЗ) от  $M_{нач.}$  до  $M_{кон.}$ , а положение рассчитанного по формулам (10) и (11) интервала времени соответственно  $M_1$  и  $M_2$ . При случае а)  $M_1 < M_{нач.}$ ,  $M_2 < M_{нач.}$  звезда не наблюдается. Рассмотрим далее подробнее возможные случаи распределения временных интервалов; б)  $M_1 < M_{нач.}$ ,  $M_2 > M_{нач.}$ ,  $M_2 < M_{кон.}$  — звезду можно наблюдать во временном интервале от  $M'_{нач.} = M_{нач.}$  до  $M'_{кон.} = M_2$ ; в)  $M_1 < M_{нач.}$ ,  $M_2 > M_{кон.}$  — звезду можно наблюдать в интервале от  $M'_{нач.} = M_{нач.}$  до  $M'_{кон.} = M_{кон.}$ ; г)  $M_1 > M_{нач.}$ ,  $M_2 < M_{кон.}$  — звезду можно наблюдать в интервале от  $M'_{нач.} = M_1$  до  $M'_{кон.} = M_2$ ; д)  $M_1 > M_{нач.}$ ,  $M_2 > M_{кон.}$ ,  $M_1 < M_{кон.}$  — звезду можно наблюдать в интервале от  $M'_{нач.} = M_1$  до  $M'_{кон.} = M_{кон.}$ ; е)  $M_1 > M_{кон.}$ ,  $M_2 > M_{кон.}$  : звезда не наблюдается.

При выполнении условия наблюдаемости во временном интервале определяем высоту звезды над горизонтом по формуле (10) в моменты времени  $M'_{нач.}$  и  $M'_{кон.}$ . Далее, аналогично рассматриваем возможные случаи наблюдаемости звезд по критерию высоты. Предполагаем, что при  $M'_{нач.}$  высота звезды  $h_{нач.}$ , а при  $M'_{кон.}$  высота —  $h_{кон.}$ .

а) при  $h_{нач.} < h_{min}$ ,  $h_{кон.} < h_{min}$  звезда ненаблюдаема.  
 б) при  $h_{нач.} < h_{min}$ ,  $h_{кон.} > h_{min}$  по формулам (17) и (18) определяем  $M'_{min}$  и  $M'_{нач.} = M_{min}$ ,  $M'_{кон.}$  — без изменений;  
 в)  $h_{нач.} > h_{min}$ ,  $h_{кон.} < h_{min}$  по формулам (17) и (18) определяем  $M'_{кон.} = M_{min}$ ,  $M'_{нач.}$  — без изменений;  
 г)  $h_{нач.} > h_{min}$ ,  $h_{кон.} > h_{min}$ ,  $M'_{нач.}$ ,  $M'_{кон.}$  остаются прежними.

При условиях наблюдаемости по формулам (12), (14), (15), (16), определяем  $\delta$  и  $\Delta\beta_m$  для моментов  $M'_{нач.}$  и  $M'_{кон.}$ . Идентификация звезд производится, определяя их положения

$\gamma_{\text{нал.}}$ ,  $\gamma_{\text{кон.}}$ ,  $\Delta\beta_{\text{нал.}}$ ,  $\Delta\beta_{\text{кон.}}$ . В моменты времени  $M'_{\text{нал.}}$ ,  $M'_{\text{кон.}}$ .

3. Рассмотрим случай, когда звезды пересекают зону наблюдения дважды, т.е. склонения звезд удовлетворяют формулу (5). По формуле (8) вычисляем расстояние  $a$  от точки пересечения параллели звезды с границей зоны наблюдения до круга склонений полюса орбиты при  $\beta = \beta_0 + \Delta\beta_m$  и  $\beta = \beta_0 - \Delta\beta_m$  (предполагаем, что звезда в северном полушарии пересекает зону наблюдения с севера на юг). Используя вычисленные  $a'$  и  $a''$ , по формуле (10) вычисляем  $M'_1$  и  $M'_2$ . Оцениваем временную видимость звезды по процедуре п.2 этого параграфа, предполагая  $M_1 = M'_1$  и  $M_2 = M'_2$ . Находим далее  $M'_{\text{нал.}}$ ,  $M'_{\text{кон.}}$  и по вышеизложенной процедуре оцениваем видимость звезды по минимальной высоте. При выполнении условий видимости аналогично определим  $\gamma_{\text{нал.}}$ ,  $\gamma_{\text{кон.}}$ ,  $\Delta\beta_{\text{нал.}}$ ,  $\Delta\beta_{\text{кон.}}$ .

По формуле (11) рассчитываем  $M_2$  при условиях  $a = a''$  и  $a = a'$  (предполагаем, что звезда в северном полушарии и уже раз пересекла зону видимости и пересекает зону второй раз с юга на север), вычисляем  $M''_2$  и  $M'_2$ . Аналогично вышеизложенному, оцениваем видимость звезды, предполагая  $M_1 = M''_2$  и  $M_2 = M'_2$ . Определяем  $M'_{\text{нал.}}$  и  $M'_{\text{кон.}}$  и также оцениваем видимость звезды по минимальной высоте и при выполнении условий видимости определяем  $\gamma_{\text{нал.}}$ ,  $\gamma_{\text{кон.}}$ ,  $\Delta\beta_{\text{нал.}}$ ,  $\Delta\beta_{\text{кон.}}$ .

4. Рассмотрим случай, когда звезда вблизи полюса, а траектория ИСЗ проходит вблизи полюса небесной сферы. В этом случае временно - высотное оценивание опускается, а расчет  $\gamma_{\text{нал.}}$ ,  $\gamma_{\text{кон.}}$ ,  $\Delta\beta_{\text{нал.}}$ ,  $\Delta\beta_{\text{кон.}}$  производится по тем же формулам (12), (14), (15), (16).

По изложенной процедуре составлена программа для ЦМ с выбором звезд каталога ГК-4. Результаты печатаются совместно с эфемеридами отслеживаемых ИСЗ в форме  $M_{\text{нал.}}$ ,  $\gamma_{\text{нал.}}$ ,  $\Delta\beta_{\text{нал.}}$ ,  $M_{\text{кон.}}$ ,  $\gamma_{\text{кон.}}$ ,  $\Delta\beta_{\text{кон.}}$ .

1. Балодис Я.К. Об автоматическом отождествлении звезд. - "Уч. записки Латв.ГУ", 1972, т.169, с 63 - 75.
2. Балодис Я.К. Комплексная программа автоматической редукиции фотографических наблюдений ИСЗ. - "Уч. записки Латв.ГУ", 1974, т. 202, с. 52-67.
3. Балодис Я.К., Лапушка К.К. Комплексная программа автоматической обработки снимков АшУ-75 на ЦВМ. - "Наблюдения ИСЗ", 1974, № 14, с. 623-632.
4. Каталог "Smithsonian Astrophysical observatory star catalog, positions and proper motions of 258,997 stars for the epoch and equinox of 1950,0 in four Parts". Washington, D.C. 1966.
5. Каталог "Fourth Fundamental Catalogue", Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1963.
6. Абеле М.К., Вятер Я.В. Вычисление эфемерид искусственных спутников Земли для установок с четырехосной монтировкой. - "Наблюдения ИСЗ", 1974, № 14, с. 585-598.
7. Куликов А.А. Курс сферической астрономии. М. Физматгиз, 1961.

## Р е з ю м е

Я. В. В я т е р

**К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЗВЕЗД, ПЕРЕСЕКАЮЩИХ  
ЗОНУ НАБЛЮДЕНИЯ ИСЗ**

Рассмотрена процедура определения звезд, проходящих, по зоне наблюдения ИСЗ для устройств на четырехосных монтировках, для идентификации звезд при точно известных эфемерид ИСЗ. Даны формулы для определения времени, угла поворота орбитальной оси и угла относительно наклона четвертой оси четырехосной монтировки для звезд пересекающих зону наблюдения ИСЗ.

Иллюстр. - 3, библиогр. - 7 назв.

## K o p s a v i l k u m s

J. V j a t e r s

PAR ZMP NOVĒROŠANAS ZONAS ŠĶĒRŠOJĒŠU ZVAIGŽŅU

## NOTEIKŠANU

Apakšlīta zvaigžņu noteikšanas procedūra zvaigžņu identifikācijai, ja precīzi zināma ZMP efemerīda, tām šķērsojot ZMP novērošanas zonu, ja novērojumi tiek veikti ar ierīcēm, kas satur četrasu montāžu. Dots formulas laika, orbitālās ass pagriešanas leņķa un ceturtās ass slīpuma aprēķināšanai ar četrasu montāžām, zvaigznēm, kas šķērso ZMP novērošanas zonu.

## S u m m a r y

J. V j a t e r s

ON THE DETERMINATION OF THE STARS CROSSING THE  
AES OBSERVATION ZONE

The procedure of determination the stars crossing the AES observation zone of devices with four axes mountings for identification in the precise ephemeris of AES is known, is discussed. The formulae for computing UT, orbital axis position angles and angles to the fourth axis obliquity for the stars crossing the observation zone of AES is given.

УДК 522.617 и  
529.78

А. В. Иванов,  
П. П. Розенберг  
ЛГУ им.П.Стучки

АВТОМАТИЧЕСКАЯ НАСТРОЙКА ГЕНЕРАТОРА МЕТОК  
В УСТРОЙСТВЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДНИХ МОМЕНТОВ  
ПРОХОЖДЕНИЙ ЗВЕЗД

Отличительная особенность применяемого в Службе времени АО ЛГУ устройства регистрации средних моментов прохождения звезд с учетом случайных выбросов, это формирование вспомогательных меток времени с периодом, соответствующим склонению звезды [1], [2]. Метки формируются с помощью делителя с переменным коэффициентом деления. Опорным сигналом служит сигнал частотой в 1 кГц от кварцевых часов. Коэффициент деления задается в двоичной системе замыканием ключей. До сих пор это являлось главным неудобством при эксплуатации устройства. Наблюдатель устанавливал до 8 ключей в определенное положение, отличное для каждой звезды. Автоматическая подача меток устраняет этот недостаток. Кроме того, для автоматизации запуска регистрирующего устройства желательно иметь информацию о яркости звезды. На этапе полуавтоматических наблюдений этой информации вполне достаточно.

Изготовлено и введено в работу службы времени устройство, которое автоматизирует процесс установки коэффициента деления генератора меток. Носителем информации в устройстве является перфолента. В качестве таковой использовался светозащитный ракорд аэрофотопленки, позволяющий оптически считывать информацию. Схематически устройство представлено на рис.1. Перфолента в виде бесконечной петли натянута на компактно размещенные ролики. Для протяжки ленты используется перфорация. Ведущий ролик (4) приво-

дится в движение при помощи червячного привода от электродвигателя (5). Параллельные лучи света падают на фотоэлектрические датчики в случае совпадения отверстий в перфоленте и маске, расположенной непосредственно перед датчиками. Перфорация отверстий производилась следующим образом. Вместо блока датчиков ставился кондуктор с отверстиями,

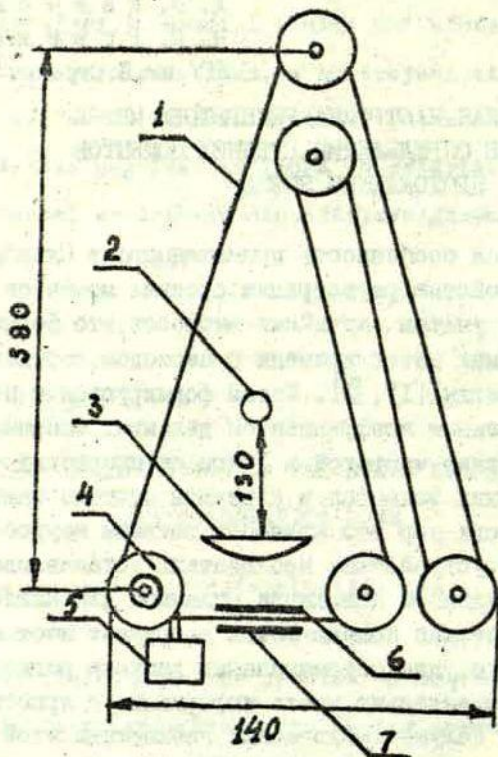


Рис. I. Схема устройства считывания перфорации.

1. Перфолента.
2. Источник света.
3. Конденсорная линза.
4. Ведущий ролик.
5. Двигатель.
6. Маска с отверстиями.
7. Блок датчиков.

точно совпадающими с отверстиями маски. Протяжка ленты производилась между кондуктором и маской с калиброванным шагом. Маска использовалась в качестве матрицы, а пуансоном

дружило древко сверла, которым сверлились отверстия в матрице и кондукторе. В одном ряду на маске размещается 24 информационных и одно маркерное отверстие. 12 отверстий

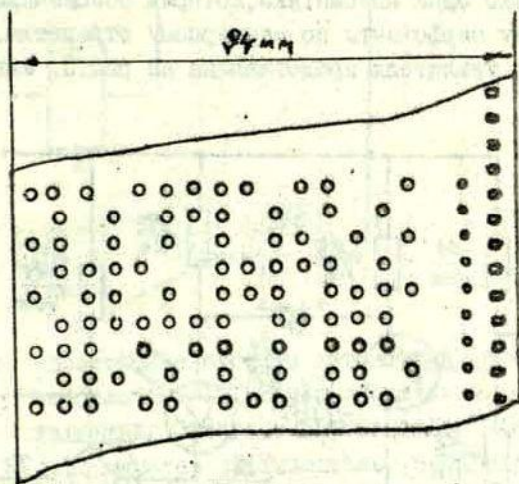


Рис.2. Часть перфоленты.

служат для записи номера звезды (в двоично-десятичном коде), 8— для установки коэффициента деления генератора меток, остальные 4—для яркости звезды. Диаметр информационных отверстий 1,2 мм, а маркерного 0,8 мм. Таким образом в одну строку можно уместить всю информацию, необходимую для наблюдения одной звезды. Диаметр информационных отверстий в каждом конкретном случае зависит от вида применяемого фотоэлектрического датчика. Пока мы пользовались фоторезисторами сф2-1 размеры окна которых 2,1 × 5 мм. Расстояние между строками 4 мм. Весь рабочий список звезд, их всего 393, уместается на ленте длиной около 1600 мм. Размеры системы роликов, указанные на рис. 1, примерно соответствуют такой длине ленты. Весь механизм очень свободно размещается в ящике размерами 270 × 270 × 440 мм.

Идея устройства заимствована от построенного сотрудниками АО ЛГУ М.К.Абеле, К.К.Лапушкой подобного блока для программного управления вычислителя сферических координат

[3]. Вычислителем теперь уже не пользуются, поэтому можно было снять с него готовую систему лентопротяжного механизма с осветителем. Электронная система устройства, кроме фотоэлектрических считывающих усилителей - преобразователей, содержит также блок автоматики, который обеспечивает точную остановку перфоленты по маркерному отверстию. Схема считывающего усилителя представлена на рис.3. Минимальное

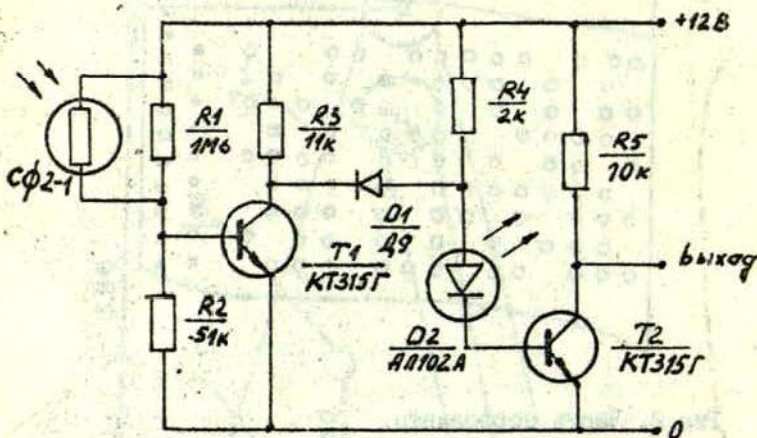


Рис.3. Фотоэлектрический считывающий усилитель.

темновое сопротивление фоторезистора сф2-1 не менее 5 мом, поэтому при неосвещенном фоторезисторе падение напряжения на резисторе  $R_2$  меньше порога отпирания транзистора  $T_1$ . Сопротивление освещенного фоторезистора в данной установке падает до 20 - 30 ком. Транзистор  $T_1$  насыщается. Второй инвертор на транзисторе  $T_2$  с повышенным порогом включения: светодиод  $D_2$  одновременно служит индикатором состояния инверторов. Схема автоматики остановки перфоленты по маркерной щели (рис.4) также довольно проста. Запуском и остановкой двигателя управляет логический вентиль "ИЛИ" (3). Входы  $E_1, E_2$  вентиля получают сигналы от триггера управления (1) и компаратора (триггера Шмитта) (4). Система работает в двух режимах. Первый режим это - непрерывный поиск номера звезды (переключатель "Режим" в разомкнутом состоянии). После нажатия кнопки "пуск" триггер управле-

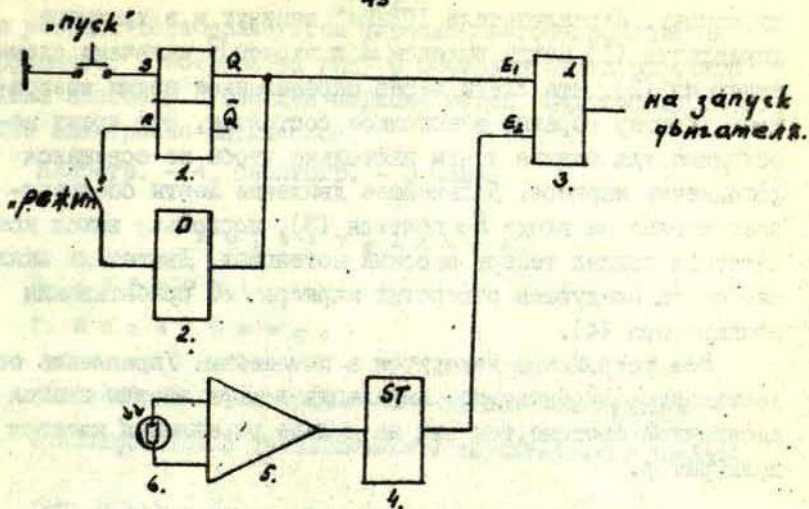


Рис. 4. Электронная система автоматики остановки перфоленты. 1. Триггер управления. 2. Схема задержки. 3. Логический вентиль "ИЛИ". 4. Компаратор. 5. Усилитель. 6. Маркерный фотодатчик.

ния (I) опрокидывается. Тогда вентиль "ИЛИ" разблокирован по входу  $E_1$ , и двигатель приводит в движение перфоленту. Лента продолжает двигаться независимо от изменений состояния компаратора (4). Наблюдатель видит непрерывное изменение номеров звезд на экране индикатора. Когда номер близок к желаемому, переключатель "РЕЖИМ" переводится в замкнутое состояние и триггер управления гасится. Однако, двигатель останавливается только после совмещения маркерных отверстий на ленте и маслэ. После этого компаратор (4) принимает на выходе низкий потенциал и сохраняет такое положение. Точную остановку на строке обеспечивает то, что маркерное отверстие меньше по диаметру и то, что усилитель (5) маркерного фотодатчика менее чувствительный. Поэтому компаратор сработает только после достаточно точного совмещения маркерных отверстий. Экспериментально было констатировано, что механизм тормозится достаточно эффективно после выключения двигателя. Вторым режим "дискретный". Тогда осуществляется протяжка перфоленты на од-

44  
ну строку. Переключатель "РЕЖИМ" замкнут, и в триггере управления (1) между выходом  $a$  и входом  $R$  включена схема задержки (2). Эта схема через определенное время возвращает триггер обратно в исходное состояние. Это время необходимо для сдвига ленты настолько, чтобы не освещался фотодатчик маркера. Дальнейшее движение ленты обеспечивает сигнал на входе  $E_2$  вентиля (3), поскольку выход компаратора принял теперь высокий потенциал. Двигатель выключается на следующей отверстии маркера от срабатывания компаратора (4).

Все устройство находится в помещении. Управление осуществляется дистанционно. Индикация номера звезды дается в десятичной системе, так как на пульте управления имеется дешифратор.

### Л и т е р а т у р а

1. Огриньш М.П. С настройке генератора меток устройства для определения среднего момента прохождения звезд. - "Уч. записки Латв.ГУ", 1973, т. 190, вып. 9.
2. Огриньш М.П. Устройство для непосредственной регистрации средних моментов прохождений звезд с выдачей результата на цифropечатающее устройство. - "Уч. записки Латв.ГУ", 1975, т. 220, вып. II.
3. Лагушка К.К. Полуавтоматическая измерительно-вычислительная установка для обработки астронегативов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Глава I4, §4.

### Р е з ю м е

А. В. И в а н о в ,  
П. П. Р о з е н б е р г

АВТОМАТИЧЕСКАЯ НАСТРОЙКА ГЕНЕРАТОРА МЕТОК В  
УСТРОЙСТВЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДНИХ МОМЕНТОВ  
ПРОХОЖДЕНИЙ ЗВЕЗД

В построенном в Службе времени АО ЛГУ вспомогатель-

45

ном устройстве, используется широкая светонепроницаемая перфолента, в которой на ряду с номерами звезд рабочего списка занесены числа для периода меток. Считывание информации электронно-оптическое.

Иллюстр. - 4, библиогр. - 3 назв.

K o r s a v i l k u m s

A. I v a n o v s,

P. R o z e n b e r g s

AUTOMĀTISKA LAIKA ATZĪMĀJU GENERATORA NOSKAŅOSANA  
ZVAIGZŅU VIDĒJO TRANZĪTMOMENTU REGISTRĒŠANAS IEKĀRTĀ

LVU AO Laika dienestā uzbūvētajā palīgierīcē tiek izmantota plata necaurspīdīga perfolente, kurā kopā ar zvaigzņu saraksta numuriem ir iekodēti skaitļi laika zīmju perioda noteikšanai. Informācijas nolāsisana optiski-elektroniska.

S u m m a r y

A. I v a n o v s

P. R o z e n b e r g s

AUTOMATIC ADJUSTMENT OF THE MARK GENERATOR IN  
THE STAR MEAN TRANSIT MOMENT RECORDER

In the device designed at the Time Service of the Latvian State University a broad punched tape with coded list of star numbers and data for time mark period determination is used. Information is picked up optically by an electronic accessory device.

УДК 522.6 : 681.142.654

А. Д. Погоний,  
Е. В. Хруцкая  
Никол. отд. ГАО

## АВТОМАТИЧЕСКАЯ ЗАПИСЬ И ОБРАБОТКА ОТСЧЕТОВ ОКУЛЯРНОГО МИКРОМЕТРА МЕРИДИАННОГО КРУГА

Практика использования ЭВМ при обработке астрометрических наблюдений, в частности при составлении звездных каталогов, показывает, что при наблюдении наиболее целесообразно лишь получить материал в виде пригодном для непосредственного ввода в ЭВМ. Для решения этой задачи была разработана установка, названная усредняющий перфорирующий хронограф [1]. Ее использование в качестве регистрирующего устройства на меридианном круге позволило получать для каждого наблюдения в коде ЭВМ средние моменты по каждому обороту в виде 6-значного числа 0.00.000.

В ходе эксплуатации в начальный вариант было внесено ряд добавлений, обеспечивающих контроль работы и расширивших возможности регистрации. Было добавлено:

- 1) контроль работы усредняющего блока,
- 2) возможность совместной и отдельной работы перфорирующего и печатающего хронографов,
- 3) запись отдельных контактов окулярного микрометра по прямому восхождению,
- 4) запись отсчетов окулярного микрометра по склонению и примечаний о качестве наблюдения и изображения с клавишного II -разрядного пульта.

Окончательный вариант установки показан на развернутой блок-схеме рис.1. 1 - счетчики (рабочий и задающий);

2) триггерные ячейки; 3 - схемы совпадения ("И"); 4 - собирательные схемы („ИЛИ"); 5 - эмиттерные повторители;



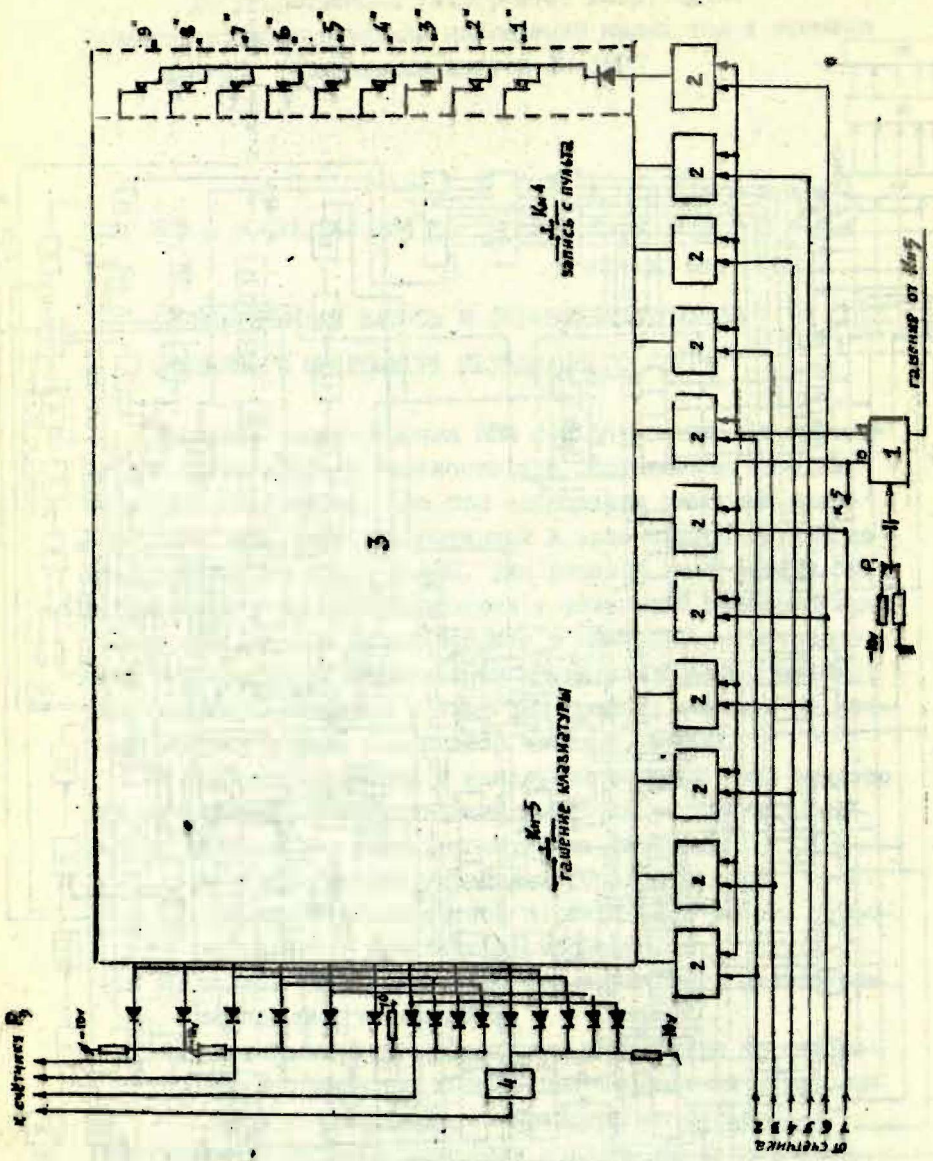


Рис.2. Схема пульта.

6 - счетчики по модулю 5 (для 5-контактного микрометра) (СКМ, ДЧ); 7 - диодные дешифраторы (ДД); 8 - усилители мощности (УМ); 9 - ленточный перфторатор (ПЛ); 10 - декада выдачи (ДВ); 11 - усилители (У); 12 - усилители-формирователи (УФ).

Контроль работы усредняющего блока осуществляется переключением тумблера "работа-контроль" в положение "контроль". При этом, после гашения счетчиков и управляющих триггеров кнопками "гашение", первый после гашения импульс фиксированной частоты  $f = 10$  гц с выхода усилителя (У 11) включает основную частоту  $f = 10$  кГц на блок усреднения (делитель частоты (ДЧ6), диодный дешифратор (ДД7), эмиттерные повторители (ЭП5) и счетчик контактов микрометра (СКМ6) ) и одновременно поступает через тумблер "контроль" на вход счетчика контактов микрометра (СКМ6) (рис. 1). После прохождения пяти импульсов на счетчик контактов микрометра (СКМ6) пятый импульс, выделенный в усредняющем блоке, выключает триггер (ТПВЧ2), который запрещает прохождение частот  $f = 10$  гц и  $f = 10$  кГц. Таким образом, после прохождения пяти импульсов  $f = 10$  гц, на рабочем счетчике получается средний из четырех интервалов времени в  $0,1^s$ , т.е. фиксируется  $0^{m}00,200 \pm 0,001^s$ .

Совместная и раздельная работа перфорирующего и печатающего хронографов обеспечивается выключением контактов микрометра в цепь питания печатающего хронографа (48в) и в цепь питания перфорирующего хронографа (10в). Чтобы исключить влияние друг на друга этих источников в их цепи питания контактов микрометра встречно включены диоды (рис.1) (использованы Д 226).

Выдача отдельных контактов окулярного микрометра по  $\alpha$  может оказаться полезной при малом числе наблюдений /например, при наблюдениях днем/, а также при проверке установки. Запись отдельных контактов на перфоленту достигается путем исключения из работы усредняющего блока контактами реле  $R_4$  (рис.1). Контакты  $R_4$  отключают выход усилителя-формирователя (12) от входа делителя частоты (ДЧ6) и подключают его к входу рабочего счетчика, отключив вход счетчика от выхода усилителя-формирователя (12').

Помимо этого отключаются схемы контроля поступления контактов (3). Запись результата производится не импульсом оборота, а импульсом контакта, этот же импульс выключает прохождение частоты на рабочий счетчик (триггер ТВ42).

Запись на перфоленту отдельных отсчетов окулярного микрометра по склонению и пометок, сопровождающих наблюдения, осуществляется с II-разрядного пульта, схема которого приведена на рис.2.

При монтаже использована клавиатура пульта настольной вычислительной машины "Вильнюс". Для набора информации имеется II разрядов (3). В схему пульта входят логические схемы (2) ("И"); триггер управления (I), диодный дешифратор и усилитель (4), кнопки "гашение клавиатуры" и "запись".

Входы логических схем "И" подключены к выходу диодного дешифратора (ДД7) декады выдачи (ДВ10) счетчика (рис.1) и к выходу триггера управления (I) пульта. Выходные каналы пульта через контакты реле  $P_3$  подключаются к выходным каналам счетчика. Диодный дешифратор пульта преобразует десятичный код клавиатуры в двоично-десятичный. В клавиатуре использованы только контакты на замыкание. Для исключения взаимного влияния разрядов, клавишные секции разделены встречным включением диодов в каждый разряд пульта. Одинаковые цифры каждого разряда собраны в один выход /выходы "1", "2", "3", "4" и т.д./.

Связь пульта с перфоратором осуществляется через реле  $P_3$ . Выдача на перфоратор происходит при нажатии кнопки "запись" на пульте. При этом реле  $P_3$  отключает выходные каналы со счетчика и подключает к перфоратору выходные каналы с пульта. Сигнал от кнопки "запись" /при включенном реле  $P_3$  / через схемы 3, 5, 4 /рис.1/ включает триггер включения перфоратора /ТВП2/. Дальнейший процесс записи на перфоленту происходит так же, как при записи моментов. Для записи II разрядов опрос разрядов клавиатуры происходит дважды - опрашиваются первые 6 разрядов, потом оставшиеся 5.

После записи первых шести разрядов реле гашения  $P_1$  переключает триггер управления записью с пульта (I) на запись следующих 5 разрядов (рис.2). Сигналом с выхода

триггера управления (I) через схемы 5 и 4 происходит повторное включение схем выдачи и запись оставшихся 5 разрядов. Для сброса набора на пульте имеется кнопка "гашение".

Регистрация наблюдений в коде ЭВМ избавляет от ручной работы по подготовке материала к последующей обработке и позволяет вести анализ и первичную обработку с помощью ЭВМ. Разработанная расширочная программа, анализируя полученные по оборотам средние моменты, выявляет и бракует погрешности наблюдений. В общем случае анализ основан на том, что разность средних моментов соседних оборотов ( $\Delta$ ) мало отличается от величины  $R \sec \delta$  ( $R$  — цена оборота винта по  $\alpha$  окулярного микрометра;  $\delta$  — склонение звезды). Средне-квадратическая ошибка  $\epsilon$  разности ( $\Delta - R \sec \delta$ ) служит одной из характеристик при отборе "качественных" оборотов.

Если интерпретировать ось ординат как меридиан, а концу каждого оборота приписать координату, соответствующую его номеру (счет в обе стороны от меридиана), то полученным средним моментам можно поставить в соответствие следующий набор координат  $-2,5; -1,5; -0,5; +0,5; +1,5; +2,5, \dots$ , каждая из которых характеризует расстояние соответствующего среднего момента от начала координат (в нашем представлении от меридиана). Такое представление позволяет формально оперировать с выбранными для усреднения моментами. Средний момент прохождения звезды через меридиан вычисляется по формуле:

$$T_{cp} = \frac{\sum T_i}{n} + R \frac{\sum N_i}{n} \sec \delta$$

- $T_i$  — средние моменты по оборотам, взятым в обработку,  
 $N_i$  — координаты, соответствующие этим моментам,  
 $R$  — цена оборота винта по  $\alpha$  окулярного микрометра,  
 $n$  — количество оборотов.

Усредняющий перфорирующий хронограф испытывался в условиях павильона. Прибор работал в диапазоне температур  $-18^{\circ} + 35^{\circ}$ . Всего с ним было получено 3000 наблюдений с параллельной регистрацией на печатающем хронографе. Сравнение полученных разностей ( $T_{xp} - T_{nl}$ ) ( $T_{xp}, T_{nl}$  — средние моменты прохождения через меридиан, полученные

соответственно на печатающем и перфорирующем хронографах) показало, что средне-квадратическая ошибка одной разности не превосходит  $\pm 0,0018$ .

Анализировалась систематическая зависимость разностей  $(T_{xp} - T_{nl})$  от склонения звезды. Для этого были найдены уклонения отдельных разностей  $(T_{xp} - T_{nl})$  от их среднего значения по каждому вечеру. Полученные уклонения объединялись в 2-градусные зоны по  $\delta$  для всего материала. Результаты, приведенные на рис. 3, свидетельствуют о независимости разности  $(T_{xp} - T_{nl})$  от скорости движения звезды, по крайней мере, в пределах  $+60^\circ \div -35^\circ$ .

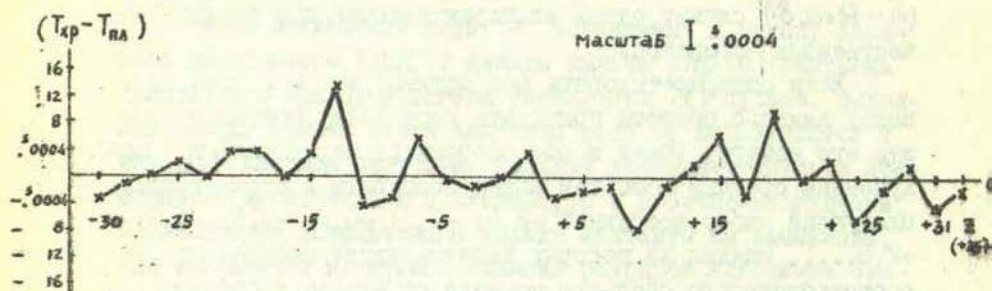


Рис. 3. Систематическая зависимость разности  $(T_{xp} - T_{nl})$  от склонения.

Использование при наблюдениях усредняющего перфорирующего хронографа и включение расшифровочной программы в применяемую схему составления дифференциальных каталогов с помощью ЭВМ [2] позволяет практически полностью автоматизировать процесс составления каталога прямых восхождений.

#### Л и т е р а т у р а

1. Кониин В.В., Погоний А.Д., Хрущкая Е.В. - Со. "Новая техника в астрономии". Л., "Наука", 1972, вып. 1, с. 15-31.

### Резюме

А. Д. Погоний  
Е. В. Хруцкая

#### АВТОМАТИЧЕСКАЯ ЗАПИСЬ И ОБРАБОТКА ОТСЧЕТОВ ОКУЛЯРНОГО МИКРОМЕТРА МЕРИДИАННОГО КРУГА

В статье приводится описание отдельных блоков, которые обеспечивают контроль работы прибора и расширяют возможности регистрации. Дается развернутая блок-схема установки в целом. Показана возможность обработки перфоленты с наблюдениями на ЭВМ. Проанализированы наблюдения, полученные с усредняющим перфорирующим хронографом.

Иллюстр.: 3, библиогр.: 3 назв.

### K o r s a v i l k u m s

A. D. P o g o n i j s  
E. V. H r u c k a j a

#### MERIDIĀNA RIŅKA OKULĀRMĪKROMETRA NOLASĪJUMU AUTOMĀTISKS PIERAKSTS UN APSTRĀDE

Rakstā dots apraksts atsevišķiem blokiem, kuri nodrošina instrumenta darba kontroli un neplašina reģistrācijas iespējas. Dots izvērsta iekārtas blokhēma. Parādīta novērojumu perfolentas apstrādes iespēja ar ESM. Analizēti novērojumi, kas iegūti ar vidējojošu perforējosu hronogrāfu.

## Summary

A. D. P o g o n y

E. V. K h r u t s ' k a y a

AUTOMATIC TAPE-RECORDING AND TREATMENT OF THE  
READINGS OF MERIDIAN CIRCLE OCULAR MICROMETER

The separate blocks of the averaging perforating chronograph, which ensure the control of work and enlarge of the possibilities of the registration are described. The detailed block-scheme of the plant as a whole is given. The possibility of the treatment of the punched tape with observations by means of the electronic computer is shown. The analysis of the observations obtained by means of the averaging perforating chronograph is adduced.

Латвийский ордена Трудового Красного Знамени  
государственный университет им. П. Стучки

Точность астрометрических наблюдений малых тел и времени  
Астрономия, выпуск 12, 1977

УДК 522.52

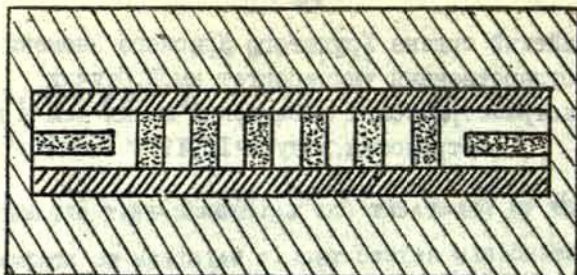
К. А. Штейнс,

А. В. Иванов

ЛГУ им. П. Стучки

### ЗЕРКАЛЬНАЯ ВИЗИРНАЯ РЕШЕТКА ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО НАВЕДЕНИЯ ТРУБЫ НА ЗВЕЗДУ

Нами была предложена зеркальная визирная решетка для автоматического наведения трубы на звезду с двумя длинными щелями в начале и конце дорожки [1-2]. Чтобы уничтожить влияние фона неба одна из них прозрачная, а другая зеркальная. Практика показала, что фотолитографическим способом точно изготовить зеркальную решетку даже с весьма сложными щелями сравнительно просто, однако построить экранирующую систему или зачернить решетку сложно. В настоящей статье предлагается визирная решетка, для которой экранировку осуществить сравнительно просто. Предлагаемая зеркальная визирная решетка для автоматического наведения трубы на звезду представлена на рис. 1. На рис. 1 показана стеклянная пластинка, покрытая хромом с 6 поперечными щелями (0,35 мм  $\times$  0,1 мм) и двумя продольными щелями (0,5 м  $\times$  0,20 мм). К стеклу прижаты два экранирующих лезвия из латуни с отшлифованными прямолинейными краями (пунктирные). Пластинки зачернены сажей. На рисунке не показаны еще три аналогичные группы щелей для регистрации прохождения звезд в положении трубы после перекладки оси пассажного инструмента как для наблюдения близполюсных, так и для наблюдения экваториальных звезд [2]. Если считать, что фон на одинаковых зеркальных и прозрачных площадях взаимно компенсируется, то предлагаемая визирная решетка компенсирует фон неба. Для уменьшения влияния флуктуации фона в 40 латв. гос. ун-в. при наблюдении звезды открыта только одна из четырех систем щелей состоя-



хром зеркала



прозрачное стекло



экранирующие лезвия



передвижное окно

Рис. I. Визирная решетка для автоматического наведения трубы на звезду.

чая из 8 щелей. Для закрытия остальных перед визирной зеркальной решеткой помещено передвижное окошко с экраном (заштриховано). Края окошка параллельны краям лезвий отодвинуты несколько дальше и не определяют края дорожки. Концы окошка перпендикулярны краям лезвий (краям дорожки) и ограничивают длину дорожки, на которой происходят наблюдения. Следовательно, изготовить и установить передвижное окошко и лезвия сравнительно просто.

Установление звезды с помощью предлагаемой дорожки имеет большие преимущества. Это вытекает из следующего факта, установленного на опыте. При вращении трубы пассажного инструмента АИМ-10 со скоростью примерно 1/10 об/с после поступления импульса от фотоэлектрического усилителя, полученного от пересечения изображением звезды края продольной щели, труба останавливается практически мгновенно. Отсюда следует, что добавочные дорожки следует делать уже, чем дорожки с рабочими щелями. Для "поиски"

звезды используется импульс, полученный от прямого луча, прошедшего через прозрачное стекло.

### Л и т е р а т у р а

1. Штейнс К.А., Огриньш М.П., Иванов А.В. Об использовании передвижной дорожки при наблюдении прохождения звезд. - "Уч. записки Латв.ГУ", 1973, т.190, вып.6, с.24-50.
2. Штейнс К.А. О поэтапном введении АСУ для пассажного инструмента АО ДГУ. - "Уч. записки Латв.ГУ", 1975, т.220, с.3.
3. Штейнс К.А. О выборе параметров при фотоэлектрической регистрации прохождения звезд. - "Уч. записки Латв.ГУ", 1969, т.121, с.3.

### Р е з ю м е

К. А. Ш т е й н с,  
А. В. И в а н о в

#### ЗЕРКАЛЬНАЯ ВИЗИРНАЯ РЕШЕТКА ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО НАВЕДЕНИЯ ТРУБЫ НА ЗВЕЗДУ

Предложена зеркальная визирная решетка для автоматического наведения трубы на звезду с хорошей компенсацией фона неба и с простой экранизирующей системой.

Иллюстр. - 1, обложка - 3 назв.

### К о р с а v i l k u m z

K. Š t e i n s,  
A. I v a n o v s

#### SPOGUĻA SKATA REŽĢIS AUTOMĀTISKAĪ TĀLSKATA UZVEŠANAI UZ ZVAIGZNI

aprakstīts spoguļa skata režģis automātiskai tālskata uzvešanai uz zvaigzni ar labu debess fona kompensāciju un ar vienkāršu ekranizējošu sistēmu.

## Summary

K. Stejneger,

A. Ivnovs

A MIRROR GRATING FOR AUTOMATIC TELESCOPE  
POINTING ON A CHOSEN STAR

A mirror grating with good skylight compensation and a simple shading system is described.

УДК 522.43

М. К. А б е л е  
ЛГУ им. П. Стучки

### ИСПЫТАНИЕ ОПТИЧЕСКОГО КОМПЕНСАТОРА НАКЛОНА НА ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ОТРАЖАТЕЛЬНОМ ЗЕНИТНОМ ТЕЛЕСКОПЕ

Анализ результатов наблюдений на фотоэлектрическом зенитном отражательном телескопе (ФЭЗТ) за 1970 - 1971 годы показал, что имеют место большие случайные ошибки, причиной которых является ртутный горизонт [1]. В 1974 году ртутный горизонт был заменен оптическим компенсатором наклона. Компенсатор наклона представляет собой физический маятник на кардановом подвесе. К маятнику прикреплено плоское зеркало, которое на телескопе установлено на место ртутного горизонта. В качестве подшипников подвеса были использованы шарниры с крестообразными пружинами [2]. Экспериментальным путем восстанавливающий момент был отрегулирован равным нулю. Компенсатор исследовался на телескопе автоколлимационным способом. Для этого перед объективом телескопа неподвижно закреплялось плоское зеркало и на фокальной плоскости устанавливался автоколлимационный микрометр. После каждого отсчета микрометра телескоп поворачивался на один оборот. Результаты измерений приведены на рис. 1. В лучшем случае изменение зенитного расстояния не превосходит  $0,05''$  за час, когда внутри трубы телескопа вакуум.

Были проведены экспериментальные наблюдения звезд в марте - апреле 1975 года. В каждую ночь были наблюдаемы 3 - 5 звезд, имеющие координаты в каталоге звезд служб времени. Результаты наблюдений приведены на рис. 2, где точками отмечены поправки часов, определенные на ФЭЗТ, а крестиками на пассажном инструменте АПМ-10. Между инструментами имеется постоянная разность поправки  $0,095''$ . На рис. 3 приведены кривые изменения зенитного расстояния и отклонения широты вычисленные по наблюдениям звезд.

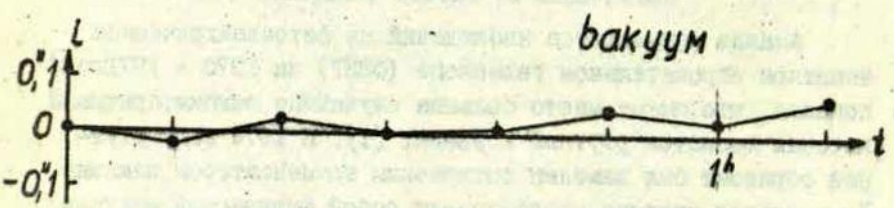
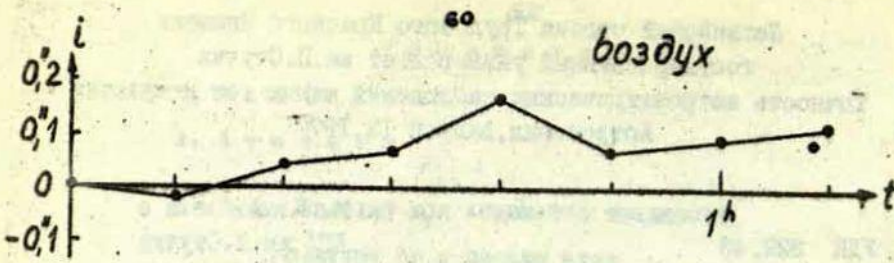


Рис. 1.

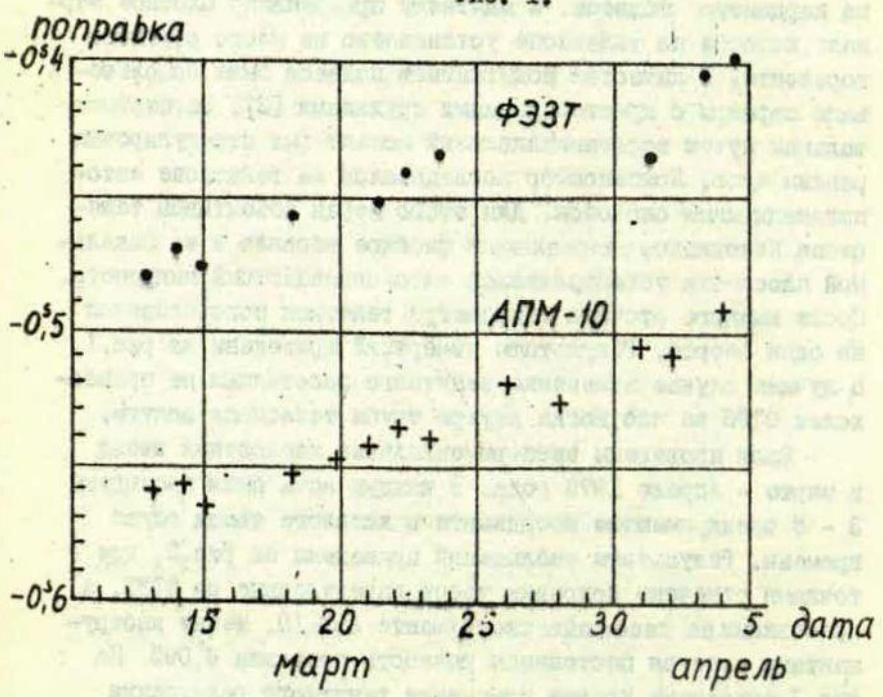


Рис. 2.

В результате испытаний можно сделать вывод, что случайные ошибки телескопа с применением оптического компенсатора уменьшались, но появилась довольно большая систематическая разность при наблюдениях на двух инструментах.

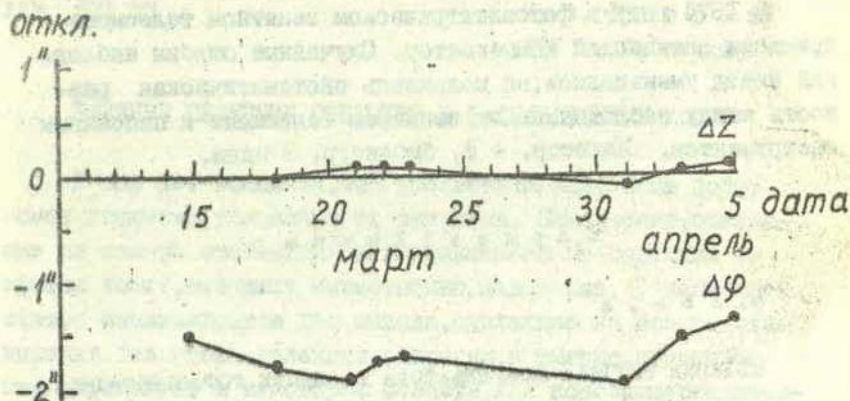


Рис. 3.

### Л и т е р а т у р а

1. Абеле М.К. — "Уч. записки Латв.ГУ", 1971, т. 148, с. 73.
2. Справочник конструктора точного приборостроения. М.-Л., "Машиностроение", 1964, с. 547.

М. К. А б е л е

ИСПЫТАНИЕ ОПТИЧЕСКОГО КОМПЕНСАТОРА НАКЛОНА НА  
ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ОТРАЖАТЕЛЬНОМ ЗЕНИТНОМ ТЕЛЕСКОПЕ

В 1974 году в фотоэлектрическом зенитном телескопе применен оптический компенсатор. Случайные ошибки наблюдений звезд уменьшались, но появилась систематическая разность между наблюдениям на зенитном телескопе и пассажным инструментом. Иллюстр. - 3, библиогр. 2 назв.

K o r s a v i l k u s

M. Ā b e l e

SLĪPUMA OPTISKĀ KOMPENSATORA PĀRBAUDE FOTOLEKTRISKĀ  
ATSTAROJOSĀ ZENITTELESKOPĀ

1974.gadā zenitteleskopā izmantots optiskais kompensators. Gadījums kļūdas zvaigzņu novērošanē kļuvušas mazākas, bet parādījies sistematiska starpība starp zenitteleskopa novērojumiem un pasāžinstrumenta novērojumiem.

S u m m a r y

M. Abele

TESTING OF AN OPTICAL COMPENSATOR ON PHOTOELECTRIC  
REFLECTING ZENITH TUBE

In the 1974-th year the photoelectric zenith tube is used with optical compensator. The errors of stars observations are little but there is the systematic difference between zenith tube and a passage instrument.

УДК 521.73

И. А. Ревина  
ЛГУ им. П. Стучки

### ВЛИЯНИЕ СЕЛЕКЦИИ ОТКРЫТИЯ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОМЕТ

У нас нет сомнения, что статистика элементов орбит комет искажена условиями их открытия. Заключение, сделанное на основе статистики неисправленной за селекцию открытия комет, вызывает, естественно, недоверие. В настоящей статье анализируются два вывода, сделанные на основе статистики без учета селекции открытия, а именно, концентрация перигелиев в некоторой области, как короткопериодических, так и долгопериодических комет. Концентрацию перигелиев орбит короткопериодических комет защитники теории захвата комет считали действительным явлением и пытались объяснить это возмущающим действием Юпитера на эти кометы [1, 2]. Эффект концентрации перигелиев орбит почти параболических комет носит название эффекта Опенгейма-Витковского или других выдающихся ученых в основном защитников реальности этого эффекта. На его основе созданы разные гипотезы межзвездного происхождения комет. В последнее время В. В. Радзиевский и В. П. Томанов [4] более подробно изучили концентрацию перигелиев в направлении апекса движения Солнца, но, к сожалению, без учета селекции открытия комет, и выдвинули модифицированную гипотезу Нольке происхождения комет. Если концентрация реально существует, то естественно ее объяснять эффектами движения Солнечной системы в Галактике. К сожалению, кометное облако мало изучено и поэтому исследования отдельных эффектов являются только теоретическими. Условия открытия комет подробно изучено И. Голечком. Однако в этой теории не учитывается ряд существенных факторов, связанных с местом нахождения наблюдателя, поэтому нами распределение рассматривалось с

учетом места открытия комет. Для короткопериодических комет для выявления селекции открытия комет мы сравнивали распределения некоторых элементов комет разных типов, предполагая, что условия открытия их одинаковы.

### § I. Концентрация перигелиев длиннопериодических комет вокруг апекса

Согласно исследованию В.П.Томанова [5] максимум перигелиев приходится на сегмент с вершиной в апексе Солнца. Здесь сосредоточено 175 перигелиев т.е. 36%. Наблюдаемое отклонение превышает вероятное в 8,2 раза, т.е. далеко выходит за пределы случайного. Чтобы показать независимость открытия комет от условий видимости, В.П.Томанов приводит следующие рассуждения. Если бы при открытии комет с перигелиями в антиапексиальном сегменте существенную роль играли плохие условия видимости, то, очевидно, здесь должны были бы открываться преимущественно яркие кометы, а процент слабых комет в апексиальном сегменте был бы более высоким. Однако резкое усиление эффекта концентрации в сегменте перигелиев ярких комет, видимо, свидетельствует о том, что условия селекции здесь не играют решающей роли, а следовательно, наблюдаемое распределение перигелиев близко к действительному. Наши исследования, которые мы не приводим, подтвердили, что разделение комет по блеску кометы  $H_c$  на две группы, яркие ( $H_c < 7^m$ ) и слабые ( $H_c > 7^m$ ), в момент открытия приводят к одинаковым распределениям. Нам кажется, это объясняется тем, что при плохих условиях наблюдений даже сравнительно ярких комет невозможно наблюдать, в чем мы на практике многократно убеждались. Подсчет возможности или невозможности концентрации перигелиев в определенной части сферы весьма сложен, т.к. по сути дела, во-первых, отыскивается область с наибольшей концентрацией перигелиев, а потом удивляются, почему в этой части так много перигелиев. Какие области с максимальным количеством точек можно выделить при случайном равномерном их распределении, мы определяли при помощи метода Монте Карло. Всего на сфе-

ру мы наложили 600 точек-комет. Покрытие сферы с окружностями мы делали следующим образом. Радиус окружности  $R = 60^\circ$  и центры окружностей определялись как точки  $(\lambda_i, \beta_i)$ , где

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + 10^\circ, \lambda_0 = 0^\circ, (0^\circ \leq \lambda_i \leq 350^\circ);$$

$$\beta_{i+1} = \beta_i + 10^\circ, \beta_0 = -90^\circ, (-90^\circ \leq \beta_i \leq 90^\circ).$$

Притом пары  $(\lambda_i, \beta_i)$  брались таким образом, что для каждого  $\lambda_i$  имелись все значения  $\beta_i$ . Вычисления проводились на вычислительной машине. Всего на сферу наложили 10 вариантов случайных комет. Анализируя эти варианты можно сделать следующее заключение. — максимальное число комет в окружности доходит до 180 комет, т.е. 30%, а самое минимальное до 120 комет, т.е. 20%. В статье В.П.Томанова для реальных долгопериодических комет разность составляла примерно 20%. Следовательно, действительно концентрация перигелиев вокруг апекса подлежит объяснению.

Чтобы выявить селекцию открытия комет, для всех комет выписаны из каталогов 6–9 места первого открытия, т.е. найдены широты  $\varphi$  мест открытия. По месту открытия распределили кометы на четыре группы:

$$I : 45^\circ < \varphi \leq 90^\circ; \quad II : 0^\circ < \varphi \leq 45^\circ;$$

$$III : -45^\circ < \varphi \leq 0^\circ; \quad IV : -90^\circ < \varphi < -45^\circ.$$

Дальше рассматривалось распределение комет относительно апекса и антиапекса. Мы разделили сферу на две полусферы, притом одна вершина находилась в апексе, а вторая в антиапексе. Для подтверждения полученного заключения, вокруг апекса и антиапекса мы провели окружности с радиусом

$R = 60^\circ$ . В таблице I даны данные о количестве комет в обоих случаях, распределенных по ранее упомянутым 4 группам.

Из таблицы I видим, что в северном полушарии открытых комет с перигелиями в апексе больше, чем в антиапексе. Но это не имеет место для комет открытых в южном полушарии. Здесь число комет с перигелиями в части сферы с центром в апексе и антиапексе почти одинаковое. Полученный эффект более виден также во втором случае, т.е. при  $R = 60^\circ$ , когда число комет в апексе приблизительно 2 и 2,5 раза больше,

Таблица I

$\varphi$	$R = 90^\circ$		$R = 60^\circ$	
	апекс	антиапекс	апекс	антиапекс
I	104	69	73	23
II	151	110	92	48
III	34	37	20	23
IV	-	-	-	-

чем в антиапексе в северном полушарии, а в южном одинаково.

По нашему мнению, нам удалось установить селекцию открытий комет для эффекта Опенгейма-Витковского.

Нами составлен каталог комет, открытых в южном полушарии. В столбцах каталога даны обозначения комет и величины:

$T$  - дата перигелия в мировом времени;

$i$  - наклонность орбиты к эклиптике;

$\Omega$  - долгота восходящего узла кометной орбиты на эклиптике;

$\omega$  - расстояние перигелия от узла;

$\lambda_E$  и  $\beta_E$  - эклиптикальная долгота и широта направления на перигелий орбиты;

$$\cos d = \sin \beta_a \sin \beta_E + \cos \beta_a \cos \beta_E \cos (\lambda_E - \lambda_a),$$

где  $\lambda_a$  и  $\beta_a$  долгота и широта апекса, т.е.  $\lambda_a = 270^\circ$  и  $\beta_a = 53,5$ . Величина  $\cos d$  характеризует распределение комет относительно апекса и антиапекса.

Это распределение уже было видно в табл. I. Все величины комет до 1970 года взяты из каталогов [6-9], а после 1970 года из кометных циркуляров [10]. Величины  $i$ ,  $\Omega$  и  $\omega$  в данном каталоге округлены до 0,1.

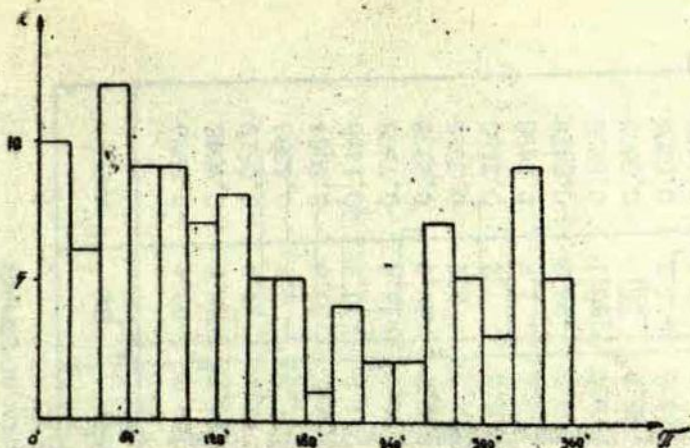


Рис. 1. Короткопериодические кометы,  $P \leq 100$  лет.

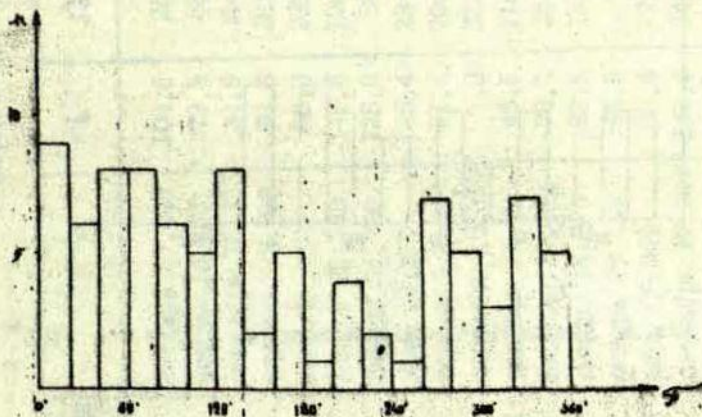


Рис. 2. Короткопериодические кометы,  $i \leq 30^\circ$

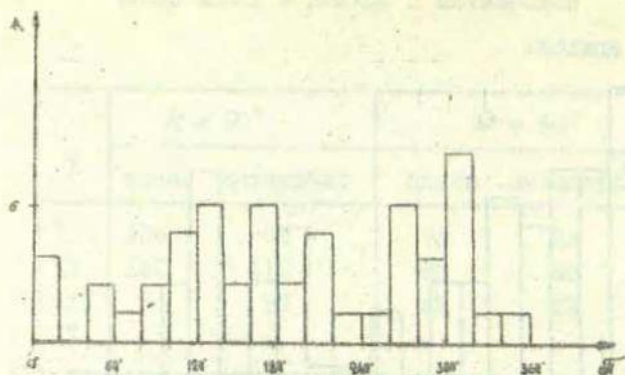


Рис.3. Долгопериодические кометы,  $0^\circ \leq i \leq 30^\circ$ .

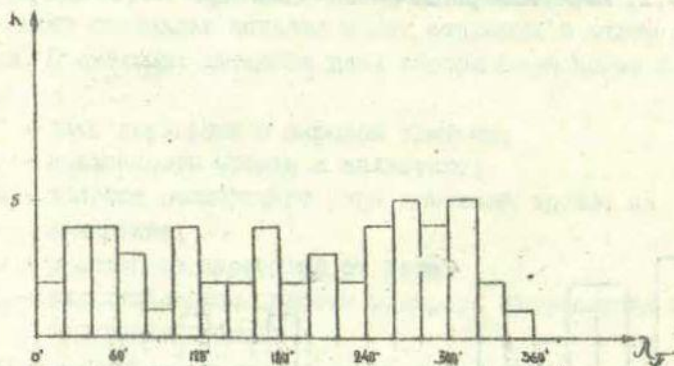


Рис.4. Долгопериодические кометы,  $150^\circ \leq i \leq 180^\circ$ .

Каталог комет, открытых в южном полушарии

№	Обозначение	T	i	$\Omega$	$\omega$	$\lambda_{\pi}$	$\beta_{\pi}$	$\cos d$
1	I 577	октябрь 27,448	104,8	25,3	255,6	164,8	-69,4	-0,8073
2	I 652	ноябрь 13,153	79,5	88,2	300,1	74,1	-58,2	-0,9846
3	I 686	сентябрь 16,325	34,9	354,1	81,9	79,4	31,3	-0,0819
4	I 695	октябрь 23,768	93,6	281,8	59,2	61,3	-8,8	-0,6386
5	I 758	июнь 11,637	68,3	230,8	36,8	248,3	33,8	0,9064
6	I 770 II	ноябрь 22,735	148,6	108,7	260,3	211,8	-30,9	-0,1438
7	I 784	январь 21,700	128,8	56,8	336,1	74,0	-18,4	-0,7963
8	I 824-I	июль 12,019	125,4	234,11	334,1	251,2	-20,9	0,2393
9	I 830 I	апрель 9,795	21,3	206,4	5,8	212,8	2,1	0,3515
10	I 833	сентябрь 10,895	7,3	323,5	260,9	225,2	-7,2	0,3180
11	I 844 III	декабрь 14,175	45,6	118,3	177,7	297,5	1,6	0,5498
12	I 860 I	февраль 17,125	79,7	324,1	209,8	150,5	-29,2	-0,6479
13	I 865 I	январь 14,825	92,5	252,9	111,7	79,7	68,1	0,5276
14	I 880 I	январь 28,118	144,6	6,1	86,2	281,0	35,2	0,9405
15	I 881 III	июль 16,940	63,4	270,9	354,2	268,6	-5,1	0,5208
16	I 882 II	сентябрь 17,724	142,0	344,0	69,5	281,6	35,2	0,9395
17	I 887 I	январь 11,631	128,5	324,6	58,4	281,6	37,8	0,9531

Каталог комет, открытых в южном полушарии (продолжение)

№	Обозначение	$T$	$i$	$\Omega$	$\omega$	$\lambda_{\pi}$	$\beta_{\pi}$	$\cos d$
18	1888 I	март 17,502	42,2	245,4	359,9	245,5	0	0,5413
19	1889 IV	июль 19,786	66,0	286,2	345,9	280,5	-12,9	0,3906
20	1894 II	апрель 13,891	86,9	206,4	324,2	204,3	-35,7	-0,2703
21	1901 I	апрель 24,750	131,1	109,6	203,0	274,0	-17,2	0,3291
22	1906 II	февраль 21,433	83,5	72,0	276,4	26,8	-80,8	-0,8364
23	1910 I	январь 17,588	138,8	88,8	320,9	120,2	-24,5	-0,8012
24	1912 II	октябрь 5,458	79,8	297,0	25,6	301,9	25,3	0,8001
25	1913 I	февраль 6,23	80,4	302,9	279,3	258,6	-76,5	-0,6455
26	1914 IV	август 5,506	77,8	0,4	270,4	272,3	-72,2	-0,6522
27	1914 V	октябрь 26,767	68,0	59,1	97,5	169,0	66,7	0,6934
28	1918 II	июнь 5,775	70,1	17,8	194,1	202,5	-13,3	0,0366
29	1920 I	январь 3,174	123,2	315,6	276,6	34,1	-56,2	-0,8535
30	1920 III	декабрь 11,523	22,1	107,8	340,9	90,4	-7,1	-0,6896
31	1921 VI	октябрь 28,766	32,4	274,5	183,7	98,0	-2,0	-0,6167
32	1923 I	январь 4,223	23,3	262,0	264,5	166,4	-23,2	-0,4452
33	1924 I	март 13,992	72,3	114,0	271,5	28,7	-72,3	-0,8526
34	1925 III	июль 29,877	26,9	6,0	259,3	264,4	-26,5	-0,1711
35	1926 I	январь 2,993	128,4	136,1	328,4	156,9	24,3	0,1181

Каталог комет, открытых в южном полушарии (продолжение)

№	Обозначение	$T$	$i$	$\Omega$	$\omega$	$\lambda_{\gamma}$	$\beta_{\gamma}$	$\cos d$
36	1926 III	февраль II, 978	123,0	282,4	354,8	285,5	- 1,8	0,5476
37	1926 VII	декабрь 30, 587	83,6	108,6	224,8	290,3	-45,2	-0,1790
38	1927 II	февраль I4, 503	92,4	18,8	231,8	196,1	-51,8	-0,5297
39	1927 IX	декабрь 18, 183	86,1	77,2	47,2	81,7	46,9	0,1848
40	1930 V	май 10, 453	97,1	278,3	321,0	284,3	-38,8	-0,0545
41	1932 VI	сентябрь 21, 075	125,0	215,2	329,7	17,0	-24,3	-0,4893
42	1934 II	сентябрь 6, 920	141,9	73,3	124,3	302,6	27,1	0,8123
43	1935 I	февраль 26, 469	65,4	91,5	18,4	99,6	16,7	-0,3308
44	1941 IV	январь 27, 654	168,2	42,3	268,3	133,7	-11,8	-0,6115
45	1941 VIII	сентябрь 3, 197	94,5	256,7	85,4	212,9	83,5	0,8353
46	1944 I	январь 12, 459	136,0	57,9	33,4	33,0	21,7	-0,0038
47	1944 IV	июль 17, 617	95,0	202,8	336,9	204,9	-22,9	-0,0821
48	1945 III	май 17, 146	156,5	254,3	280,1	333,4	-23,1	-0,0704
49	1945 VII	декабрь 28, 012	137,0	321,6	50,9	279,7	32,0	0,9232
50	1946 VI	октябрь 26, 794	57,0	237,6	320,4	213,5	-32,2	-0,1505
51	1947 I	февраль 7, 422	108,2	34,9	348,6	38,4	-10,8	-0,5136

Каталог комет, открытых в южном полушарии (продолжение)

№	Обозначение	$T$	$i$	$\Omega$	$\omega$	$\lambda_{\text{II}}$	$\beta_{\text{II}}$	$\cos d$
52	1947 IV	май 20,966	39,3	353,2	303,8	304,0	-31,9	-0,0061
53	1947 V	май 31,116	111,4	232,3	357,4	233,3	-2,5	0,4414
54	1947 XII	декабрь 2,587	138,5	336,6	196,2	144,3	-10,6	-0,4890
55	1948 I	февраль 16,433	140,6	270,7	350,2	278,3	-6,2	0,4983
56	1948 III	апрель 9,023	53,2	139,7	191,8	326,8	-9,5	0,1886
57	1948 X	октябрь 22,937	87,6	66,9	274,3	37,8	-85,1	-0,8320
58	1948 XI	октябрь 27,429	23,1	210,3	107,3	318,8	22,0	0,6644
59	1950 I	январь 19,317	131,4	221,6	40,1	192,5	28,9	0,5012
60	1959 III	июль 17,559	12,8	105,1	186,5	291,4	-1,4	0,5340
61	1963 V	август 23,921	144,5	6,8	85,8	271,5	35,4	0,9503
62	1970 II	март 20,046	90,0	223,9	354,2	224,0	-5,8	0,3298
63	1970 VI	май 14,49	139,1	336,3	61,3	282,3	35,1	-0,9377
64	1972	март 27,73	123,7	159,6	257,7	271,0	-54,4	-0,3072
65	1972	декабрь 19,034	113,1	314,2	267,2	51,2	-68,8	-0,9217
66	1973	август 10,124	108,1	243,9	221,3	48,7	-38,9	-0,8522
67	1974	март 18,357	61,3	143,0	333,1	129,4	-23,4	-0,7409
68	1974	май 13,102	173,2	165,1	176,8	346,2	0,4	0,1271
69	1974	декабрь 1,123	134,7	50,9	324,8	77,3	-24,3	-0,8584
70	1975	апрель 4,632	55,3	157,2	264,2	57,1	-54,8	-0,9448
71	1975 p	декабрь 21,29	70,5	270,4	357,8	269,6	-2,1	0,5648

## § 2. Реальность минимума в распределении долгот перигелиев короткопериодических комет

Известно, что кривая распределения долгот перигелиев короткопериодических комет имеет максимум при  $\varpi = 0^\circ - 20^\circ$  и минимум при  $\varpi = 180^\circ - 200^\circ$  [3]. Это подтверждается также новейшими данными.

Если рассматривать все 109 комет, у которых период  $P \leq 100$  лет (см. рис. 1), то мы видим, что распределение показывает минимум при  $\varpi = 180^\circ - 200^\circ$ . Распределение комет при  $i \leq 30^\circ$  дано на рис. 2. Как видим, утверждение о максимуме при  $\varpi = 0^\circ - 20^\circ$  и минимуме при  $\varpi = 180^\circ - 200^\circ$  сохраняется.

Если минимум короткопериодических комет объясняется селекцией открытия комет, то можно ожидать появления такого же минимума в распределении долгопериодических комет. На рис. 3 и 4 видим, что у долгопериодических комет в распределении  $\varpi$  минимум при  $\varpi = 180^\circ$  не наблюдается. Следовательно, по нашему мнению, у короткопериодических комет минимум при  $\varpi = 180^\circ$  реален.

### Л и т е р а т у р а

1. Schulhof L. Bull. Astr., 1891, VIII pp. 147, 191, 225.
2. Weston H.A. On the origin of comets. "American Journal of Science", 1878, III, v. XVI, p. 175.
3. Штейнс К.А. Распределение комет группы Кипитера III. "Астрономический журнал", 1962, т. 38, вып. 5, с. 915.

4. Радзиевский В.В., Томанов В.П. Новые данные в пользу межзвездного происхождения комет. — "Астрон. вестник", 1973, т. 7, № 2, с. 73.
5. Томанов В.П. Новые статистические закономерности в системе долгопериодических комет. — "Астрон. вестник", 1973, т. 7, № 32, с. 83.
6. Всехсвятский С.К. Физические характеристики комет. М., Физматгиз, 1958.
7. Всехсвятский С.К. Физические характеристики комет наблюдавшихся в 1954 - 1960 гг. М., "Наука", 1966.
8. Всехсвятский С.К. Кометы 1961 - 1965 гг. М., "Наука", 1967.
9. Всехсвятский С.К., Ильчикина Н.И. Физические характеристики комет 1965 - 1970 гг. М., "Наука", 1974.
10. Кометный циркуляр. 1971-1976 гг., № 117 - Б 193.

### Р е з ю м е

И. А. Р е в и н а

#### ВЛИЯНИЕ СЕЛЕКЦИИ ОТКРЫТИЯ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОМЕТ

Статистика элементов орбит комет искажена условиями их открытия. В статье анализируются два вывода сделанные на основе статистики без учета селекции открытия, а именно концентрация перигелиев в некоторой области как короткопериодических, так и долгопериодических комет. Удалось установить связь эффекта Опенгейма-Витковского с селекцией открытий комет, а также то, что у короткопериодических комет минимум при  $\varpi = 180^\circ$  реален.

Таблиц - 1, иллюстр. - 4, библиогр. - 9 назв.

K o r s e v i l k u s

I. Revina

#### ATKLĀŠANAS SELEKCIJAS IETEKME KOMĒTU SADALĪJUMĀ

Kometu orbitu elementu statistika ir izkropļota ar to atklāšanas nosacījumiem. Rakstā tiek analizēti divi soci-

nājumā, kas izdarīti uz statistikas pamati bez atklāšanas selekcijs ievērošanas, konkrēti perihēliju koncentrācija kaut kādā apgabalā kā īsperioda, tā arī garperioda komētām. Bija iespējams konstatēt Oppenheima-Vitkovska efekta sakaru ar komētu atklāšanas selekciju, kā arī to, ka īsperioda komētās minimums pie  $\pi = 180^\circ$  ir reāls.

### S u m m a r y

#### I. R e v i n a

#### INFLUENCE OF THE DISCOVERY SELECTION IN THE DISTRIBUTION OF COMETS

Statistics of orbital elements of comets is being affected by conditions of their discovery. In this article two conclusions made on statistical basis without consideration of discovery selection are analysed, namely, concentration of perihelion in any area for short-periodic comets and for long-periodic ones. Connection of Oppenheim-Witkovsky effect with discovery selection of comets has been found. In the distribution of short-periodic comets the minimum near  $\pi = 180^\circ$  has been stated to be real.

УДК 521.73

К. А. Штейнс,  
И. А. Ревина  
ЛГУ им. П. Стучки

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЧТИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОРБИТ В КОМЕТНОМ ОБЛАКЕ

Изучить и вычислить возмущение со стороны звезд на движение долгопериодической конкретной кометы — практически невозможно. Это связано с тем, что трудно найти расположение звезд вокруг Солнца и вычислить данные этих звезд в то время, когда проходила эта комета. Поэтому можно только сделать теоретические выводы и анализ этого вопроса. В настоящей работе возмущения со стороны звезд на движение комет исследуются по следующей схеме: предполагается, что возмущающая звезда перемещается относительно Солнца равномерно по прямой со средней скоростью.

### § I. Постановка задачи

Нас интересуют возмущения со стороны звезд на движения комет. Чтобы решить эту задачу следует постулировать инерциальную систему координат. Будем считать, что система координат, движущаяся совместно с некоторой группой звезд, является инерциальной. Предположим также, что в окрестности Солнца воздействие остальных звезд определяет некоторую возмущающую силу  $\vec{F}_0(t)$ , не зависящую от координат точек окрестности, за исключением тех звезд, которые входят в сферу радиуса  $R$ , описанную вокруг Солнца. В таком случае имеют место уравнения движения для кометы, которые выведены для  $n$  точек с возмущающими силами  $\vec{F}_i$  [1]. Сила  $\vec{F}_0(t)$  из уравнения движения кометы автоматически исключается.

Обозначим через  $m$  и  $x, y, z$  — массу и гелиоцентрические координаты кометы, движение которой изучается. Че-

рез  $m_i$  и  $x_i, y_i, z_i$  будем обозначать <sup>77</sup> массы и координаты возмущающих звезд. Тогда уравнения движения кометы относительно Солнца будут иметь следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} f &= \frac{d^2 x}{dt^2} = -\kappa^2(1+m) \frac{x}{r^3} + F_x, \\ g &= \frac{d^2 y}{dt^2} = -\kappa^2(1+m) \frac{y}{r^3} + F_y, \\ h &= \frac{d^2 z}{dt^2} = -\kappa^2(1+m) \frac{z}{r^3} + F_z, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_i m_i \left( \frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i}{r_i^3} \right), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ r_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \quad \Delta_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Выражения для  $F_y$  и  $F_z$  имеют аналогичный вид. Суммирование распространяется на все возмущающие звезды. Эти уравнения относительно движения будем интегрировать численно по методу Рунге-Кутты четвертого порядка с начальными условиями

$$t_0 \quad \begin{cases} x_0 = r_0, & \dot{x}_0 = 0, \\ y_0 = 0, & \dot{y}_0 = c, \\ z_0 = 0, & \dot{z}_0 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Координаты звезд вычисляются по следующим формулам

$$\begin{cases} x_i^0 = R \cos \delta \cos \alpha, \\ y_i^0 = R \cos \delta \sin \alpha, \\ z_i^0 = R \sin \delta. \end{cases} \quad (4)$$

Координата  $\alpha$  равномерно распределяется в сегменте  $[0, 2\pi]$ , а значения  $\sin \delta$  равномерно распределяются в сегменте  $[-1, +1]$ . Направляющие косинусы векторов относительных скоростей строятся подобным образом, только вместо радиуса берем скорость звезды  $v$  [2]:

$$\begin{cases} \dot{x}_i^0 = v \cos \delta_i \cos \alpha_i, \\ \dot{y}_i^0 = v \cos \delta_i \sin \alpha_i, \\ \dot{z}_i^0 = v \sin \delta_i. \end{cases} \quad (5)$$

Оба распределения строятся независимо. Координаты звезд в текущем моменте определяются уравнениями

$$\begin{cases} x_i = \dot{x}_i^0 t + x_i^0, \\ y_i = \dot{y}_i^0 t + y_i^0, \\ z_i = \dot{z}_i^0 t + z_i^0. \end{cases} \quad (6)$$

При вычислениях радиус сферы  $R = 2 \text{ пс}$ . Через каждые 25000 лет запускались звезды во внутрь сферы с одинаковыми скоростями  $v = 51 \text{ км/сек.}$  [2,3]. На каждом шагу вычисления также проверялось не выходит ли звезда за пределы сферы. Те звезды, которые выходили, аннулировались и из дальнейших вычислений исключались. Вычисления производились на быстродействующей вычислительной машине. Система уравнений приводилась к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= z_1, & \frac{dz_1}{dt} &= g, \\ \frac{dz_1}{dt} &= f, & \frac{dz_2}{dt} &= z_3, \\ \frac{dy}{dt} &= z_2, & \frac{dz_3}{dt} &= h. \end{aligned} \quad (7)$$

На каждом шаге вычислялись величины: параметр орбиты  $p$ , перигельное расстояние  $q$ , большая полуось  $a$ .

## § 2. Выбор шага интегрирования

Стандартная программа для метода Рунге-Кутты имеет два способа выбора шага интегрирования. Первый - постоянный шаг - в нашем случае исключается потому, что точность при этом быстро меняется, а необходима весьма большая точность. Переменный шаг стандартной программы устанавливается следующим образом. Интегрируется с определенным шагом и вдвое меньшим. Если результаты достаточно хорошо совпадают, то первичный шаг считается приемлемым. В

некоторых случаях такая процедура не ведет к цели, т.к. первичный шаг в случае тесных сближений слишком велик. Нами разработан вариант выбора шага с учетом, что шаг зависит от расстояния между кометой и звездой или же Солнцем и звездой. Чем ближе звезда приближается к комете, тем необходим меньший шаг. Учитывая формулы (2) оцениваем шаг по выражению

$$\frac{x_i - x}{\Delta^3} \approx \frac{1}{\Delta^2}, \dots, \quad (8)$$

т.е. предполагаем, что шаг

$$h_0 = \kappa_0 \Delta^2, \quad (9)$$

где  $\kappa_0$  постоянная величина. Величину  $\kappa_0$  мы определили анализируя результаты вычислений. Нами было получено, что  $\kappa_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ , притом максимальное значение шага 1000 лет. Насколько быстро изменяется шаг, можно судить по приведенной формуле. Например, при  $\Delta = 460$  а.е. шаг получается равным 0,5 лет. Так как в сфере воздействий звезд находятся несколько звезд, то для каждой определялись величины  $\Delta$ ,  $h_0$ . С меньшим из всех  $h_0$  велось интегрирование.

### § 3. О точности интегрирования

Имеются несколько способов оценки точности результатов. Весьма надежным является способ сравнения результатов, полученных численным интегрированием с точными результатами, которые получены решая задачу аналитически. Ввиду сложности системы дифференциальных уравнений (I) упростить ее так, чтобы она стала интегрируемой и учитывала бы основные черты неупрощенной системы мы не сумели. Мы определяли точность по внутренней сходимости полученных результатов. Стандартная программа дает возможность выбирать произвольную точность, притом для каждого неизвестного свою. Параметры, указывающие на точность, не дают точности в абсолютном смысле, а только условно. Нас интересует вопрос о появлении кометы в солнечной системе, поэтому мы считали, что допускается погрешность порядка  $10^{-1}$  а.е. Сравнение результатов, полученных при помощи стандартной программы и предложенным нами методом затруд-

( $c = 199993$ ), ( $c_I = 100300$ ) Таблица I

$K$	$(x-c) \cdot 10^2$	$(y-1,8) \cdot 10^2$	$(z+1,8) \cdot 10^2$	$-x \cdot 10^7$	$-y \cdot 10^7$	$-z \cdot 10^7$	$a-c_1$	$q$	$t$
шаг интегрирования	94	6	3	11681	388	1372	48,93	10,295	41738,9
	94	6	3	11684	389	1369	40,09	10,260	41741,1
	94	6	3	11687	389	1366	49,25	10,224	41743,3
$2 \cdot 10^{-9}$	68	5	6	11966	425	1103	64,42	7,083	41957,3
	68	5	6	11969	425	1101	64,58	7,053	41959,6
	68	5	6	11972	425	1098	64,74	7,023	41961,9
	40	4	8	12236	460	819	79,62	4,473	42191,9
	40	4	8	12239	460	816	79,77	4,450	42194,5
	39	4	8	12241	461	813	79,93	4,427	42197,0
	$2 \cdot 10^{-7}$	94(0)	6(0)	3(0)	11683(0)	389(0)	1369(0)	49,07(0)	10,261(+4)
68(0)		5(0)	6(0)	11968(0)	425(0)	1101(-1)	64,53(-1)	7,060(+3)	41958,8
40(0)		4(0)	8(0)	12236(0)	460(0)	819(0)	79,62(0)	4,471(+1)	42192,0
$2 \cdot 10^{-6}$	63(0)	5(0)	6(0)	12018(-3)	432(-2)	1051(22)	67,30(0)	6,538(+2)	42000,0

Таблица 2 ( $c = 199995$ ,  $c_1 = 100200$ )

$x-c$	$y$	$z$	$-x \cdot 10^7$	$-y \cdot 10^7$	$-z \cdot 10^7$	$a-c$	$q$	$t$
0,17	2,18	-1,60	600	1131	2622	52,34	41,334	40590,0
0,10	2,17	-1,62	772	1150	2553	60,02	39,793	40670,0
0,02	2,18	-1,664	942	1168	2484	67,67	38,190	40750,0
0,15	2,17	-1,60	856	1137	2592	54,79	40,786	40616,1
0	-1	+1	0	-10	+2	+6	+52	

Таблица 3

$\alpha$ Вар.	100 000	75 000	50 000	25 000	12 500
1	477,0	511,0	259,5	15,0	36,5
2	1541,0	320,5	12,5	2,5	0,5
3	538,0	5804,0	53,0	2,0	0,5
4	2901,5	3674,5	505,5	108,0	-123,0
5	299,5	154,0	56,0	3,5	9,5
6	342,0	46,0	22,0	1,5	0,5
7	221,0	765,5	9,0	2,0	1,0
8	1260,0	809,0	243,0	7,5	0,0

нительно, т.к. при переменном шаге интегрирования значения неизвестных определяются для моментов времени, вообще говоря, отличных от моментов, для которых найдены неизвестные при помощи стандартной программы. Для приведения значений неизвестных к общим моментам мы использовали формулу с разделенными разностями, т.е.

$$y(x) = y_0 + (x-x_0)\Delta_1(x_0, x_1) + (x-x_0)(x-x_1)\Delta_2(x_0, x_1, x_2) + \dots \\ = y_0 + \prod_{k=1}^{n-1} (x-x_k) \Delta_n(x_0, x_1, \dots, x_n), \quad (10)$$

где

$$\Delta_z(x_0, x_1, \dots, x_z) = \frac{\Delta_{z-1}(x_1, x_2, \dots, x_z) - \Delta_{z-1}(x_0, x_1, \dots, x_{z-1})}{x_z - x_0}, \quad (11)$$

$$z = 2, 3, \dots$$

На основе данных, помещенных в таблицах 1 и 2, по нашему мнению можно заключить, что интегрирование с шагом  $2 \cdot 10^{-6}$  достаточно точно. В верхнем прямоугольнике (табл. 1) помещены значения, полученные с шагом  $2 \cdot 10^{-9}$ . Они использованы для определения соответствующих значений для моментов, которые даются в среднем и нижнем прямоугольниках, т.е. для сравнения с результатами, полученными с шагами  $2 \cdot 10^{-7}$  и  $2 \cdot 10^{-6}$ . К каждому значению приписана внизу разность между соответствующими результатами в соответствующем знаке. В таблице 2 в верхнем прямоугольнике помещены значения, полученные со стандартной программой, а в нижнем помещено значение и соответствующая разность между результатами, полученными с шагом согласно формуле (9) и стандартной программой. В итоге рассмотрения таблиц приходим к заключению, что точность интегрирования со стандартной программой с шагом  $2 \cdot 10^{-6}$  не меньше  $\pm 0,1$  а.е. для  $q$  и  $\rho$ .

#### § 4. Некоторые результаты вычислений

Получить подробное представление об устойчивости почти параболических орбит при гравитационных возмущениях со стороны звезд можно только при наличии огромного статистического материала машинного эксперимента. Однако, даже при наличии нескольких вариантов прохождения фиктивных

комет через сферу действия можно получить представление о том, с какими значениями больших полуосей орбиты почти параболических комет устойчивы, т.е. при каких значениях  $\alpha$  возмущения со стороны звезд в течение одного оборота вокруг Солнца не выводят перигельные расстояния за пределы сферы радиусом 25 а.е., если их начальные значения  $q_0$ . В таблице 3 помещены значения  $q$ , которые кометы имеют после 800 000 лет движения, считая от афелия, для 8 вариантов возмущающих звезд и 5 значений больших полуосей в афелиях. Возмущения со стороны звезд определялись в каждом из вариантов при тех же значениях случайных чисел. На основе значений, помещенных в таблице 3, по нашему мнению, можно сделать относительно орбит следующие заключения: большинство орбит почти параболических комет, у которых в перигелии  $\alpha = 12,500$  а.е. устойчивы (75%), а орбиты почти параболических комет с  $\alpha = 100 000$  неустойчивы. Более подробно зависимость устойчивости от значения  $\alpha$  представлена на рис. I

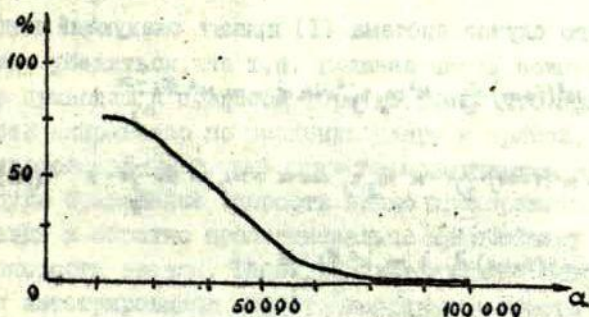


Рис. I. Устойчивость орбит комет от  $\alpha$ .

### § 5. Оценка устойчивости орбит

Н.Оорт для оценки среднего значения изменения скорости кометы при возмущении со стороны звезды применил формулу Н.Н.Русселя. Эта формула выведена в абсолютной системе координат; согласно допущению Солнце покоится. Так как Оорт хотел рассмотреть относительное движение, то он допустил ошибку, которую затем исправил. Выве-

дем соответствующую формулу на основе уравнений (I), т.е. для относительного движения в случае одной возмущающей звезды. Предположим для простоты вывода, что относительная орбита звезды (прямая)  $OA$  лежит в плоскости  $Sxy$  и параллельна оси  $x$ ,  $K$  — комета.

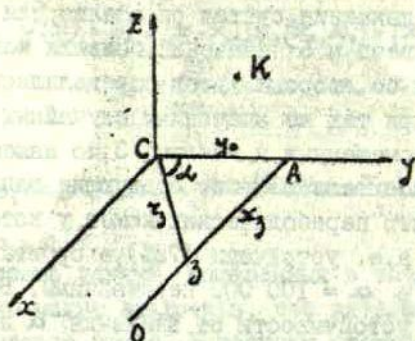


Рис. 2. Относительная орбита звезды.

Для этого случая система (I) примет следующий вид

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa^2(1+m)\frac{x}{r^3} - \kappa^2 m_3 r_3^{-2} \sin \alpha + m_3 \kappa^2 \frac{x_3 - x}{\Delta_3^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\kappa^2(1+m)\frac{y}{r^3} - \kappa^2 m_3 r_3^{-2} \cos \alpha + m_3 \kappa^2 \frac{y_0 - y}{\Delta_3^3}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\kappa^2(1+m)\frac{z}{r^3} + m_3 \kappa^2 \frac{z_3 - z}{\Delta_3^3}. \end{cases} \quad (12)$$

Между углом  $\alpha = \angle y, z$  и временем имеется следующая связь

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0(t-t_0)}{y_0}; \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{v_0}{y_0} dt, \quad (13)$$

где  $t_0$  момент, когда звезда пересекает ось  $y$ . Найдем приращения скорости кометы за этот промежуток  $t_1, t_2$ :

$$\begin{cases} \Delta v_x = -\kappa^2(1+m) \int_{t_1}^{t_2} \frac{x}{v^3} dt - m_3 \kappa^2 \int_{t_1}^{t_2} r_3^{-2} \sin \alpha dt + \int_{t_1}^{t_2} m_3 \kappa^2 \frac{x_3 - x}{\Delta_3^3} dt, \\ \Delta v_y = -\kappa^2(1+m) \int_{t_1}^{t_2} \frac{y}{v^3} dt - m_3 \kappa^2 \int_{t_1}^{t_2} r_3^{-2} \cos \alpha dt + \int_{t_1}^{t_2} m_3 \kappa^2 \frac{y_3 - y}{\Delta_3^3} dt, \\ \Delta v_z = -\kappa^2(1+m) \int_{t_1}^{t_2} \frac{z}{v^3} dt + \int_{t_1}^{t_2} m_3 \kappa^2 \frac{z_3 - z}{\Delta_3^3} dt. \end{cases} \quad (14)$$

Если пределы интегрирования во вторых членах правых частей расширить до бесконечности, то

$$\begin{cases} m_3 \kappa^2 \int_{t_1}^{t_2} r_3^{-2} \sin \alpha dt \approx \frac{m_3 \kappa^2}{y_0 v_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha d\alpha = \frac{2 m_3 \kappa^2}{y_0 v_0}, \\ m_3 \kappa^2 \int_{t_1}^{t_2} r_3^{-2} \cos \alpha dt \approx 0. \end{cases} \quad (15)$$

Можно убедиться, что т.н. главная часть возмущающей функции приводит к подобной формуле, т.е. что приращение скорости направлено по перпендикуляру к прямой, по которой с постоянной скоростью движется возмущающая звезда, а по модулю приращение скорости прямо пропорционально массе звезды и обратно пропорционально кратчайшему расстоянию и скорости звезды. Такой результат можно получить, если при интегрировании считать координаты кометы постоянными. В таблице 4 представлены три случая, когда приближенная формула достаточно точна. Из данных таблицы следует, что для применимости приближенной формулы необходимо, чтобы звезда подошла достаточно близко к комете или к Солнцу. (В таблице величина  $D$ .)

Н. Оорт, а после К. А. Штейнс оценили среднее значение квадрата изменения скорости за единицу времени, осредняя по всем возможным положениям Солнца, кометы и звезды. Они получили хорошо между собой совпадающие результаты, а именно [4]

$$\Delta v^2 = 6.6 \cdot 10^{-9} \left( \frac{a.e.}{\theta} \right) \quad \text{за } 3 \cdot 10^9 \text{ лет.} \quad (16)$$

Таблица 4

$$c = \Delta v = \sqrt{\Delta \dot{x}^2 + \Delta \dot{y}^2 + \Delta \dot{z}^2}, \quad c_1 = \frac{2 m_2 k^2}{y_0 v_0}, \quad c_2 = \Delta \dot{x} \cos \alpha + \Delta \dot{y} \cos \beta + \Delta \dot{z} \cos \gamma.$$

$\Delta \dot{x} \cdot 10^7$	$\Delta \dot{y} \cdot 10^7$	$\Delta \dot{z} \cdot 10^7$	$\cos \alpha$	$\cos \beta$	$\cos \gamma$	$D$	$c \cdot 10^5$	$c_1 \cdot 10^5$	$c_2 \cdot 10^5$
-26041	51082	-5517	8,347	3,538	-5,805	6782,67	576	541	-49
9503	19138	18273	7,599	3,255	-6,896	13311,41	281	276	85
-15036	-1249	3969	2,983	-0,075	10,343	29453,17	156	124	-37

Естественно, что  $\Delta v$  по разному влияет на изменение большой полуоси орбиты кометы, на изменение перигельного расстояния, притом это влияние зависит от близости кометы к Солнцу. Рассмотрим достаточно тесно связанные с Солнцем кометы, т.е. такие, у которых  $\Delta v$  гораздо меньше  $v$ . В таком случае из формулы

$$v^2 = \kappa^2 \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (17)$$

следует

$$2v \Delta v = -\kappa^2 \Delta \frac{1}{a} \quad (18)$$

или

$$\left( \Delta \frac{1}{a} \right)^2 = \frac{4v^2 (\Delta v)^2}{\kappa^4} \quad (19)$$

Некоторую приближенную оценку получим, если в формуле (19) заменим  $\Delta v$  его средним значением. Следовательно,

$$\left( \Delta \frac{1}{a} \right)_0^2 = \frac{4 \overline{(\Delta v)^2}}{\kappa^4} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (20)$$

Значение  $\Delta \frac{1}{a}$  будем осреднять в зависимости от значения  $r$ , т.е. определим среднее значение  $\Delta \frac{1}{a}$  в единицу времени в зависимости от  $a$

$$\begin{aligned} \overline{\left( \Delta \frac{1}{a} \right)_0^2} &= \frac{4 \overline{(\Delta v)^2}}{\kappa^4 T} \int_0^T \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) dt = \\ &= \frac{4 \overline{(\Delta v)^2}}{\kappa^4 a} (4\pi - 1). \end{aligned} \quad (21)$$

Целесообразность введения величины  $\overline{\left( \Delta \frac{1}{a} \right)_0^2}$  может показать машинный эксперимент. Аналогично из формулы

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \kappa \sqrt{a(1-e^2)}, \quad (22)$$

если предположить, что  $\overline{\Delta v_c^2} = \frac{1}{3} \overline{\Delta v^2}$ , следует

$$\overline{\Delta q^2} = \frac{10\pi}{3} \Delta v^2 \frac{q a^2}{K^2} \cdot 83 \quad (23)$$

Из формулы (23) следует, что  $\overline{\Delta q^2}$  зависит от  $q$ . Следовательно, можно ожидать, что устойчивость орбит сильно зависит от  $q$ . Нами было установлено на практике, что если при движении кометы, звезды подходят близко к Солнцу или к комете, то для  $\overline{\Delta q^2}$  мы получаем хорошее совпадение. Так при одних и тех же значениях  $a$  и  $q$ , для комет с разными возмущающими звездами, мы получили

$\overline{\Delta q_1^2} = 52,12$  и  $\overline{\Delta q_2^2} = 44,86$ . В нашем примере самое близкое расстояние было вдвое больше при втором варианте, чем при первом.

### Л и т е р а т у р а

1. Субботин М.Ф. Курс небесной механики, т.2. Л-М., "ОНТИ", 1937.
2. Штейнс К.А., Залькалне И.Э., Каулиня З.П. Схема моделирования движения звезд в окрестности Солнца. "Астрономия", 1966, вып.7, с.228.
3. Штейнс К.А. Интенсивность и плотность потока звезд в окрестности Солнца. "Астрон. журн.", 1966, т.43, вып.4, с. 887.
4. Штейнс К.А., Стуре С.Я. К вопросу о диффузии комет. "Астрон. журн.", 1962, т.39, вып.3, с.506.

### Р е з ю м е

К. А. Ш т е й н с ,  
И. А. Р е в и н а

### УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЧТИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОРБИТ В КОМЕТНОМ ОБЛАКЕ

В этой работе исследуется возмущение со стороны звезд на движение комет. Уравнения движения кометы относительно Солнца численно интегрируются по методу Рунге-Кутты. Разработан новый вариант выбора шага интегрирования. Даны также некоторые результаты вычислений, а именно

зависимость устойчивости орбит от большой полуоси.

Таблиц - 4, иллюстр. - 2, библиогр. - 4 назв.

K o r s a v i l k u m s

K. Š t e i n s ,

I. R e v i n a

GANDRĪZ PARABOLISKU ORBĪTU STABILITĀTE KOMĒTU

MĀKONĪ

Sai darbē tiek pētīta zvaigzņu ietekme uz komētas kustību, komētas kustības vienādojumu attiecībā pret Sauli, skaitliski tiek integrēti pēc Runge-Kutta metodes. Dots jauns variānts integrēšanas soļš noteikšanai. Tāpat ir doti daži rēķināšanas rezultāti, konkrēti, orbītu stabilitātes atkarība no lielās pusass.

S u m m a r y

K. Š t e i n s ,

I. R e v i n a

STABILITY OF QUASI-PARABOLIC ORBITS IN THE  
COMETARY CLOUD

The article deals with the influence of stars on the motion of comets. The equations of cometary motion referred to the Sun have been integrated by method of Runge-Kutta. a new method has been derived for determination of integration steps. Some results of calculation are given, namely, dependence of orbit stability upon semimajor axis.

УДК 521.24

Л. К. Лауцениек  
ЛГУ им. П. Стучки

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЛАСТИ ПОДВИЖНОГО БАРЬЕРА  
МЕТОДОМ МИНИМИЗАЦИИ

В работах [1,2] было показано, что значения элементов орбиты ИСЗ, определяемые методами минимизации по оптическим наблюдениям из одной станции в одном прохождении, иногда весьма ненадежны, т.е. функция качества (сумма взвешенных квадратов невязок):

$$Q = \sum_{i=1}^n \beta_i (\Delta q_i)^2, \quad (1)$$

где  $\Delta q_i$  - невязки,  $\beta_i$  - весовые коэффициенты,  $n$  - число наблюдений, достигает своего минимального значения, близкого к нулю, при множестве значений элементов орбиты. Эксперименты показали, что очень часто один из элементов орбиты, например, большая полуось, определяется недостаточно надежно; другие элементы орбиты можно рассматривать как некоторые функции большой полуоси.

В работе [3] дан анализ условных уравнений для элементов круговой орбиты в предположении неподвижной Земли и приведена методика построения однопараметрического подвижного барьера для точек сближения той же самой станции и ИСЗ в моменты достаточно удаленные от моментов наблюдений (до 2 - 3 суток). Правильность этой методики подтвердилась множеством экспериментов с реальными наблюдениями.

Вообще, будем называть подвижный барьер однопараметрическим, если он определяется значениями только одного ненадежного элемента орбиты, а значения других элементов - как его функции; если подвижный барьер определяется значениями нескольких ненадежных элементов орбиты - многопараметричес-

ким (например, двухпараметрическим, трехпараметрическим и т.д.). Множество элементов орбиты, при которых функция качества  $Q$  принимает близкие к нулю значения, назовем областью элементов (или параметров) подвижного барьера, соответственно, однопараметрической, двухпараметрической и т.д.

Было также отмечено, что несмотря на универсальность применения, метод минимизации иногда требует сравнительно больше машинного времени, чем некоторые классические методы определения элементов орбиты, как, например, метод Лапласа, метод Гаусса, метод дифференциального улучшения. Поэтому, в случаях, когда значения элементов орбиты из наблюдений определяются хорошо одним из упомянутых классических методов, следует непременно его применить.

В настоящей работе приводится простой алгоритм определения элементов орбиты по многим наблюдениям (некоторая модификация метода Лапласа). Делается попытка объяснить причины возникновения зависимости элементов, а также практически удобная схема построения области элементов подвижного барьера.

### § 1. Модификация метода Лапласа (для определения элементов орбиты по наблюдениям в случаях $n \geq 3$ )

Пусть в моменты времени  $t_i$  даны  $\alpha_i$  — прямые восхождения и  $\delta_i$  — склонения, где  $i = 1, 2, \dots, n$ , и  $n \geq 3$  — общее количество наблюдений. Можем считать, что в моменты наблюдений  $t_i$  известны также азимут  $A_i$  и высота  $h_i$  (соответственно зенитное расстояние  $\psi_i$ ), так как переход от положения в экваториальной системе координат к положению в горизонтальной системе координат осуществляется без затруднений [4, 12].

Единичные векторы направления на ИСЗ  $\vec{r}_i(\lambda_i, \mu_i, \nu_i)$  в топоцентрической экваториальной системе координат вычисляются по формулам:  $\vec{r}_i = (\cos \delta_i \cos \alpha_i, \cos \delta_i \sin \alpha_i, \sin \delta_i)$ .

Пусть выбран некоторый момент времени  $t_n$ , где  $N$  целесообразно выбрать близкое к среднему, т.е.  $N = \left[ \frac{n}{2} \right] + 1$ , и вы-

числены разности  $\tau_{i\bar{N}} = t_i - t_{\bar{N}}$ . С помощью формулы

$$\vec{L}_i = \vec{L}_{\bar{N}} + \tau_{i\bar{N}} \vec{L}'_{\bar{N}} + \frac{1}{2} \tau_{i\bar{N}}^2 \vec{L}''_{\bar{N}} + \dots + \frac{1}{\kappa!} \tau_{i\bar{N}}^{\kappa} \vec{L}^{(\kappa)}_{\bar{N}} \quad (2)$$

или применением интерполяционной формулы Лагранжа [II]:

$$\vec{L}_{\bar{N}} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i \frac{\prod_{\kappa \neq i} (t_{\bar{N}} - t_{\kappa})}{\prod_{\kappa \neq i} (t_i - t_{\kappa})} \quad (3)$$

можно в момент времени  $t_{\bar{N}}$  получить выравненные значения как вектора  $\vec{L}$ , так и их производных  $\vec{L}'$  и  $\vec{L}''$ . Рекомендуется в формуле (2) выбирать  $\kappa = 4$  (или  $\kappa = 5$ ) [6].

Пусть выбрано некоторое значение для топоцентрического расстояния  $\varrho = \varrho_{\bar{N}}^{(0)}$ . Тогда по формулам

$$r_{\bar{N}}^{(0)2} = R_{\bar{N}}^2 + \varrho_{\bar{N}}^{(0)2} + 2R_{\bar{N}} \varrho_{\bar{N}}^{(0)} \cos \psi_{\bar{N}}, \quad \vec{r}_{\bar{N}}^{(0)} = \varrho_{\bar{N}}^{(0)} \vec{L}_{\bar{N}} + \vec{R}_{\bar{N}} \quad (4)$$

вычисляются геоцентрический радиус-вектор  $\vec{r}_{\bar{N}}(x^{\circ}, y^{\circ}, z^{\circ})$  и геоцентрическое расстояние  $r_{\bar{N}}$  до ИСЗ. Приступим к уточнению значения топоцентрического расстояния до ИСЗ.

Решением системы [4, 5, 6]

$$\vec{L}_{\bar{N}}'' \varrho_{\bar{N}} + 2\vec{L}'_{\bar{N}} \varrho'_{\bar{N}} + \vec{L}_{\bar{N}} \varrho''_{\bar{N}} = - \left( \frac{\vec{r}_{\bar{N}}^{(\kappa)}}{r_{\bar{N}}^{(\kappa)3}} + \vec{R}_{\bar{N}} \right) \quad (5)$$

(если значение определителя этой системы не равно и не близко к нулю) будут значения  $\varrho_{\bar{N}}^{(\kappa+1)}$ ,  $\varrho'_{\bar{N}}^{(\kappa+1)}$ ,  $\varrho''_{\bar{N}}^{(\kappa+1)}$ . Если при этом оказывается, что  $\Delta \varrho_{\bar{N}}^{(\kappa)} = |\varrho_{\bar{N}}^{(\kappa)} - \varrho_{\bar{N}}^{(\kappa+1)}| < \varepsilon_{\varrho}$ , то по формулам

$$\vec{r}_{\bar{N}}^{(\kappa+1)} = \varrho_{\bar{N}}^{(\kappa+1)} \vec{L}_{\bar{N}} + \vec{R}_{\bar{N}}, \quad \vec{r}'_{\bar{N}}^{(\kappa+1)} = \varrho'_{\bar{N}}^{(\kappa+1)} \vec{L}_{\bar{N}} + \varrho_{\bar{N}}^{(\kappa+1)} \vec{L}'_{\bar{N}} + \vec{R}'_{\bar{N}} \quad (6)$$

вычисляются  $\vec{r}_{\bar{N}}$ ,  $\vec{r}'_{\bar{N}}$  (при необходимости можно вычислить кеплеровы элементы), и можем считать задачу решенной. В противном случае, если  $\Delta \varrho_{\bar{N}}^{(\kappa)} > \varepsilon_{\varrho}$ , снова вычисляем  $r_{\bar{N}}$  и  $\vec{r}_{\bar{N}}$  по формулам

$$r_{\bar{N}}^{(\kappa+1)2} = R_{\bar{N}}^2 + \varrho_{\bar{N}}^{(\kappa+1)2} + 2R_{\bar{N}} \varrho_{\bar{N}}^{(\kappa+1)} \cos \psi_{\bar{N}}, \quad \vec{r}_{\bar{N}}^{(\kappa+1)} = \varrho_{\bar{N}}^{(\kappa+1)} \vec{L}_{\bar{N}} + \vec{R}_{\bar{N}} \quad (4')$$

и возвращаемся к решению системы (5) с новой правой частью. Процесс продолжаем до тех пор, пока  $\Delta \varrho_{\bar{N}}^{(\kappa)}$  не станет меньше некоторого заданного малого значения  $\varepsilon_{\varrho}$ .

Для нахождения элементов орбиты по многим наблюдениям можно рекомендовать также метод, приведенный в работе [7].

## § 2. Параметризация в особых случаях

Дифференцирование соотношения  $\vec{r} = \varrho \vec{L} + \vec{R}$  приводит к соотношениям

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\varrho} \vec{L} + \varrho \dot{\vec{L}} + \dot{\vec{R}}, \quad (7)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\varrho} \vec{L} + 2\dot{\varrho} \dot{\vec{L}} + \varrho \ddot{\vec{L}} + \ddot{\vec{R}}. \quad (8)$$

Очевидно, если были бы известны значения топоцентрического расстояния  $\varrho$  и радиальной скорости  $\dot{\varrho}$ , то элементы орбиты определялись бы непосредственно. Поэтому, например, в методе Лапласа, составляются уравнения (основные) относительно  $\varrho$ ,  $\dot{\varrho}$  и  $\ddot{\varrho}$  при решении, которых получаются их значения.

Подстановка основного уравнения движения (невозмущенного  $\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$ ) в уравнение (8) приводит после очевидных преобразований к уравнению

$$\ddot{\varrho} \vec{L} + 2\dot{\varrho} \dot{\vec{L}} + \varrho \ddot{\vec{L}} + \ddot{\vec{R}} = -\mu \frac{\varrho \vec{L} + \vec{R}}{r^3}. \quad (9)$$

Если последнее уравнение (9) скалярно умножить на вектор  $\vec{L} \times \dot{\vec{L}}$  [8], то получается уравнение

$$(\vec{L} \dot{\vec{L}} \ddot{\vec{L}}) \varrho + (\vec{L} \dot{\vec{L}} \ddot{\vec{R}}) = -\frac{\mu}{r^3} (\vec{L} \dot{\vec{L}} \vec{R}), \quad (10)$$

которое совместно с уравнением

$$r^2 = \varrho^2 + 2(\vec{R} \vec{L}) \varrho + \vec{R}^2 \quad (11)$$

определяет значение топоцентрического расстояния  $\varrho$ . Система уравнений (10, 11) относительно  $\varrho$  может быть решена итерационными способами или другими методами [6, 9]. Умножение уравнения (9) скалярно на вектор  $\dot{\vec{L}}$  приводит к уравнению

$$2(\dot{\vec{L}} \dot{\vec{L}}) \dot{\varrho} + (\dot{\vec{L}} \ddot{\vec{L}}) \varrho + (\dot{\vec{L}} \ddot{\vec{R}}) = -\frac{\mu}{r^3} (\dot{\vec{L}} \vec{R}), \quad (12)$$

из которого определяется значение радиальной скорости  $\dot{\varrho}$  в зависимости от топоцентрического расстояния  $\varrho$ :

$$\dot{\varphi} = - \frac{\frac{\mu}{r^3} (\dot{\vec{L}} \vec{R}) + (\dot{\vec{L}} \ddot{\vec{R}}) + (\dot{\vec{L}} \dot{\vec{L}}) \varphi}{2 (\dot{\vec{L}} \dot{\vec{L}})} \quad (12)$$

Очевидно, значения  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  определяются уверенно, если определитель  $(\dot{\vec{L}} \dot{\vec{L}}) \neq 0$ .

В особых случаях, когда значения  $\varphi$  или  $\dot{\varphi}$  (или оба) определяются ненадежно, можно говорить соответственно об однопараметрической или двухпараметрической зависимости элементов орбиты (как параметров  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$ ).

Если ввести единичные векторы вдоль и поперек наблюдаемой трассы ИСЗ [10], то можно величины  $\ddot{G}$  и  $\ddot{g}$ , характеризующие ускорения соответственно вдоль и поперек трассы, определить по формулам (см. рис. I):

$$\ddot{G} = (\ddot{\vec{L}} \cdot \frac{\dot{\vec{L}}}{|\dot{\vec{L}}|}), \quad \ddot{g} = (\ddot{\vec{L}} \cdot \frac{\dot{\vec{L}} \times \vec{L}}{|\dot{\vec{L}}|}). \quad (13)$$

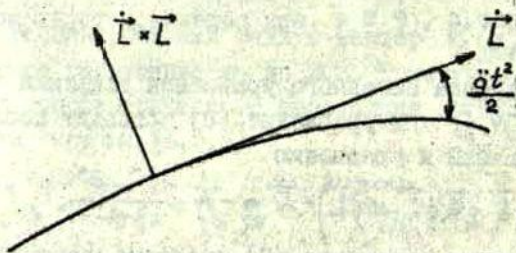


Рис. I.

С учетом последних соотношений (13) значения  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  могут быть вычислены по формулам:

$$\varphi = \frac{\frac{\mu}{r^3} (\dot{\vec{L}} \dot{\vec{R}}) + (\dot{\vec{L}} \ddot{\vec{R}})}{\ddot{g} |\dot{\vec{L}}|}, \quad (14)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\frac{\mu}{r^3} (\dot{\vec{L}} \vec{R}) + (\dot{\vec{L}} \ddot{\vec{R}}) + \ddot{G} |\dot{\vec{L}}| \varphi}{2 (\dot{\vec{L}} \dot{\vec{L}})}, \quad (15)$$

$$r^2 = \varphi^2 + 2 (\dot{\vec{L}} \vec{R}) \varphi + R^2, \quad (r^2 = \varphi^2 + 2 R \varphi \sinh + R^2),$$

т.е. формулы (14, 15) дают связь параметров  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  с параметрами видимой орбиты  $\ddot{G}$  и  $\ddot{g}$ .

Значения  $\ddot{G}$  и  $\ddot{g}$  определяются нами по формулам (13)

исходя из аппроксимации векторов  $\vec{L}_1$  полиномами степени  $k$  ( $k \geq 2$ ). В таблице 3 приводятся вычисленные абсолютные значения величин  $\tilde{G}$  и  $\tilde{g}$  для момента  $17^h 33^m 15^s.1507$  в зависимости от интервала времени между крайними наблюдениями. Наблюдения приведены в таблице I.

Зная приближенное значение  $\varphi$  (или  $r$ ) и допустимые значения для  $\tilde{G}$  и  $\tilde{g}$  можно оценить допустимый интервал времени, когда возникает ситуация однопараметрической, соответственно, двухпараметрической области элементов подвижного барьера.

Наконец, следует отметить, что некоторая параметризация может быть получена решением уравнения [6]

$$\sin^4 \varphi = M \sin(\varphi + m) \quad (16)$$

где величины  $M$  и  $m$  определяются из наблюдений, а  $\varphi$  вычисляется по формуле

$$\varphi = R \frac{\sin(\psi + \varphi)}{\sin \varphi} \quad (17)$$

В работе [6] достаточно подробно исследуется существование решений уравнения (16). Можно ожидать, что в особых случаях (хотя исследований нет) два решения относительно  $\varphi$  могут быть близкими, а значит, с точки зрения вычислений, решение лежит в некотором интервале  $(\varphi_1, \varphi_2)$  (см. рис. 2).

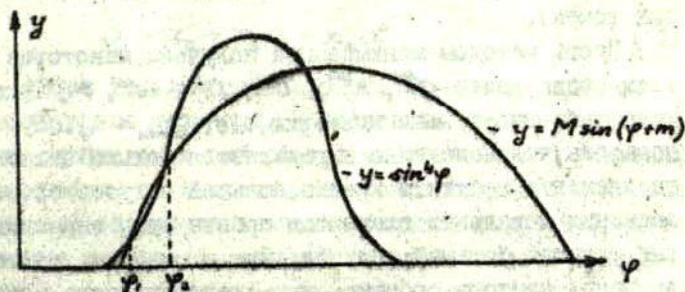


Рис. 2.

### § 3. Вычисление области элементов подвижного барьера методами минимизации

В особых случаях, когда значения одного или нескольких элементов определяются ненадежно, а значения остальных элементов зависят от них, было установлено, что значения наклона орбиты  $i$  и восходящего узла  $\Omega$  слабо зависят от значений ненадежно определяемых элементов орбиты, и практически, с точки зрения области элементов подвижного барьера, можно считать их значения постоянными. Численные эксперименты показали также, что значения геоцентрического расстояния  $r_0$  и аргумента широты орбиты  $u_0$  в эпоху определения элементов орбиты  $t_0$  меняются в сравнительно меньших пределах, чем значения большой полуоси орбиты  $a$  и средней аномалии  $M_0$  (см. табл. 6).

Методика, предложенная в работах [1, 2, 3], дает возможность определить только некоторые узловые точки (значений элементов орбиты) из области элементов подвижного барьера; значения этих точек зависят от выбора начальных значений, следовательно, могут иметь случайный характер. Далее предлагаем некоторую более эффективную методику определения области элементов подвижного барьера (тоже в смысле узловых точек).

Пусть методом минимизации получены некоторые значения элементов орбиты  $a^{(n)}$ ,  $e^{(n)}$ ,  $i^{(n)}$ ,  $\Omega^{(n)}$ ,  $\omega^{(n)}$ ,  $M_0^{(n)}$  удовлетворяющие выбранному нами критерию, т.е.  $Q_{min} < \varepsilon_q$ . Будем предполагать, что ненадежно определяется только значение одного элемента орбиты, а именно, большой полуоси орбиты  $a$ , а значения остальных элементов орбиты суть значения некоторых функций большой полуоси. При этом будем считать, что значения наклона орбиты  $i$  и восходящего узла орбиты  $\Omega$  остаются постоянными, так как они определяются достаточно уверенно [9]. Следовательно, в дальнейших вычислениях, при вышеупомянутых предположениях, мы должны найти такие значения элементов орбиты  $e$ ,  $\omega$ ,  $M_0$  (при фиксированном

значении элемента  $\alpha$ ), чтобы выполнялось условие 3б, т.е.

$$Q \leq 9Q_{\min}. \quad (18)$$

Этим мы сокращаем время счета на ЭВМ ввиду уменьшения размерности пространства (минимизация продолжается в трехмерном пространстве).

Следующее упрощение (в смысле сокращения времени счета на ЭВМ) достигается выбором следующего начального приближения в виде  $\alpha^{(0)} + \Delta\alpha$ ,  $e^{(0)}$ ,  $i^{(0)}$ ,  $\Omega^{(0)}$ ,  $\omega^{(0)}$ ,  $M_0^{(0)}$ , (а не случайным образом) и минимизацией функции качества только по элементам орбиты  $e$ ,  $\omega$ ,  $M_0$ . То же самое повторяется для начального приближения  $\alpha^{(0)} - \Delta\alpha$ ,  $e^{(0)}$ ,  $i^{(0)}$ ,  $\Omega^{(0)}$ ,  $\omega^{(0)}$ ,  $M_0^{(0)}$ .

В результате получим, три точки в шестимерном пространстве и соответствующие им значения функции качества. Если полученные значения функции качества больше девятикратно первоначального значения функции качества, т.е.

$Q(\alpha^{(0)} \pm \Delta\alpha) > 9Q_{\min}$ , то следует шаг  $\Delta\alpha$  уменьшить или прекратить вычисления, если шаг  $\Delta\alpha$  лежит в пределах требуемой точности. В противном случае возможны по крайней мере два продолжения. Во-первых, за новое приближение можно принять полученные в последнем процессе минимизации значения элементов орбиты и дать приращение только большой полуоси, т.е.  $\alpha = \alpha^{(1)} \pm \Delta\alpha$ . Во-вторых, по полученным трем точкам для каждого из элементов орбиты можно получить аппроксимирующую кривую, например, полином второй степени относительно большой полуоси  $\alpha$ :

$$\mathcal{E}_j = x_0 + x_1 \alpha + x_2 \alpha^2, \quad (19)$$

где  $\mathcal{E}_j$  - любой из элементов орбиты,  $x_k$  - коэффициенты аппроксимирующего полинома. В последнем случае следующее начальное приближение выбирается экстраполяцией значений элементов орбиты по значениям аппроксимирующего полинома в зависимости от выбора значений большой полуоси. Процесс установления интервала значений большой полуоси  $\alpha$  (минимизация в трехмерном пространстве) продолжается расширением, соответственно, сужением его до тех пор, пока не найдены для элемента  $\alpha$  (с необходимой точностью) предельные значения, для которых имеет место (18).

Для определения однопараметрической области элемен-

тов подвижного барьера, зависящего от аргумента перигейного расстояния  $\omega$ , в Астрономической обсерватории Латвийского госуниверситета с успехом применяется также метод дифференциального улучшения (работы Жагарса Ю.Х. в настоящем сборнике).

#### § 4. Численные примеры определения области элементов подвижного барьера

Для определения однопараметрической области элементов подвижного барьера мы выбрали наблюдения ИСЗ Пагеос-А ( $\alpha, \delta$ ), полученные на Рижской станции 02 марта 1971 года (табл.1), и вычисленные в ИТА АН СССР эфемериды ИСЗ Мидас-4 ( $A, h$ ) для Рижской станции на 01 октября 1973 года (табл.2), считая последние за наблюдения.

В таблицах 4,5, представлены промежуточные результаты, полученные методом минимизации при фиксированном значении большой полуоси орбиты  $\alpha$  (минимизация проводилась по пяти элементам, а именно,  $e, i, \Omega, \omega, M_0$ ; для следующего начального приближения выбирались значения предыдущего конечного результата с измененным значением большой полуоси на шаг  $|\Delta\alpha| = 0,01$ . Здесь и в дальнейшем расстояния выражены в экваториальных радиусах Земли, время - в средних солнечных сутках, угловые величины - в радианах.

Таблица 4 получена по наблюдениям ИСЗ Пагеос-А для момента времени  $17^h 33^m 15^s.1507$  соответственно для трех первых интервалов времени наблюдений, указанных в первом столбце таблицы 3. Таблица 5 получена из эфемерид ИСЗ Мидас-4 для момента времени  $17^h 47^m 54^s.0$ .

Из таблицы 4 следует, что характер зависимости значений элементов  $e, i, \Omega, \omega, M_0$  от значения большой полуоси  $\alpha$  мало меняется от выбора длины наблюдаемой дуги. Из этой таблицы видно, что характер функции качества зависит от длины наблюдаемой дуги. Если для первого варианта абсолютный минимум функции качества  $Q$  достигался при  $\alpha = 1.655$  (среднеквадратическое отклонение по одной координате около  $30^{\circ}8$ ), то для третьего варианта подобный минимум функции качества не выделялся (среднеквадратическое отклоне-

ние по одной координате меньше  $9^{\circ}1$  на всем приведенном интервале большой полуоси  $a$ ). В первом варианте абсолютный минимум сравнительно большой потому, что, во-первых, использованные наблюдения, возможно, содержат не выявленные ошибки (проверка наблюдений не проводилась), и, во-вторых, шаг по большой полуоси выбран достаточно большим ( $\Delta a = 0,01$ ). Отметим, что истинные значения элементов (полученные интерполированием данных Флитсопианской астрофизической обсерватории на выбранную эпоху определения элементов орбиты) приблизительно  $a = 1,65601$ ,  $e = 0,12706$ ,  $i = 1,49598$ ,  $\Omega = 1,25041$ ,  $\omega = 5,47044$ .

Таблица 1

## Наблюдения ИСЗ Пареос-А

№	Всемирное время	Прямое восх.	Склонение
1	17 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup> 16 <sup>s</sup> .1525	04 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> 05 <sup>s</sup> .68	07° 19' 27".94
2	24 15.1528	29 41.53	15 43 48,20
3	27 15.1509	28 21.05	29 22 30,49
4	30 15.1504	25 32.81	43 38 55,68
5	31 15.1496	24 04.07	48 24 47,19
6	33 15,1507	19 43.03	57 46 06.63
7	35 15,1486	11 57.71	66 42 37,25
8	37 15,1483	03 55 45,60	75 03 13,01
9	40 15,1576	01 47 46,04	85 40 10,32
10	44 15,1592	17 50 04,41	79 29 15,29
11	17 48 15,1602	17 17 12,91	68 36 04,41

Таблица 2

## Эфемериды ИСЗ Мидас-4

№	Всемирное время	Азимут	Высота
1	17 <sup>h</sup> 37 <sup>m</sup> 36 <sup>s</sup>	199° 06'	30° 12'
2	17 47 54	266 00	58 30
3	17 59 00	333 18	29 48

Интервал времени	$ \ddot{\xi} $	$ \ddot{\eta} $
$17^h 22^m 16^s,1525 - 17^h 48^m 15^s,1602$	6,63195	0,04120*
$17 27 15,1509 - 17 40 15,1576$	1,36553	0,00824
$17 30 15,1504 - 17 37 15,1483$	0,24416	0,00515
$17 31 15,1496 - 17 35 15,1486$	0,05685	0,00130

Таблица 4

Область элементов подвижного барьера ИСЗ Паресс-А

Вариант	$a$	$e$	$\omega$	$M_0$	$Q \cdot 10^{-6}$
1	1,585	0,13935	5,18933	1,92641	7,8396
	1,615	0,13291	5,30566	1,80815	2,7230
	1,645	0,12853	5,42793	1,68404	0,4395
	1,675	0,12623	5,55277	1,55746	0,5287
	1,705	0,12593	5,67633	1,43223	2,6049
	1,735	0,12746	5,79509	1,31191	6,3452
2	1,595	0,13553	5,23078	1,88665	0,2116
	1,625	0,13052	5,34821	1,76615	0,0774
	1,655	0,12748	5,46936	1,64213	0,0181
	1,685	0,12642	5,59081	1,51789	0,0220
	1,715	0,12714	5,70905	1,39709	0,0790
	1,745	0,12954	5,82108	1,28255	0,1809
3	1,590	0,13682	5,21441	1,90275	0,0152
	1,620	0,13144	5,32970	1,78462	0,0071
	1,650	0,12856	5,44958	1,66091	0,0094
	1,680	0,12626	5,57016	1,53941	0,0005
	1,710	0,12667	5,68858	1,41842	0,0010
	1,740	0,12856	5,80178	1,30313	0,0037

Это вполне согласуется с полученным нами результатом ( $Q = 0,2261 \cdot 10^{-6}$ ). Таким образом можно считать, что предварительные элементы орбиты в первом варианте определяются достаточно надежно.

Во втором и, особенно, в третьем вариантах, чтобы

обеспечить получение последующих наблюдений (если наблюдался неизвестный ИСЗ), мы должны строить подвижной барьер согласно методике, указанной в работах [2,3]. Для первого варианта достаточно вычислять эфемериду и по необходимости применять поиск ИСЗ вдоль вычисленной трассы на небесной сфере (сканирование).

В таблице 5 приводится область элементов подвижного барьера для ИСЗ Мидас-4. Из этой таблицы следует, что абсолютный минимум функции качества достигается при  $\alpha = 1,615$ , хотя истинное значение  $\alpha = 1,56859$ . Это объясняется тем, что использованные наблюдения содержат сравнительно большие ошибки (получены из эфемерид, которые

Таблица 5

Область элементов подвижного барьера ИСЗ Мидас-4

$\alpha$	$e$	$\omega$	$M_0$	$Q \cdot 10^{-6}$
1,525	0,03754	0,17931	4,02205	4,9588
1,555	0,03549	0,66431	3,11412	2,4084
1,585	0,04052	1,09493	2,28172	0,4165
1,615	0,05090	1,37684	1,61595	0,0061
1,645	0,06343	1,54992	1,07644	0,5755
1,675	0,07676	1,66074	0,61549	1,9689

с точностью до  $0^{\circ},1$  по азимуту и высоте и  $0^m,1$  по времени обеспечивают наблюдения на камере АФУ-75). Мы делаем вывод, что в случаях, когда элементы орбиты определяются из наблюдений, которые содержат большие (неустраняемые) ошибки, например, в случаях визуальных или полувизуальных наблюдений, целесообразно также провести вычисление области элементов подвижного барьера (табл.5).

В таблице 6, ради общности, приводятся соответствующие таблицам 4 и 5 значения величин  $r_0$ ,  $u_0$ ,  $V_0$ ,  $\cos \delta_0$ ,  $\dot{r}_0$ , вычисленные по формулам [9,13]:

$$r_0 = a(1 - e \cos E_0), \quad u_0 = \omega + \nu_0, \quad V_0 = \kappa_c \sqrt{\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}}$$

$$\cos \delta_0 = e \sin \alpha_0 / \sqrt{1 + 2e \cos \nu_0 + e^2}, \quad \dot{r}_0 = V_0 \cos \delta_0, \quad (20)$$

где

$$E_0 = M_0 + e \sin E_0, \quad \alpha_0 = 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{(1+e)/(1-e)} \cdot \operatorname{tg} E_0 / 2),$$

$$k_e = 107.08792 \text{ (рад. Земли)}^{3/2} / \text{сутки}.$$

Таблица 6

ИСЗ	$r_0$	$u_0$	$V_0$	$\cos \delta_0$	$\dot{r}_0$
Пагеос (вар. 3)	1,68557	1,07660	79,96513	0,12313	9,84588
	1,69057	1,07687	80,54643	0,12413	9,99790
	1,69540	1,07712	81,10371	0,12563	10,18882
	1,69998	1,07738	81,64256	0,12571	10,26314
	1,70442	1,07761	82,15875	0,12663	10,40359
	1,70870	1,07784	82,65580	0,12732	10,52358
Мидас-4	1,56269	4,14518	84,59901	-0,02827	-2,39129
	1,61017	3,78030	82,88120	0,00094	0,07808
	1,62834	3,43606	82,76396	0,02991	2,47559
	1,62286	3,09402	83,85601	0,05067	4,24874
	1,60085	2,74213	85,76518	0,05749	4,93090
	1,57364	2,37222	87,91035	0,04732	4,15940

В таблицах 4,5 не приведены значения наклона орбиты  $i$  и восходящего узла орбиты  $\Omega$ ; они определялись с требуемой точностью (по крайней мере для первоначальных значений элементов орбиты), т.е. менялись соответственно 1,49488 - 1,49723 и 1,24722 - 1,24741 для ИСЗ Пагеос-А и 1,66607 - 1,67107 и 2,34774 - 2,34868 для ИСЗ Мидас-4.

Сравнение таблиц 4,5 с таблицей 6 показывает, что значения геоцентрических расстояний ИСЗ  $r_0$  и аргументов широты орбиты  $u_0$  меняются в сравнительно меньших пределах, чем значения большой полуоси орбиты  $a$  и средней аномалии  $M_0$  (соответственно  $M_0 + \omega$ ).

Покажем, как меняются значения аргумента широты  $u_0$  в

зависимости от соответствующих значений геоцентрического расстояния до ИСЗ  $r_0$  в момент определения элементов орбиты  $t_0$  при постоянных значениях наклона орбиты  $i$  и восходящего узла орбиты  $\Omega$ . Из рис. 3, где  $C$  - центр Земли,  $E$  - положение наблюдателя,  $S$  - положение ИСЗ, следует (см., например, [9]), что

$$\varphi_0 = \sqrt{r_0^2 - R^2 \sin^2 \psi_0} - R \cos \psi_0. \quad (21)$$

Следует также [6], что

$$\sin \sigma_0 = \varphi_0 \sin \psi_0 / r_0. \quad (22)$$

Подстановка (21) в (22) дает

$$\sin \sigma_0 = \frac{(\sqrt{r_0^2 - R^2 \sin^2 \psi_0} - R \cos \psi_0) \sin \psi_0}{r_0}, \quad (23)$$

т.е. зависимость значений геоцентрического угла  $\sigma_0$  от

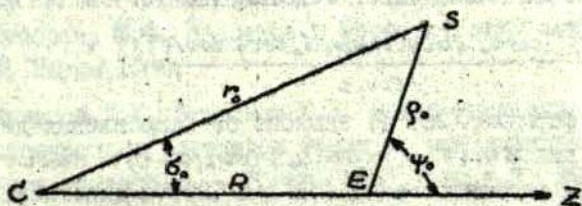


Рис. 3.

значений геоцентрического расстояния  $r_0$ , так как значения остальных величин определяются из наблюдений. Введением обозначения  $G_0 = R/r_0$  (23) можно переписать в виде

$$\sin \sigma_0 = (\sqrt{1 - G_0^2 \sin^2 \psi_0} - G_0 \cos \psi_0) \cdot \sin \psi_0. \quad (23')$$

Из рис. 4, где  $E'$ ,  $S'$  - точки на сфере, соответствующие точкам  $E$ ,  $S$  из рис. 3,  $N$  - направление на северный полюс, следует (из сферического прямоугольного треугольника  $P\Omega'S'$ ), что

$$\sin u_0 = \sin \psi_0 / \sin i. \quad (24)$$

Сферический угол  $\psi_0$  (широта подспутниковой точки) определяется по формуле (из сферического треугольника  $S'E'N$ )

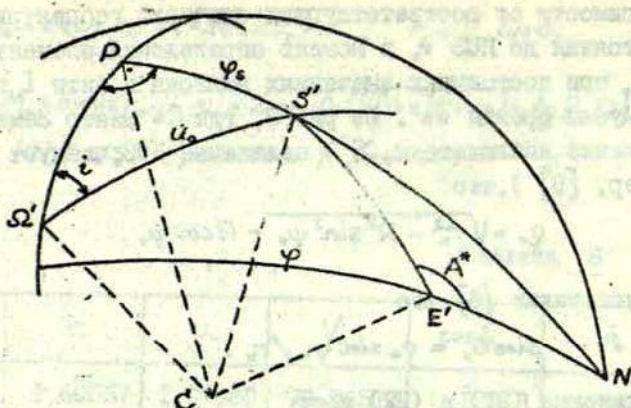


Рис. 4.

$$\sin \psi_0 = \cos b_0 \sin \varphi + \sin b_0 \cos \varphi \cos A^*, \quad (25)$$

где угол  $A^*$  определяется из наблюдений,  $\varphi$  — геоцентрическая широта места наблюдений. Подстановка (25) в (24) дает

$$\sin u_0 = \frac{\cos b_0 \sin \varphi + \sin b_0 \cos \varphi \cos A^*}{\sin i}. \quad (26)$$

Отметим, что формула (26) не зависит от направления движения ИСЗ, так как  $\sin(\pi - u_0) = \sin u_0$ ,  $\sin(\pi - i) = \sin i$ . Формулы (23), соответственно (23'), и (26) и дают искомую зависимость значений аргумента широты  $u_0$  от значений геоцентрического расстояния до ИСЗ  $r_0$ . Очевидно, из формул (26) и (24) при условии  $\psi_0 = b_0 = 0$  следует  $\sin u_0 = \sin \varphi / \sin i$ . Следовательно, значение  $u_0$  не зависит от значения  $r_0$  и является постоянным, если элементы орбиты определяются для момента  $t_0$ , когда ИСЗ находится в зените наблюдателя. Это подтверждается таблицей 6, (Пагеос-А, вар. 3) так как она получена для момента, когда высота ИСЗ над горизонтом наблюдателя составляет больше  $80^\circ$ .

#### Л и т е р а т у р а

1. Лауцениекс Л.К. Вычисление первоначальных орбит ИСЗ методами минимизации. — "Уч. записки Латв. ИУ", 1970, т. 137, вып. 5, с. 39.

1. Лауцениек Л.К. Определение орбит и прогнозирование появлений искусственных спутников Земли. Диссертация, Рига, ЛПУ им. П. Стучки, 1974.
3. Штейно К.А., Лауцениек Л.К. О точности определения орбит ИСЗ. - "Уч. записки Латв. ИУ", 1973, т. 175, вып. 8, с. 3.
4. Эскобал П. Методы определения орбит. М. "Мир", 1970.
5. Kehrstedt A. Die elementaren Grundlagen der Bahnbestimmung. - "Ann. Acad. scient. Fennicae", 1961, ser. A, III, № 61, S. 97.
6. Мультон Ф.Р. Введение в небесную механику. М.-Л., ОНТИ, 1935.
7. Батраков Ю.В. Определение первоначальных орбит искусственных спутников из наблюдений, моменты которых известны приближенно. - "Бюлл. ИТА", 1960, т. 7, с. 570.
8. Herget P. The Computation of Orbits. Published privately by the author, Cincinnati, 1948.
9. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М., "Наука", 1968.
10. Куликов Д.К., Батраков Ю.В. Метод улучшения орбит искусственных спутников Земли по наблюдениям с приближенными моментами. - "Бюлл. ИТА", 1960, т. 7, № 7(90), с. 554.
11. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М., Физматгиз, 1963.
12. Казанов С.А. Курс сферической астрономии. М.-Л., ОНТИ, 1935.
13. Дубошин Г.Н. Небесная механика, основные задачи и методы. М., "Наука", 1968.

Л. К. Лауцёник

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЛАСТИ ПОДВИЖНОГО БАРЬЕРА  
МЕТОДОМ МИНИМИЗАЦИИ

В настоящей статье развивается метод подвижного барьера для поиска ИСЗ, орбитальные элементы которых определены ненадежно. Приводится метод итерации по топоцентрическим расстояниям для определения элементов орбиты ИСЗ по оптическим наблюдениям (модификация метода Лапласа). Показывается, что по наблюдениям из одной станции в одном прохождении наименее надежно могут определяться значения топоцентрического расстояния ( $\rho$ ) и радиальной скорости ( $\dot{\rho}$ ) или ускорения вдоль ( $\ddot{\rho}$ ) и поперек ( $\ddot{\sigma}$ ) видимой трассы ИСЗ. Аппроксимацией элементов орбиты (как функций большой полуоси) полиномами установлена практическая возможность определения однопараметрической области элементов подвижного барьера методом минимизации. Численные примеры подтверждают наличие корреляции границ области элементов подвижного барьера от длины наблюденной геоцентрической дуги орбиты.

Таблиц - 9, иллюстр. - 4, библиогр. - 13 назв.

## K o r s a v i l k u m s

L. L a u c e n i k s

KUSTĪGĀS BARJERAS APĢABĻA NOTEIKŠANA

AR MINIMIZĀCIJAS METODI

Raketē dots kustīgās barjeras metodes pielietojuma iespērinājums ZMP meklēšanai, ja tās orbitas elementi noteikti neprecīzi. Aprakstīta topocentrisko attālumu iterācijas metode (Laplasa metodes modifikācija) ZMP orbitas elementu noteikšanai no optiskiem novērojumiem. Parādīts, ka no novērojumiem, kas iegūti vienā stacijā viena ceurgājiena lei-

kā, neprecīzi var tikt noteikti topocentriskais attālumš ( $\rho$ ) un radiālais ātrums ( $\dot{\rho}$ ) vai arī attiecīgi paštrināšums gar ZMP redzamo trasē ( $\ddot{\rho}$ ) un tai perpendikulārais ( $\dot{\rho}$ ). Aproximējot elementus (kā lielās pusēs funkcijas) ar polinomiem, konstatēta praktiska iespējamība kustīgās barjeras vienparametru elementu apgabala konstruēšanai ar minimizācijas metodi. Skaitliski piemēri apstiprina korelācijas starp kustīgās barjeras elementu apgabala robežam un novērotā ģeocentriskā orbītas loka garumu.

### S u m m a r y

L. L a u c e n i e k s

COMPUTATION OF THE MOBILE BARRIER AREA

BY MINIMIZATION METHOD

In this paper the mobile barrier method for search of satellite with uncertain orbital elements has been developed. The method of iterations over topocentric distances (a modified Laplace method) has been used to find the orbital elements of a satellite from optical observations. From observations of a single satellite pass at a single station, the topocentric distance, radial velocity, acceleration along and across the satellites track can be deduced least precisely. The polynomial approximation of orbital elements (as functions of semi-major axis) turns out to be a practical way for computation of the single parameter area for elements of mobile barrier by minimization methods. The numerical examples show the correlation between the boundary of that area and the length of the observed geocentric arc.

УДК 521.61

Ю. Х. Жагар  
ЛГУ им. П. Стучки

## ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ ИСЗ

### § 1. Введение

Численные примеры работы [1] и ряд расчетов автора показали, что по близко расположенным угловым наблюдениям ИСЗ часто невозможно однозначно определить элементы орбиты. При использовании методов минимизации [1] в этих случаях наблюдается зависимость полученного результата от начального приближения и алгоритма минимизации. Наиболее характерным случаем является достижение минимума функции качества  $Q$  в некоторой одномерной области элементов орбиты. При использовании метода дифференциального улучшения элементов орбиты в указанных случаях [2] наблюдается уменьшение ранга матрицы нормальных уравнений. При этом, в зависимости от количества и расположения наблюдений, ранг может уменьшиться до четырех или пяти. Последнему случаю также соответствует некоторая одномерная область элементов орбиты, удовлетворяющих исходным наблюдениям.

Следовательно, неоднозначность, возникающая при определении элементов орбиты ИСЗ по близко расположенным угловым наблюдениям, свойственна не методу определения элементов, а информации, содержащейся в этих наблюдениях. Поэтому при решении других задач, например, прогнозирования движения ИСЗ, приходится отказаться от традиционных методов. Неполнота информации об элементах орбиты ИСЗ может быть отражена введением одного или нескольких параметров, принадлежащих некоторым интервалам изменений.

Введение параметра в небесной механике нашло применение в многих методах определения орбит [3]. Так в ме-

тоде Гаусса придается некоторое приближенное значение отношению площадей сектора и треугольника. В ходе решения задачи это отношение итеративно уточняется и приближается к значению истинной величины. Однако если наблюдения содержат недостаточное количество информации, например, вследствие неустранимых ошибок наблюдений, то определить значение выбранного параметра однозначно нельзя. Именно такая ситуация возникает при определении элементов орбиты ИСЗ по близко расположенным угловым наблюдениям.

## § 2. Определение эллипса по малой дуге

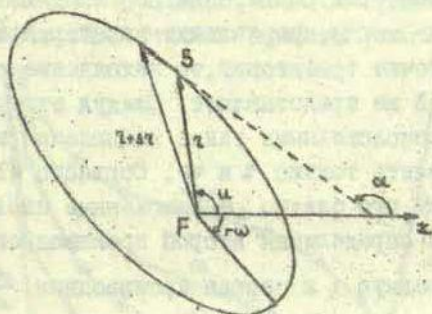


Рис. 1. Эллипс

Рассмотрим эллипс в полярной системе координат с центром в одном из фокусов. Для однозначного определения эллипса в этой системе координат необходимо знание трех постоянных, например,  $p$  — фокального параметра,  $e$  — эксцентриситета,  $\omega$  — угла поворота. Эти величины можно вычислить, если для фиксированной точки  $S$  известны

$$\begin{aligned}
 r &= r(u), \\
 \alpha &= \frac{\pi}{2} + u - \operatorname{arctg} \frac{1}{r} \frac{dr}{du}, \\
 \kappa &= \frac{r^2 + 2 \left( \frac{dr}{du} \right)^2 - r \frac{d^2 r}{du^2}}{\left[ r^2 + \left( \frac{dr}{du} \right)^2 \right]^{3/2}},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $r$  — радиус,  $\alpha$  — направление касательной,  $\kappa$  — кривизна в точке  $S$ . Систему (I) можно решить относительно  $r$ ,  $\frac{dr}{du}$ ,  $\frac{d^2 r}{du^2}$  и приравнявая значению радиуса

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(u - \omega)} \tag{2}$$

и его производным, найти искомые постоянные  $p$ ,  $e$ ,  $\omega$ .

Таким образом, если наблюдения ИСЗ дадут возможность определить радиус-вектор, направление касательной и кривизну в некоторой точке траектории, то нахождение элементов орбиты трудностей не представляет. Следуя этому, будем называть близко расположенными такие наблюдения, которые позволяют определить только  $r$  и  $\alpha$ . Согласно (I), это эквивалентно тому, что близко расположенные наблюдения недостаточны для определения второй производной  $\frac{d^2 r}{du^2}$ , в то время как радиус  $r$  и первая производная  $\frac{dr}{du}$  определяются уверенно.

Приведенные рассуждения справедливы для любых орбит конического сечения, а также и в пространственном случае, т.к. всегда можно заранее перейти к орбитальной системе координат

### § 3. Результаты численных расчетов

Приведенные выше соображения были положены в основу анализа численных результатов улучшения элементов орбиты ИСЗ. По фотографическим наблюдениям, полученным на камерах АФУ-75, уточнялись элементы орбит четырех искусственных спутников Земли

- а) *Midas-4* (610280I),  
 б) *Geos-A* (650890I),  
 в) *Geos-B* (680020I),  
 г) *Pageos* (660560I).

Во всех четырех случаях использовался набор близко расположенных наблюдений и были получены качественно однотипные результаты. Поэтому ограничимся анализом только одного случая — использования наблюдений ИСЗ *Midas-4*, полученных на станции наблюдений Хелуан (APE) в 1971 году. Набор наблюдений охватил примерно  $10^\circ$  геоцентрической дуги. В качестве элементов орбиты были выбраны величины  $a, e, i, \Omega, \omega$  и  $u_0 = \omega + \nu_0$  (см. [3], [4]). Улучшение всех шести элементов орбиты оказалось невозможным и в качестве параметра было избрано  $\omega$  — расстояние перигентра, т.е. придавая  $\omega$  различные значения, улучшались другие элементы орбиты. Результаты расчетов приведены в таблице I, согласно которой построены графики рис. 2.

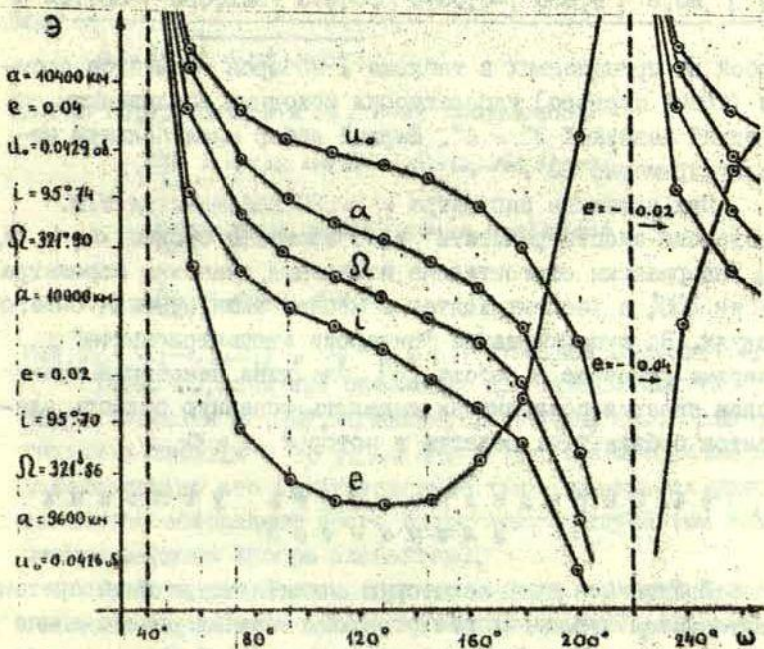


Рис. 2. Экспериментальные кривые

№	$\omega$ (град.)	$\alpha$ (мм)	$e$	$i$ (град.)	$\Omega$ (град.)	$u_0$ (град.)
I	38,6	13,344	0,2197	95,926	322,116	36,089
2	56,6	10,404	0,0278	95,743	321,924	35,894
3	74,6	10,238	0,0157	95,728	321,908	35,782
4	92,6	10,168	0,0117	95,721	321,901	35,772
5	110,6	10,124	0,0102	95,717	321,897	35,766
6	128,6	10,087	0,0098	95,714	321,893	35,761
7	146,6	10,050	0,0105	95,710	321,890	35,756
8	164,6	10,002	0,0125	95,705	321,885	35,749
9	182,6	9,922	0,0178	95,697	321,877	35,737
10	200,6	9,690	0,0370	95,673	321,852	35,702
II	236,6	10,404	-0,0278	95,743	321,924	35,804
I2	272,6	10,169	-0,0117	95,722	321,901	35,772
I3	308,6	10,087	-0,0098	95,714	321,893	35,761
I4	344,6	10,002	-0,0126	95,705	321,885	35,749
I5	20,6	9,690	-0,0370	95,673	321,852	35,702

Любой из приведенных в таблице I наборов элементов орбиты (кроме первого) удовлетворял исходным наблюдениям со средней невязкой 3" - 4". Первый набор имел большую невязку, примерно 10".

При значении параметра  $\omega \approx 220^\circ$  наблюдается т.н. "инверсия эксцентриситета", т.е. элементы орбиты  $\alpha$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $u_0$  инвариантны относительно изменения значения параметра  $\omega$  на  $180^\circ$ , а эксцентриситет  $e$  меняет знак, неменяя своего модуля. На существование "инверсии эксцентриситета" впервые указано в работе [5], где дана некоторая трактовка явления, позволяющая выделить основную область элементов орбиты, т.е. область в которой  $e > 0$ .

#### § 4. Определяемость угловых элементов

Попытаемся дать некоторую аналитическую интерпретацию результатам численных расчетов, основываясь на сделанные выше предположения. Допустим, что в некоторый момент времени  $t_0$  известны постоянные вектора

$$\vec{r}_0 \quad \text{и} \quad \vec{r}'_0 = \left. \frac{d\vec{r}}{du} \right|_{t=t_0} \quad (3)$$

Для определения угловых элементов орбиты  $i$ ,  $\Omega$ ,  $u_0$  достаточно знать только направления этих векторов. Действительно, вычислив векторное произведение

$$\vec{c} = \left[ \frac{\vec{r}_0}{|\vec{r}_0|} \times \frac{\vec{r}'_0}{|\vec{r}'_0|} \right]$$

из системы

$$\frac{c_x}{c} = \sin \Omega \sin i,$$

$$\frac{c_y}{c} = -\cos \Omega \sin i,$$

$$\frac{c_z}{c} = \cos i,$$

где

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$$

легко определить  $i$  и  $\Omega$ , а из соотношений

$$\frac{x_0}{r_0} = \cos u_0 \cos \Omega - \sin u_0 \sin \Omega \cos i,$$

$$\frac{y_0}{r_0} = \cos u_0 \sin \Omega + \sin u_0 \cos \Omega \cos i,$$

$$\frac{z_0}{r_0} = \sin u_0 \sin i,$$

где  $\vec{r}_0 = r_0 \{x_0, y_0, z_0\}$ ,  $r_0 = |\vec{r}_0|$ , угловой элемент  $u_0$ .

Таким образом при сделанных предположениях (3) угловые элементы  $i$ ,  $\Omega$ ,  $u_0$  являются константами. Если обратиться к таблице I, то видно, что в приведенном примере действительно это приблизительно так — изменения угловых элементов составляют всего сотые доли градуса (за исключением первого набора элементов).

Графики рис. 2 позволяют установить простой, более точный эмпирический закон изменения угловых элементов, учитывающий зависимость их от значения большой полуоси  $a$ .

$$\begin{aligned} i &= i_0 + c_i(a - a_0), \\ \Omega &= \Omega_0 + c_\Omega(a - a_0), \\ u_0 &= u_0^{(0)} + c_u(a - a_0), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a_0, i_0, \Omega_0, u_0^{(0)}, c_i, c_\Omega, c_u$  — константы, а большая полуось  $a$  рассматривается как функция некоторого параметра. Формулы (4) представляют собой как бы следующее приближение параметризации.

### § 5. Параметрическая зависимость эксцентриситета

Для определения нулевых элементов орбиты  $e$  и  $a$  воспользуемся модулями векторов (3). Обозначим

$$\begin{aligned} r_0 &= |\vec{r}_0|, \\ r'_0 &= \frac{d|\vec{r}_0|}{du} = \sqrt{\left(\frac{dr}{du}\right)_0^2 - r_0^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Приравнявая величины  $r_0$  и  $r'_0$  значению радиуса (2) и его производной имеем

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{p}{1 + e \cos \alpha_0}, \\ r'_0 &= \frac{r_0^2 e \sin \alpha_0}{p}, \end{aligned} \quad (6)$$

где введен новый параметр

$$\alpha_0 = u_0 - \omega = u|_{t=t_0} - \omega. \quad (7)$$

Параметр  $\alpha_0$  в данном приближении является линейной функцией старого параметра  $u$ , однако замена параметров (7) облегчает использование формул (4) для учета изменений угловых элементов. Исключив  $p$  из соотношений (6) имеем формулу изменения эксцентриситета  $e$  в зависимости от параметра  $\alpha_0$ :

$$e = \frac{1}{e_0} \frac{1}{\sin \alpha_0 - \cos \alpha_0}, \quad (8)$$

где

$$e_0 = \frac{r'_0}{r_0}.$$

Для орбит, близких к круговым

$$|e_0| = \left| \frac{r'_0}{r_0} \right| \ll 1$$

вместо (8) имеем приближенную формулу

$$e \approx \frac{e_0}{\sin v_0}, \quad (8')$$

справедливость которой нарушается в окрестности тех значений параметра  $v_0$ , для которых

$$\frac{1}{e_0} \sin v_0 - \cos v_0 = 0. \quad (9)$$

Согласно (8) и (9) при значениях параметра

$$v_0^{(k)} = \arctg e_0 + k\pi$$

функция  $e(v_0)$  терпит разрыв и наблюдается "инверсия эксцентриситета". Из условия экстремума

$$\frac{de}{dv_0} = \frac{\frac{1}{e_0} \cos v_0 + \sin v_0}{\left(\frac{1}{e_0} \sin v_0 - \cos v_0\right)^2} = 0$$

находим минимумы и максимумы функции  $e(v_0)$  при

$$v_0^{(m)} = \frac{\pi}{2} + \arctg e_0 + k\pi = v_0^{(k)} + \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

Отличая два случая,  $e_0 > 0$  (рис. 3) и  $e_0 < 0$  (рис. 4) можем представить себе вид функции  $e(v_0)$ . Приведенные графики качественно хорошо представляют результаты численных расчетов (рис. 2), в том числе явление "инверсии эксцентриситета".

## § 6. Параметрические зависимости $p(v_0)$ и $a(v_0)$

Формулы (6) дают возможность исключить также эксцентриситет и получить зависимость  $p(v_0)$ . Однако это приводит к громоздким и неудобным выражениям, поэтому ограничимся соотношением

$$p = p_0 (1 + e \cos v_0), \quad (11)$$

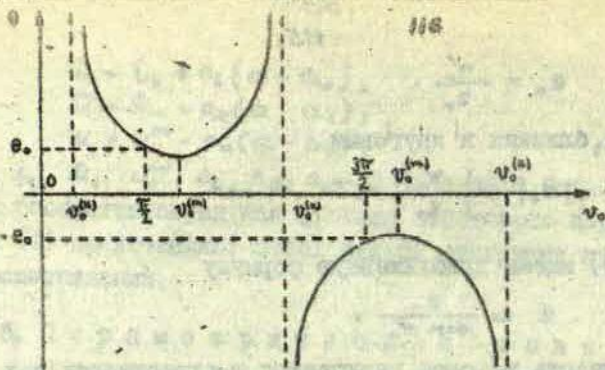


Рис. 3. Зависимость  $e(v_0)$  при  $e_0 > 0$

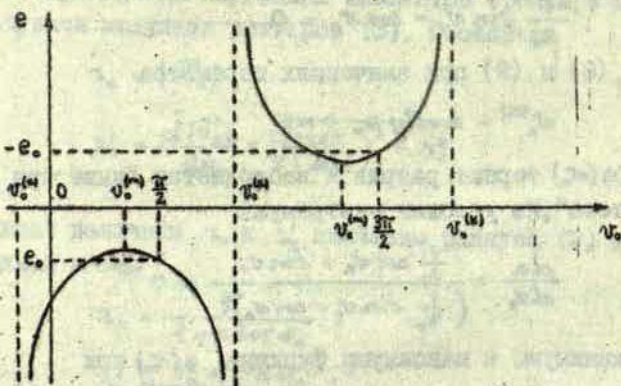


Рис. 4. Зависимость  $e(v_0)$  при  $e_0 < 0$

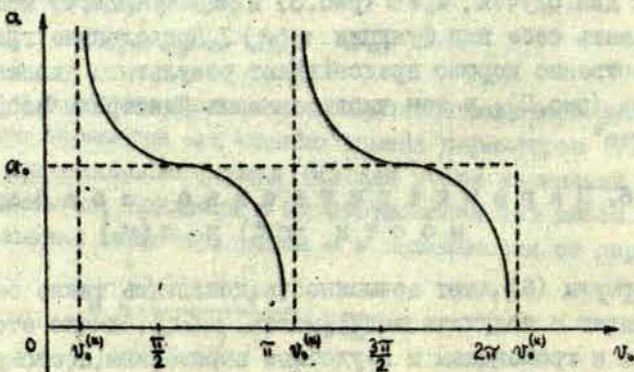


Рис. 5. Зависимость  $a(v_0)$

где  $p_0 = r_0$ , а  $e = e(\nu_0)$  — даваемая формулой (8).

Согласно формуле

$$p = a(1 - e^2),$$

соотношение (II) можно преобразовать к элементам орбиты  $a$  и  $e$

$$a = a_0 \frac{1 - e_0^2}{1 - e^2} (1 + e \cos \nu_0), \quad (12)$$

где

$$a_0 = \frac{p_0}{1 - e_0^2}.$$

Пренебрегая вторыми степенями эксцентриситета и воспользовавшись приближенной формулой (8'), вместо (12) имеем приближенное соотношение

$$a \approx a_0 (1 + e_0 \operatorname{ctg} \nu_0). \quad (12')$$

Очевидно, что функции  $p(\nu_0)$  и  $a(\nu_0)$  имеют те же особые точки, что и функция  $e(\nu_0)$ . Нетрудно показать, что если

$$|e(\nu_0)| < e_{\max} \leq 1,$$

то функции  $p(\nu_0)$  и  $a(\nu_0)$  являются монотонными, что позволяет строить однозначные обратные функции  $\nu_0(p)$  и  $\nu_0(a)$ . Приближенный вид функции  $a(\nu_0)$  при  $e_0 > 0$  изображен на рис. 5, что качественно соответствует результатам численных расчетов (рис. 2).

### § 7. Связь между векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{r}'_0$

После изложения основных результатов целесообразно обратить внимание на одно свойство векторов  $\vec{r}_0$  и  $\vec{r}'_0$ . Соотношения (3), с помощью которых вводятся векторы  $\vec{r}_0$  и  $\vec{r}'_0$ , эквивалентны определению шести постоянных координат этих векторов. Из них независимыми на самом деле являются всего пять координат, т.к. можно указать соотношение между координатами векторов  $\vec{r}_0$  и  $\vec{r}'_0$ . Это вызвано тем, что вектор  $\vec{r}'_0$  является производной вектора  $\vec{r}_0$  по полярному углу  $\psi$ .

Действительно, согласно рис. 6, имеем

$$AB = |\vec{r}_0| du,$$

$$AB = |d\vec{r}| \sin \psi,$$

откуда с учетом (3) следует

$$\sin \psi = \frac{|\vec{r}_0|}{\left| \frac{d\vec{r}}{du} \right|_{u=u_0}} = \frac{|\vec{r}_0|}{|\dot{\vec{r}}_0|}$$

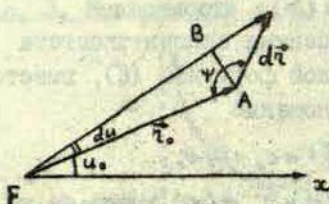


Рис. 6. Вектор  $\vec{r}_0$ .

Таким образом соотношения (3) в принципе не позволяют определить все шесть элементов орбиты, а представляют собой пять скалярных условий, необходимых для построения однопараметрического семейства элементов орбиты ИСЗ.

### § 8. Заключение

Формулы (8) и (12) при постоянных угловых элементах  $i, \Omega, u_0$  представляют собой аналитическое приближение однопараметрического семейства элементов орбиты ИСЗ. Пользуясь ими, можно, например, иначе решать задачу использования подвижного барьера при прогнозировании движения ИСЗ, чем в работе [6].

Формулы (4), представляющие как бы следующий этап параметризации, могут служить как для эмпирического уточнения значений угловых элементов, так и исходным материа-

лом для создания более точной теории параметризации. При этом, разумеется, вектора (3) также будут являться некоторыми функциями выбранного параметра.

### Л и т е р а т у р а

- ✓ 1. Лауцениекс Л.К. Определение орбит и прогнозирование появлений ИСЗ. Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук, 1974.
2. Жагар Ю.Х. Оценка точности прогнозирования движения ИСЗ. Дипломная работа. М., МИУ, 1972.
3. Эскобал П.Р. Методы определения орбит. М., "Мир", 1970.
4. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М., "Наука", 1968.
5. Лауцениекс Л.К. Вычисление первоначальных орбит ИСЗ методами минимизации. - "Уч. записки Латв.ГУ", 1970, т. 137, вып. 5, с. 39.
6. Штейнс К.А., Лауцениекс Л.К. Использование подвижного барьера при прогнозировании появления спутника. - "Уч. записки Латв.ГУ", 1973, т. 175, вып. 8, с. 17.

### Р е з ю м е

Ю. Х. Ж а г а р

#### ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ИСЗ

В работе выведены аналитические формулы однопараметрического семейства элементов орбиты ИСЗ. Качественно объяснены экспериментальные кривые, полученные улучшением элементов орбиты по близко расположенным угловым наблюдениям. Полученные результаты могут быть использованы для построения подвижного барьера поиска ИСЗ.

Таблиц - 1, иллюстр. - 6, библиогр. - 6 назв.

## K o p s e v i l k u m s

J. Z a g a r s

## ZMP ORBĪTAS ELEMENTU VIENPARAMETRISKĀS SAIMES

Darbē izvestas ZMP orbītas elementu vienparametriskās saimes analītiskās formulas. Kvalitatīvi izskaidrotas eksperimentālās līknes, kas iegūtas, uzlabojot orbītas elementus, izmantojot tuvi novietotus lenķiākos novērojumus. Iegūtie rezultāti var tikt izmantoti, lai aprēķinātu ZMP prognozēšanas kustīgo barjeru.

## S u m m a r y

J. Z a g a r s

SINGLE PARAMETER SETS OF SATELLITE  
ORBITAL ELEMENTS

Analytical expressions for a single-parameter family of orbital elements of a satellite are deduced. Experimental curves, obtained by improving the set of orbital elements from close angular observations of a satellite are explained. The obtained results can be used for computing the so called mobil barrier.

УДК 521.61

Ю. Х. Жагар  
ЛГУ им. П. Стучки

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

### § 1. Введение

Для характеристики однопараметрического семейства элементов орбиты ИСЗ необходимо иметь

- а) формулы или алгоритмы зависимости элементов орбиты от параметра,
- б) значения постоянных, содержащихся в этих формулах или алгоритме,
- в) интервал изменения параметра.

Формулы, содержащие пять постоянных  $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, u_0$  получены в работе [1], где также указано, что для достижения большей точности целесообразно ввести еще три постоянные  $c_1, c_2, c_3$ .

В настоящей работе рассмотрены две задачи — определение интервала изменения параметра и определение вышеназванных постоянных параметризации. Первая из них тесно связана с установлением аналитической зависимости функции качества от параметра. Вторая содержит некоторые практические аспекты определения постоянных параметризации и результаты численных расчетов.

### § 2. Аналитический вид функции качества

Определение элементов орбиты ИСЗ методами минимизации [3] или методом дифференциального улучшения [2], [4], сводится к нахождению минимума функции качества  $\Phi$ , которая чаще всего определяется соотношением

$$\Phi^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta \alpha_i \cos \delta_i)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta \delta_i)^2,$$

где  $n$  - число наблюдаемых положений ИСЗ. Если ввести систему координат, предложенную в [5], полюс которой совпадает с полюсом видимой трассы ИСЗ, то

$$\Phi^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (l_o - l_c)_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\kappa_o - \kappa_c)_i^2, \quad (1)$$

где  $\kappa$  - орбитальная широта,  $l$  - орбитальная долгота.

Согласно работе [5], в большом диапазоне изменения элементов орбиты, следовательно и для различных значений параметра [I], видимая трасса ИСЗ близка к малому кругу небесной сферы. По этой причине второй слагаемый в формуле (1), характеризующий поперечные отклонения ИСЗ от видимой трассы, слабо зависит от параметра. В таком случае функцию качества можно представить в виде

$$\Phi^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (l_o - l_c)_i^2 + K^2, \quad (1')$$

где

$$K^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\kappa_o - \kappa_c)_i^2 = \text{const}.$$

Согласно [5], орбитальная долгота ИСЗ, отсчитываемая от точки кульминации, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dl}{dt} = w \cos^2 l(t), \quad (2)$$

где  $w$  - топоцентрическая угловая скорость ИСЗ в точке кульминации.

Уравнение (2) имеет общее решение

$$l = \text{arctg}(wt + c), \quad (3)$$

где  $c$  - произвольная постоянная;  $c = 0$ , если счет времени вести с момента кульминации ИСЗ. Согласно (3) можем аппроксимировать наблюдаемую орбитальную долготу и вычисленную орбитальную долготу функциями

$$\begin{aligned} l_0 &= \arctg w_0 t, \\ l_c &= \arctg w_c t. \end{aligned} \quad (3')$$

Пологая далее

$$w_c = w_0 - \Delta w$$

и разлагая  $l_c$  по степеням малой разности  $\Delta w$ , получаем приближенную формулу

$$l_c \approx \arctg w_0 t - \Delta w t \cdot \cos^2 l_0.$$

Следовательно, с учетом (3')

$$l_0 - l_c \approx (w_0 - w_c) t \cdot \cos^2 l_0. \quad (4)$$

Подстановка (4) в (I') дает

$$\Phi^2 = L^2 (w_0 - w_c)^2 + K^2, \quad (5)$$

где введено обозначение

$$L^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 \cos^4 l_{0i} = \text{const}, \quad (6)$$

т.е.  $L$  зависит только от наблюдаемых величин, а не от параметра. Следовательно, функция качества  $\Phi$  зависит от трех постоянных  $L$ ,  $K$ ,  $w_0$  и с точностью до разложения (4) представляется формулой (5).

Для орбит близких к круговым [4]

$$w = \frac{z_0}{\rho_0} u,$$

$$u = \frac{\sqrt{\mu p}}{z_0^2},$$

где  $p$  — фокальный параметр орбиты,  $\mu$  — константа,  $z_0$ ,  $\rho_0$  — геоцентрическое и топоцентрическое расстояния ИСЗ в кульминации.

Следовательно

$$w_c = \frac{\sqrt{\mu p}}{z_0 \rho_0},$$

$$w_0 = \frac{\sqrt{\mu p_0}}{z_0 \rho_0} \quad (7)$$

где  $p_s$  — постоянная, а фокальный параметр орбиты  $p$  является известной функцией параметра  $\psi$ . [1]. С учетом (7) формулу (5) можно преобразовать к виду

$$\phi^2 = K^2 + A^2(\sqrt{p_s} - \sqrt{p})^2. \quad (8)$$

В окончательном виде (8) функция качества  $\phi$  содержит три константы  $K$ ,  $A$ ,  $p_s$  и является функцией фокального параметра орбиты

$$p = a(1 - e^2).$$

Аналитический вид функции  $p(\psi)$  приведен в работе [1], также см. формулы (13), (14).

### § 3. Определение интервала параметризации

Формула (8) неудобна для определения постоянных  $K$ ,  $A$ ,  $p_s$ , например, методом наименьших квадратов. С этой целью выгодно преобразовать (8) к виду

$$\phi^2 = c_1 p + c_2 \sqrt{p} + c_3, \quad (9)$$

где коэффициенты  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  связаны с исходными постоянными  $K$ ,  $A$ ,  $p_s$  формулами

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{c_1}, \\ p_s &= \frac{c_2^2}{4c_1}, \\ K &= \sqrt{c_3 - c_1 p_s}. \end{aligned} \quad (10)$$

Когда постоянные  $K$ ,  $A$ ,  $p_s$  определены и, тем самым, установлена конкретная аналитическая зависимость  $\phi(p)$  для выбранного набора наблюдений, можно непосредственно определить интервал параметризации. Минимальное значение

функции качества достигается при  $p = p_s$  и равно

$$\phi_{\min} = K.$$

Если задать некоторый предельный множитель  $g$ , т.е. предположить, что в реальной задаче функция качества должна удовлетворять неравенству

$$\phi \leq g\phi_{\min},$$

то для определения интервала параметризации надо решить относительно  $p$  уравнение

$$g^2 K^2 = K^2 + A^2 (\sqrt{p_s} - \sqrt{p})^2,$$

что дает

$$\begin{aligned} p_1 &= \left( \sqrt{p_s} - \frac{K}{A} \sqrt{g^2 - 1} \right)^2, \\ p_2 &= \left( \sqrt{p_s} + \frac{K}{A} \sqrt{g^2 - 1} \right)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая приближенный аналитический вид зависимости  $p$  от параметра  $\nu_0$  [I]

$$p = p_0 (1 + e \cdot \text{ctg } \nu_0)$$

можем определить интервал параметризации также относительно параметра  $\nu_0$  (истинной аномалии в эпоху):

$$\nu_{0i} = \arctg \left[ e \cdot \left( 1 + \frac{p_0}{p_i - p_0} \right) \right], \quad (12)$$

где значения  $p_i$  определяются формулами (II).

#### § 4. Вычисление постоянных $e$ и $p_0$

В работе [I] для случая однопараметрического семейства элементов орбиты ИСЗ, были получены следующие формулы для эксцентриситета и фокального параметра орбиты

$$e = \frac{1}{\frac{1}{e_0} \sin \nu_0 - \cos \nu_0}, \quad (13)$$

$$p = p_0 (1 + e \cos \nu_0), \quad (14)$$

где  $e_0$ ,  $p_0$  - постоянные, а  $\nu_0$  - параметр однопараметрического семейства элементов орбиты ИСЗ.

Формулы (13), (14) дают возможность непосредственно вычислить постоянные  $e_0$  и  $p_0$  по одному набору элементов орбиты, т.е. при одном фиксированном значении параметра  $\nu_0$ .

$$e_0 = \frac{\sin \nu_0}{\frac{1}{e} + \cos \nu_0}. \quad (15)$$

$$p_0 = \frac{p}{1 + e \cos \nu_0}. \quad (16)$$

Для практического определения  $e_0$  и  $p_0$  желательно выбрать несколько наборов элементов орбиты с соответствующими весовыми коэффициентами

$$\tilde{p}_j = \frac{(\sum_{i=1}^N \phi_i^2)^{-1}}{\phi_j^2}, \quad (17)$$

где  $\phi_i$  - функция качества  $i$ -го набора элементов орбиты,  $N$  - число наборов элементов орбиты.

Тогда для определения постоянных  $e_0$  и  $p_0$  вместо (15), (16) с учетом (17) имеем формулы взвешенных средних оценок

$$e_0 = \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{p}_j \sin \nu_{0j}}{\frac{1}{e_j} + \cos \nu_{0j}}, \quad (18)$$

$$p_0 = \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{p}_j p_j}{1 + e_j \cos \nu_{0j}}. \quad (19)$$

Численные расчеты  $e_0$  и  $p_0$ , согласно формулам (18), (19) проводились для следующих ИСЗ:

- а) *Midas-4* (6102801),
- б) *Geos-A* (6508901),
- в) *Geos-B* (6800201),
- г) *Rapese* (6605601).

Невязки  $\Delta e_j$  и  $\Delta p_j$  вычислялись согласно формулам

$$\Delta e_j = e_j - \frac{1}{\frac{1}{e_0} \sin \sigma_{0j} - \cos \sigma_{0j}},$$

$$\Delta p_j = p_j - p_0 (1 + e_j \cos \sigma_{0j}),$$

т.е. без учета весового коэффициента, а средние квадратические отклонения  $\sigma_e$  и  $\sigma_p$  с их учетом. Для всех упомянутых ИСЗ были получены качественно одинаковые результаты. В таблицах 1 и 2 приведены результаты расчетов для ИСЗ *Geos-A*, полученные при постоянном шаге параметра  $\Delta \sigma_0 = 18^\circ$ .

Таблица 1

№	$e_j$	$\Delta e_j$	$\frac{ \Delta e_j }{e_j} [\%]$
1	0,29226	+0,01671	5,7
2	0,13186	+0,00599	4,5
3	0,10582	+0,00386	3,6
4	0,09087	+0,00268	2,9
5	0,07494	+0,00136	1,8
6	0,07146	-0,00016	0,2
7	0,08170	-0,00128	1,6
8	0,10771	-0,00417	3,9
9	0,18489	-0,01939	10,5

Увеличение относительных ошибок  $\frac{|\Delta e_j|}{e_j}$  и  $\frac{|\Delta p_j|}{p_j}$  для крайних наборов элементов орбиты вызваны главным образом уменьшением весовых коэффициентов, т.к. их функции качества имели большие значения. Систематический ход невязок

Таблица 2

Nz	$p_j$ (нГн)	$\Delta p_j$ (нГн)	$\frac{ \Delta p_j }{p_j}$ [%]
1	5,4556	-0,1752	3,21
2	6,9082	-0,0846	1,22
3	7,1846	-0,0637	0,89
4	7,3673	-0,0493	0,67
5	7,6294	-0,0278	0,36
6	8,0233	+0,0063	0,08
7	8,2502	+0,0269	0,33
8	8,5937	+0,0592	0,69
9	9,3784	+0,1385	1,48

указывает на некоторую неточность аппроксимации, даваемой формулами (I3) и (I4). Однако в целом, согласно результатам таблиц 1 и 2, аппроксимацию следует считать хорошей. Некоторые другие результаты расчетов для всех упомянутых выше ИСЗ приведены в таблице 3.

Таблица 3

Параметр	Мидас-4	Геос-А	Геос -Б	Пагеос
$e_e$	-0,00980	+0,06911	-0,02850	+0,11745
$\sigma_e$	0,00714	0,00424	0,00392	0,01736
$p_e$	10,082мГн	7,902мГн	7,601мГн	10,140мГн
$\sigma_p$	0,049мГн	0,046мГн	0,014мГн	0,242мГн

Следует, однако, иметь в виду, что  $\sigma_e$  и  $\sigma_p$  не являются средними квадратическими ошибками величин  $e_e$  и  $p_e$ , а взвешенным осреднением невязок  $\Delta e_j$  и  $\Delta p_j$ .

## § 5. Вычисление угловых элементов

В работе [1] для аппроксимации изменения угловых элементов орбиты  $i, \Omega, u$ , предложены эмпирические формулы

$$\begin{aligned} i &= i_0 + c_i (a - a_0), \\ \Omega &= \Omega_0 + c_\Omega (a - a_0), \\ u_0 &= u_0^{(0)} + c_u (a - a_0), \end{aligned} \quad (20)$$

где  $a$  рассматривается как известная функция параметра  $u_0$ . Для определения шести постоянных  $i_0, \Omega_0, u_0^{(0)}, c_i, c_\Omega, c_u$ , характеризующих угловые элементы орбиты, применялся метод наименьших квадратов с учетом весовых коэффициентов (17). Результаты расчетов для упомянутых выше ИСЗ качественно не отличались между собой и основная их часть приведена в таблице 4. Величины  $\sigma_i, \sigma_\Omega, \sigma_u$  вычислялись по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt{\sum_{j=1}^N \tilde{p}_j [i_j - i_0 - c_i (a_i - a_0)]^2}, \\ \sigma_\Omega &= \sqrt{\sum_{j=1}^N \tilde{p}_j [\Omega_j - \Omega_0 - c_\Omega (a_i - a_0)]^2}, \\ \sigma_u &= \sqrt{\sum_{j=1}^N \tilde{p}_j [u_j - u_0^{(0)} - c_u (a_i - a_0)]^2}. \end{aligned}$$

Таблица 4 показывает, что качество аппроксимации формулами (20), характеризуемое величинами  $\sigma_i, \sigma_\Omega, \sigma_u$  сильно отличается для различных спутников. Это вызвано тем, что амплитуда изменения угловых элементов для ИСЗ "Геос-А" и "Пагеос" в использованных примерах составила примерно  $1^\circ$ , в то время как для ИСЗ "Мидас-4" и "Геос-Б" - всего около  $0,1^\circ$ . Относительная оценка аппроксимации значительно равномернее.

ИСЗ	$i_0$ (град.)	$c_1$ (град/мм)	$b_1$ (град.)
Мидас-4	95,7121	+0,0731	0,0019
Геос-А	59,3134	-0,2495	0,0103
Геос-Б	105,9151	+0,1868	0,0014
Пагеос	85,6812	-0,1147	0,0337
ИСЗ	$\Omega_0$ (град.)	$c_2$ (град/мм)	$b_2$ (град.)
Мидас-4	321,8919	+0,0759	0,0018
Геос-А	260,2825	+0,1622	0,0026
Геос-Б	32,9608	-0,0431	0,0006
Пагеос	74,2799	+0,1487	0,0368
ИСЗ	$u_0$ (град.)	$c_3$ (град/мм)	$b_3$ (град.)
Мидас-4	35,7592	+0,1105	0,0023
Геос-А	57,3977	-0,4254	0,0127
Геос-Б	130,8255	+0,4348	0,0027
Пагеос	51,5266	-0,1062	0,0278

### § 6. Вычисление интервала параметризации

Для функции качества методом наименьших квадратов вычислялись коэффициенты  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  формулы (9). Далее, согласно формулам (10) вычислялись постоянные  $A$ ,  $K$ ,  $p_*$ , имеющие сравнительно простой физический смысл. Результаты этих расчетов приведены в таблице 5, где  $\sigma_{\phi}$  представляет собой среднюю квадратическую ошибку аппроксимации функции качества формулой (9); Величина  $p_*$  представляет собой наиболее вероятное значение элемента орбиты  $p$ , при котором функция качества достигает свое минимальное значение равное  $K$ .

ИСЗ	$A$ (м. мгн <sup>-2</sup> )	$p_s$ (мгн)	$K$ (м)	$\sigma_\phi$ (м)
Мидас-4	285,37	9,278	30,99	9,63
Геос-А	577,27	8,030	42,05	8,33
Геос-Б	540,27	7,671	16,71	4,13
Пагеос	111,15	9,748	30,44	7,47

Для оценки точности аппроксимации обратимся к таблице 6, где для ИСЗ Геос-Б приведены значения функции качества  $\phi$  и ее отклонения  $\Delta\phi$  от аппроксимирующей функции (9), полученные при постоянном шаге параметра  $\Delta\psi_0 = 18^\circ$ .

Таблица 6

$N$	$\phi$ (м)	$\Delta\phi$ (м)	$\frac{ \Delta\phi }{\phi}$ [%]
1	63,0	+0,13	0,21
2	37,0	-0,02	0,05
3	26,0	-0,37	1,42
4	20,0	-0,49	2,45
5	17,0	-0,29	1,71
6	17,0	-0,04	0,24
7	22,0	+0,34	1,55
8	37,0	+0,41	1,11
9	99,0	-0,05	0,05

Аппроксимация функции качества  $\phi$  формулой (9) хорошо оправдала себя и для других спутников. Неудовлетворительный результат был получен только для ИСЗ "Мидас-4", т.к. значения его функции качества были вычислены неуверенно - процесс дифференциального улучшения элементов орбиты не был осуществлен до конца.

Если известны постоянные  $A$ ,  $K$ ,  $p_s$ , то согласно

формулам (II), (I2) можно вычислить интервал параметризации и, согласно формулам (I3), (I4), (20), интервалы изменения элементов орбиты. При этом величины  $a$  и  $\omega$  вычисляются по формулам

$$a = \frac{p}{1 - e^2},$$

$$\omega = u_0 - \nu_0.$$

Результаты расчетов интервала параметризации и соответствующих интервалов изменения элементов орбиты для ИСЗ "Геос-Б" приведены в таблице 7. Для параметра  $\nu_0$  при этом приведены значения, соответствующие началу интервала параметризации, минимуму функции качества и концу интервала параметризации при предельном множителе  $g = 2$ . Для других вышеупомянутых ИСЗ были получены подобные, качественно неотличающиеся результаты.

Таблица 7

$\nu_0$ (град.)	$a$ (км)	$e$	$i$ (град.)	$\Omega$ (град.)	$\omega$ (град.)	$u_0$ (град.)	$\Phi$ (м)
$\nu_{01} = 223,2$	7,389	0,0404	105,87	32,97	267,5	130,73	33,4
$\nu_{02} = 287,8$	7,678	0,0302	105,93	32,96	203,1	130,86	16,7
$\nu_{03} = 328,4$	7,997	0,0571	105,98	32,94	162,6	130,99	33,4

Для ИСЗ "Геос-Б" был проделан численный эксперимент определения интервала параметризации по небольшому количеству значений функции качества  $\Phi$ . При этом исследовалась определяемость интервала параметризации как по симметрично относительно минимума функции  $\Phi$ , так и по несимметрично расположенным значениям функции  $\Phi$ . Результаты этих расчетов приведены в таблице 8, где употреблена нумерация значений функции  $\Phi$ , использованная в таблице 6.

Если выбрать в качестве эталона определение интервала параметризации по всем девяти значениям функции ка-

чества (строка I), то следует, что наиболее неблагоприятными являются определение по близко расположенным значениям функции качества  $\Phi$  (строки 2, 3, 4). Интервал параметризации, определяемый в этих случаях, следует считать лишь некоторым приближением и уточнять добавлением новых значений функции качества.

Таблица 8

№	№ значений $\Phi$	$\nu_{01}$ (град)	$\nu_{02}$ (град)	$\nu_{03}$ (град)
I	I по 9	223,2	287,8	328,4
2	7,8,9	218,5	281,7	327,8
3	1,2,3	232,6	293,2	327,3
4	2,5,8	224,1	287,3	327,7
5	4,5,6	218,1	289,9	332,1
6	I по 5	225,9	288,9	327,7
7	3 по 7	223,7	286,3	327,3

### § 7. Заключение

Проделанный анализ позволил установить обоснованный вид функции качества  $\Phi$  - (8), (9) и на основе этого разработать методику определения интервала параметризации. Это существенно для практического применения метода параметризации элементов орбиты ИСЗ, например, при прогнозировании движения ИСЗ.

Численные расчеты показали хорошую аппроксимацию пяти элементов орбиты ИСЗ предложенными в [I] функциями. Таким образом получены результаты, имеющие практическое значение для применения однопараметрических семейств элементов орбиты для построения эфемерид типа подвижного барьера. Для эффективного вычисления интервала параметризации по небольшому количеству значений функции качества  $\Phi$ , надо осуществить операционное взаимодействие между программой улучшения элементов орбиты и программой вычисления постоянных параметризации. Приближенное определение интервала параметризации позволяет быстро выбрать

значения параметра  $n$ , при которых следует вычислять дополнительные значения функции  $\phi$ , дающие оптимальное улучшение интервала параметризации.

Все приведенные расчеты были выполнены на ЭВМ БЭСМ-4 в Вычислительном центре Латвийского государственного университета им. П. Стучки.

### Л и т е р а т у р а

1. Загар Ю.Х. Однопараметрические семейства элементов орбиты ИСЗ. — См. настоящий сборник. с.108.
2. Загар Ю.Х. Оценка точности прогнозирования движения ИСЗ. — Дипломная работа. М., МГУ, 1972.
3. Лауценекс Л.К. Вычисление первоначальных орбит ИСЗ методами минимизации. — "Уч. записки Латв.ГУ", 1970, т.137, вып. 5, с.39.
4. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М., "Наука", 1968.
5. Ābele M.K. ZMP fotokamera ar orientājamu kustīgu plati. Дипломная работа, Рига, ЛГУ им. П. Стучки, 1960.

### Р е з ю м е

Ю. Х. Загар

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

В работе получена аналитическая формула для функции качества в случае однопараметрической зависимости элементов орбиты. На ее основе предложена методика определения интервала параметризации. Приведены результаты численных расчетов по определению постоянных и интервала параметризации.

Таблиц - 8, библиогр. - 5 назв.

## K o p s a v i l k u m s

J. Ž a g a r s

## PARAMETRIZĀCIJAS KONSTANTU NOTEIKSANA

Darbā iegūta precizitātes funkcijas analītiska formula gadījumam, kad orbītas elementi ir atkarīgi no viena parametra. Pamatojoties uz to, izstrādāta metodika parametrizācijas intervala noteikšanai. Veikti skaitliski aprēķini parametrizācijas konstantu un intervala noteikšanai.

## S u m m a r y

J. Ž a g a r s

## CALCULATION OF PARAMETRIZATION CONSTANTS

An analytical expression of the accuracy function is deduced for the case when orbital elements depend upon a single parameter. A method for determination of the parametrization interval is obtained, using this expression. Numerical examples for calculating of parametrization constants and interval is given.

УДК 521.41

Н. И. Лобкова  
ИТА АН СССР

ВЕКОВЫЕ И ДОЛГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПЛУТОНА  
ОТ НЕПТУНА

Девятая большая планета солнечной системы Плутон обычно исключается из рассмотрения при построении аналитических теорий движения системы больших планет. Для каждой пары планет (кроме системы Плутон-Нептун) орбита одной планеты является внутренней по отношению к другой, то есть во все время движения  $\frac{r}{r'} \neq 1$  и либо  $\frac{r}{r'} < 1$ , либо  $\frac{r}{r'} > 1$ , где  $r, r'$  — радиус-векторы планет. Для системы же Нептун-Плутон возможны все варианты соотношений

$$\frac{r}{r'} = 1, \quad \frac{r}{r'} < 1, \quad \frac{r}{r'} > 1. \quad (1)$$

В этом смысле орбита Плутона аналогична кометным орбитам или орбитам астероидов с большими эксцентриситетами и наклонами. В таких случаях разложения классического типа для главной части пертурбационной функции (или для отрицательных степеней взаимных расстояний  $\Delta^{-n}$ ) расходятся, и ряды Фурье по кратным средним аномалий  $M$  и  $M'$  строятся с помощью гармонического анализа, применяемого для приближенного вычисления интегралов вида

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta^{-n}(M, M') e^{\sqrt{-1}(kM + k'M')} dM dM'. \quad (2)$$

Такой метод теряет свою эффективность, если расстояние между орбитами может быть малым, ибо при  $\Delta \rightarrow 0$  имеем  $\Delta^{-n} \rightarrow \infty$  и число точек деления интервалов изменения  $M$  и  $M'$  неограниченно растет.

Возможность построения аналитического разложения  $\Delta^{-n}$

в случае (I) показана ранее М.С.Петровской [1]. Предлагаемая работа вносит некоторые изменения в эту методику. В частности, рекуррентные формулы для вычисления дифференциальных операторов от обобщенных коэффициентов Лапласа заменены аналитическими, что позволяет повысить точность вычислений. Работа представляет собой первый опыт по применению такого рода разложений к конкретной небесно-механической задаче. Поэтому для упрощения алгоритма вычислений некоторые функции координат эллиптического движения раскладывались в ряды Фурье с использованием гармонического анализа. Однако применение последнего не являлось неизбежным, и, кроме того, таким методом оценивались интегралы, существенно отличающиеся от интегралов вида (2). В отличие от (2) в них подынтегральные функции ограничены при любой форме и конфигурации орбит.

В настоящее время известен ряд исследований по проблеме движения Плутона. В теории движения Плутона Ш.Г.Шараф и Н.А.Будниковой [2,3] возмущения от Юпитера, Сатурна и Урана представлены в аналитической форме, а возмущения от Нептуна приведены в виде результатов численного интегрирования на некотором отрезке орбиты Плутона.

Ряд работ [4-7] посвящен исследованию характера движения Плутона на длительных интервалах времени с целью выяснения, насколько его орбита устойчива по отношению к современной конфигурации планет. На данном этапе авторы приходят к заключению, что орбита Плутона совершает либрационное движение, причем минимальное расстояние Нептун-Плутон имеет тенденцию к увеличению. Результаты были получены с помощью численного интегрирования либо полных уравнений движения, либо осредненных с учетом резонанса  $n_P : n_N = 2 : 3$ . Эти исследования носят скорее качественный характер и не охватывают с повестки дня проблему построения строгой аналитической теории движения Плутона с представлением координат или элементов в виде явных функций времени, как это делается для всех остальных больших планет.

Как показала практика, наличие резонанса в системе Юпитер-Сатурн (большого неравенства) не является препят-

отвием к применению обычного метода последовательных приближений с разложением возмущений по целым степеням масс. Иными словами, нет необходимости в особом подходе к этой задаче, как к резонансной. Задача о движении Плутона в поле тяготения Нептуна считается резонансной. Однако только практическое определение возмущений (как и в случае Юпитер-Сатурн) позволит установить, возможно ли в этом случае построение теории обычного типа. Настоящая работа является, по-видимому, первым опытом в этом направлении. В ней определены вековые и долгопериодические возмущения первого порядка Плутона от Нептуна, причем найдены коэффициенты долгопериодических неравенств, соответствующие кратностям  $3k$  для Плутона и  $-2k$  для Нептуна для  $k = 1, 2, \dots, 10$ .

Введем обозначения:

$E_1 = a$  — большая полуось планетной орбиты,

$E_2 = e$  — ее эксцентриситет,

$E_3 = i$  — наклон орбиты к эклиптике,

$E_4 = \Omega$  — долгота восходящего узла,

$E_5 = \omega$  — угловое расстояние перигелия от узла,

$E_6 = M_0$  — средняя аномалия эпохи,

$r$  — радиус-вектор планеты,

$\mathcal{H}$  — угол между радиусами-векторами планет,

$\nu$  — истинная аномалия,

$M$  — средняя аномалия,

$m$  — масса планеты,

$\delta \epsilon_j$  — возмущения элементов.

Нештрихованные величины соответствуют Плутону, а со штрихом — Нептуну.

Уравнения Лагранжа, определяющие возмущения элементов Плутона от Нептуна, представим в форме:

$$\frac{d\epsilon_j}{dt} = \psi_{j_1} \Delta^{-3} - \psi_{j_2} r^{-3} = \psi_j, \quad (j = 1, 2, \dots, 6). \quad (3)$$

Первый член в правой части соответствует главной части пертурбационной функции, второй — дополнительному члену. Функции  $\psi_{j_1}$  и  $\psi_{j_2}$  имеют вид:

$$\Psi_{11}^f = N_1 [(r'A_1 - r) e \sin v + (1 + e \cos v) r' A_2],$$

$$\Psi_{21}^f = N_2 [(r'A_1 - r) a e \sin v + a(1 + e \cos v) r' A_2 - r r' A_2],$$

$$\Psi_{31}^f = N_3 r r' (A_2 \cos i - A_4),$$

$$\Psi_{41}^f = N_3 r r' A_3,$$

$$\Psi_{51}^f = N_2 A - N_4 A_3 r r' + N_2 r a \cos v,$$

$$\Psi_{61}^f = -N_6 r r' A_1 - N_5 A + N_6 r^e - N_5 r a \cos v,$$

$$\Psi_{12}^f = N_1 [r' e \sin v \cdot A_1 + (1 + e \cos v) r' A_2],$$

$$\Psi_{22}^f = N_2 [a r' e \sin v \cdot A_1 + a r' (1 + e \cos v) A_2 - r r' A_2],$$

$$\Psi_{32}^f = N_3 r r' (A_2 \cos i - A_4),$$

$$\Psi_{42}^f = N_3 r r' A_3,$$

$$\Psi_{52}^f = N_2 A - N_4 r r' A_3,$$

$$\Psi_{62}^f = -N_6 r r' A_1 - N_5 A,$$

где

$$A_1 = \cos \mathcal{H}, \quad A_2 = \frac{\partial \cos \mathcal{H}}{\partial u}, \quad A_3 = \frac{\partial \cos \mathcal{H}}{\partial i}, \quad A_4 = \frac{\partial \cos \mathcal{H}}{\partial \Omega},$$

$$A = r r' (2 + e \cos v) (1 - e^2)^{-1} \sin v \cdot A_2 - a r' \cos v \cdot A_1,$$

$$N_1 = \frac{2 \kappa^2 m'}{n \sqrt{1 - e^2}}, \quad N_2 = \frac{\kappa^2 m' \sqrt{1 - e^2}}{e n a^2}, \quad N_3 = \frac{\kappa^2 m' \operatorname{cosec} i}{n a^2 \sqrt{1 - e^2}},$$

$$N_4 = N_3 \cos i, \quad N_5 = N_2 \sqrt{1 - e^2}, \quad N_6 = \frac{2 \kappa^2 m'}{n a^2}.$$

Представим правые части (3) в виде рядов Фурье:

$$\Psi_d^f = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{p's=-\infty}^{\infty} [B_{p,p'}^j \cos(pM + p'M') + C_{p,p'}^j \sin(pM + p'M')],$$

$$B_{p,p'}^j = \frac{2-\delta_{p,p'}}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\psi_{j1} \Delta^{-3} - \psi_{j2} \tau^{-3}) \frac{\cos}{\sin} (pM+p'M') dM dM',$$

$\delta_{p,p'}$  - символ Кронекера.

Тогда

$$B_{p,p'}^j = B_{p,p'}^{j'} - B_{p,p'}^{j''}.$$

$$B_{p,p'}^{j'} = \frac{2-\delta_{p,p'}}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_{j1} \Delta^{-3} \cos (pM+p'M') dM dM'. \quad (4)$$

$$B_{p,p'}^{j''} = \frac{2-\delta_{p,p'}}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_{j2} \tau^{-3} \cos (pM+p'M') dM dM'.$$

Коэффициенты  $C_{p,p'}^j$  имеют аналогичный вид.

Остановимся на вычислении интегралов (4). Представим  $\Delta^{-3}$  в форме [1]

$$\Delta^{-3} = (\tau + \tau')^{-3} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{(1)_s} \sum_{m=0}^{\infty} (D)_s \Phi_m(\beta) \cos m\mathcal{H},$$

где

$$D = \frac{\partial}{\partial \ln \beta}, \quad \beta = \frac{\alpha \alpha' (1-e)(1-e')}{[\alpha(1+e) + \alpha'(1+e')]^2}, \quad x = 1 - \beta \frac{(\tau + \tau')^2}{\tau \tau'}$$

$$\Phi_m(\beta) = (2 - \delta_{m,0}) \frac{(\frac{3}{2})_m}{(1)_m} \beta^m \mathcal{F}(m + \frac{3}{2}, m + \frac{1}{2}, 2m + 1, 4\beta),$$

$\mathcal{F}$  - гипергеометрическая функция Гаусса.

Для нашей задачи оказалось целесообразным видоизменить разложение  $\Delta^{-3}$  следующим образом

$$\Delta^{-3} = (\tau + \tau')^{-3} \sum_{s=0}^{\infty} \left( \frac{x}{1-4\beta} \right)^s \sum_{m=0}^{\infty} P_{s,m}(\beta) \cos m\mathcal{H}, \quad (5)$$

где

$$P_{s,m}(\beta) = \frac{(1-4\beta)^s}{(1)_s} (D)_s \Phi_m(\beta). \quad (6)$$

При этом  $\frac{x}{1-4\beta} \leq 1$ , а порядок функций  $P_{s,m}(\beta)$ , как показали вычисления, практически не зависит от значений  $S$ . Подстановка разложения (5) в (4) дает

$$B_{p,p'}^j = \frac{2-\delta_{p,p'}}{4\pi^2} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_{s,m}(\beta) K_{s,m,p,p'}^j, \quad (7)$$

$$C_{p,p'}^j = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_{s,m}(\beta) L_{s,m,p,p'}^j,$$

где

$$K_{s,m,p,p'}^j = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_{j_1}^j \left( \frac{x}{1-4\beta} \right)^s \frac{\cos m \mathcal{H}}{(z+z')^3} \frac{\cos}{\sin} (pM+p'M') dM dM',$$

Эти интегралы можно представить в аналитической форме в виде рядов Фурье по кратным  $M$  и  $M'$ . При этом по сравнению с (4) подынтегральные функции в последних ограничены, тогда как в (4) при  $\Delta \rightarrow 0$  они стремятся к  $\infty$ . Целесообразно перейти к интегрированию по  $\nu$  и  $\nu'$ .

$$L_{s,m,p,p'}^j = \int_0^{\nu'} \int_0^{\nu} \Psi_{j_1}^j \left( \frac{x}{1-4\beta} \right)^s \cos m \mathcal{H} \frac{\cos}{\sin} (pM+p'M') d\nu d\nu', \quad (8)$$

$$\nu = \frac{1}{\alpha\alpha' \sqrt{1-c^2} \sqrt{1-c'^2}}, \quad \Psi_{j_1}^j = \Psi_{j_1}^j \frac{(z+z')^2}{(z+z')^3}.$$

В целях упрощения алгоритма вычислений применялась приближенная квадратурная формула прямоугольников, а именно

$$L_{s,m,p,p'}^j = \frac{4\pi^2 \nu'}{q q'} \sum_{q=0}^{2q-1} \sum_{q'=0}^{2q'-1} \Psi_{j_1}^j(q, q') \frac{[x(q, q')]^s}{(1-4\beta)^s} \cos m \mathcal{H}(q, q') \times$$

$$\times \frac{\cos}{\sin} [pM(q) + p'M'(q')], \quad (9)$$

где под функциям  $\Psi_{j_1}^j(q, q')$  и т.д. понимаются их значения для  $\nu = \frac{\pi}{q} \cdot q$ ,  $\nu' = \frac{\pi}{q'} \cdot q'$ .

После подстановки (9) в (7) получаем

$$\begin{cases} B_{p,p'}^j = (2 - \delta_{p,p'}) \mu \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_{s,m}(\beta) \sum_{q=0}^{2Q-1} \sum_{q'=0}^{2Q'-1} W_{j_i}' \left( \frac{x}{1-4\beta} \right)^s \cos m\vartheta \cos(pM+p'M'), \\ C_{p,p'}^j = 2\mu \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_{s,m}(\beta) \sum_{q=0}^{2Q-1} \sum_{q'=0}^{2Q'-1} W_{j_i}' \left( \frac{x}{1-4\beta} \right)^s \cos m\vartheta \sin(pM+p'M'), \end{cases} \quad (10)$$

причем  $\mu = \mu' / (Q \cdot Q')$ , а  $q$  и  $q'$  для простоты опущены.

Вычисления по формулам (10) производились следующим образом. Сначала вычислялась таблица дифференциальных полиномов  $P_{s,m}(\beta)$  при  $0 \leq s \leq \bar{S}$  и  $0 \leq m \leq \bar{M}$ , где  $\bar{S}$  и  $\bar{M}$  — верхние пределы суммирования по  $s$  и  $m$ . Алгоритм вычисления дифференциальных операторов  $(D)_s \Phi_m(\beta)$ , основанный на рекуррентных формулах в [1], приводил к большой вариации порядков этих операторов и потере точности за счет вычитания близких величин. Переход от  $(D)_s \Phi_m(\beta)$  к  $P_{s,m}(\beta)$  по формулам (6) был сделан с целью нормализации величин операторов. Кроме того, рекуррентные формулы были заменены аналитическими следующим образом. Согласно [8],

$$(D)_s \Phi_m(\beta) = \beta \frac{d^s}{d\beta^s} [\beta^s \Phi_m(\beta)].$$

Осуществляя дифференцирование в правой части равенства, получим:

$$P_{s,m}(\beta) = \frac{(1-4\beta)^s}{(1)^s} (D)_s \Phi_m(\beta) = (1-4\beta)^{-1} \sum_{\ell=0}^s A_{m,\ell,s} \Phi_{m,\ell}(\beta),$$

где

$$\Phi_{m,\ell}(\beta) = (2 - \delta_{m,0}) \frac{\left(\frac{3}{2}\right)_m}{(1)_m} \mathcal{F}\left(m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, 2m + 1 + \ell, 4\beta\right),$$

$$A_{m,\ell,s} = \frac{4^\ell (m + \frac{3}{2})_\ell (m + \frac{1}{2})_\ell (m)_s \beta^{m+\ell} (1-4\beta)^{s-\ell}}{(1)_\ell (m)_\ell (2m+1)_\ell (1)_{s-\ell}}.$$

Вычисление таблицы  $P_{s,m}(\beta)$  производилось при  $0 \leq s \leq 350$ ,  $0 \leq m \leq 70$ . Как показали вычисления, члены таблицы имеют порядок от 0 до 1 при  $m$  малых и при одном и том же  $s$  с возрастанием  $m$  они стремятся к нулю.

Далее вычислялись интегральные суммы в (10) по  $q$  и  $q'$ . Величины  $Q$  и  $Q'$  зависят от  $s$  и оказалось, что при  $0 \leq s \leq 150$  достаточно взять  $Q = Q' = 24$ , а для  $s > 150$   $Q$

и  $Q'$  были взяты равными 36.

При вычислении внешней суммы по  $s$  было установлено, что ее члены, начиная с некоторого  $s$ , монотонно убывают (см. табл. I).

Для контроля вычислений коэффициенты  $B_{p,p'}^j$  и  $C_{p,p'}^j$  рядов  $U_j^i$  в (3) были получены двумя способами. В первом случае алгоритм точно соответствовал формулам (10). Во втором — суммы по  $q$  и  $q'$  рассматривались как внешние. Как показали вычисления, оба варианта совпали с точностью до четырех значащих цифр. Для отладки программы были вычислены вековые и долгопериодические возмущения Цереры от Юпитера, которые сравнивались с известными результатами (вековые возмущения — с результатами В.Ф. Проскурина [9], долгопериодические — с данными, любезно предоставленными Г.А. Красинским).

В такой постановке задача рассматривается впервые. Поэтому сравнение результатов с полученными ранее другими авторами может быть проведено лишь в общих чертах и преследует двоякую цель: контроль вычислений и сравнение величин вековых и долгопериодических возмущений Плутона от Нептуна с возмущениями Плутона от других планет, а также с некоторыми неравенствами в движении больших планет. Сопоставление найденных резонансных членов в возмущениях Плутона от Нептуна с первыми гармониками в возмущениях Плутона от Юпитера [2, 3] приводит к заключению, что коэффициенты этих неравенств — величины одного порядка (см. табл. 2–5). Такой же порядок или больший имеют коэффициенты членов, соответствующих большому неравенству в системе Юпитер–Сатурн. Поэтому подход к задаче Плутон–Нептун как к резонансной не является неизбежным, и принципиально возможно построение теории движения Плутона обычного типа, хотя объем вычислений при любом подходе к этой задаче значительно возрастает.

В упомянутых исследованиях авторы уделяли особое внимание проведению аргумента перигелия  $\omega$  Плутона. К сожалению, в работах [4, 5, 6, 7] приведены лишь суммарные возмущения элементов Плутона от всех внешних планет. Исключение сделано лишь для элемента  $\omega$  Ногі [5] и  $N_{\text{Ceres}}$  [7], кото-

рые пришли к выводу, что под влиянием Нептуна  $\omega$  совершает обратное движение со скоростью  $11.3$  за  $100$  тыс. лет или  $40''.7$  за  $100$  лет. Согласно нашим результатам (табл. 3), суммарный эффект вековых и долгопериодических возмущений  $\omega$  от Нептуна в принятом приближении составляет  $-45''.6$  за  $100$  лет. Как видим, оба результата довольно хорошо согласуются между собой. Чтобы произвести сравнение результатов на большем интервале времени, в нашем решении потребовался бы учет большего числа долгопериодических членов, а также вековых членов выше первого порядка. В то же время, следует учесть, что в работах [5] и [7] авторы пренебрегали эксцентриситетом и наклоном Нептуна.

Итак, в работе показана принципиальная возможность построения полуаналитической (и тем самым аналитической) теории движения в случае орбит, пересекающихся в пресекции, и в частности, для системы Нептун-Плутон.

Таблица I содержит суммы членов, соответствующих внешнему суммированию по 5 для вековых возмущений элементов  $e, i, \Omega, \omega$ :

Таблицы 4 и 5 дают возможность сравнить возмущения в элементах Плутона  $\Omega$  и  $i$  от различных планет. В первых двух столбцах указаны кратности  $M$  и  $M'$  для Плутона и возмущающей планеты, а в остальных — коэффициенты при косинусах и синусах в соответствующих рядах Фурье. Возмущения Плутона от Юпитера, Сатурна и Урана взяты из работ [2, 3], возмущения Плутона от Нептуна получены автором.

Таблицы 2, 3 содержат возмущения в элементах Плутона от Нептуна, представленные в виде рядов по степеням времени с использованием результатов [2, 3].

В таблице 6 приведены элементы Плутона и Нептуна, с которыми производились вычисления. Элементы взяты из работы [3]. Возмущения выражены в секундах, время — в годах.

Работа выполнена в Институте теоретической астрономии АН СССР под руководством доктора физ.-мат. наук М. С. Петровской.

s	$de/dt$	$di/dt$	$d\Omega/dt$	$d\omega/dt$
0-45	0,0067	-0,0079	-0,2508	0,0009
46-70	0,0010	-0,0012	-0,0516	0,0741
71-100	-0,0008	0,0005	-0,0377	0,0655
101-125	-0,0015	0,0012	-0,0203	0,0387
126-150	-0,0018	0,0015	-0,0139	0,0303
151-175	-0,0019	0,0016	-0,0099	0,0238
176-200	-0,0018	0,0016	-0,0073	0,0192
201-225	-0,0017	0,0015	-0,0055	0,0159
226-250	-0,0016	0,0014	-0,0043	0,0134
251-275	-0,0015	0,0013	-0,0034	0,0116
276-300	-0,0014	0,0012	-0,0028	0,0102
301-325	-0,0013	0,0011	-0,0023	0,0086
326-350	-0,0011	0,0010	-0,0019	0,0079
0-350	-0,0086	0,0049	-0,4117	0,3202

Таблица 2

	$\delta\Omega$		$\delta i$	
	Уран	Нептун	Уран	Нептун
$t-t_0$	0,923 $10^{-1}$	-0,828 $10^{-1}$	-0,684 $10^{-2}$	0,408 $10^{-2}$
$(t-t_0)^2$	-0,341 $10^{-4}$	-0,504 $10^{-5}$		0,171 $10^{-4}$
$(t-t_0)^3$	-0,159 $10^{-7}$	0,732 $10^{-7}$		-0,490 $10^{-7}$
$(t-t_0)^4$		-0,758 $10^{-10}$		0,689 $10^{-10}$
$(t-t_0)^5$		-0,323 $10^{-10}$		0,187 $10^{-12}$

Таблица 3

	$\frac{1}{2} \delta\omega$	$\delta e$	$\delta\omega$	$\delta M_0$
$t-t_0$	0,541 $10^{-2}$	0,923 $10^{-1}$	-0,487	1,039
$(t-t_0)^2$	-0,652 $10^{-5}$	0,294 $10^{-4}$	0,261 $10^{-3}$	-0,258 $10^{-3}$
$(t-t_0)^3$	-0,190 $10^{-7}$	0,220 $10^{-6}$	0,631 $10^{-6}$	-0,752 $10^{-6}$
$(t-t_0)^4$	-0,412 $10^{-10}$	0,253 $10^{-9}$	0,194 $10^{-8}$	-0,163 $10^{-8}$
$(t-t_0)^5$	0,665 $10^{-13}$	0,756 $10^{-12}$	-0,204 $10^{-11}$	0,264 $10^{-11}$

Таблица 4

Плу- тон	Неп- тун	$\frac{1}{2} \delta a$		$\delta e$		$\delta i$	
		cos	sin	cos	sin	cos	sin
0	0	-394",8		-211",1		4",1	
0	0			-0,00864		0,00488	
				$\times(t-t_0)$		$\times(t-t_0)$	
3	-2	749",9	-28",4	407",3	-1",1	-6",0	- 8",1
6	-4	343,4	-20,9	184,9	3,2	-1,7	-12,1
9	-6	183,9	- 9,8	97,4	6,1	0,8	-10,4
12	-8	106,4	- 1,8	55,4	7,5	1,4	- 8,0
15	-10	62,8	3,3	31,9	7,9	1,5	- 5,9
18	-12	37,4	6,1	18,6	7,6	1,4	- 4,3
21	-14	23,4	6,5	11,4	6,5	1,1	- 3,0
24	-16	14,5	6,2	6,9	5,4	0,8	- 2,1
27	-18	9,0	5,4	4,2	4,3	0,6	- 1,4
30	-20	5,6	4,4	2,5	3,3	0,5	- 0,9
		$\delta \Omega$		$\delta \omega$		$\delta M_0$	
		cos	sin	cos	sin	cos	sin
0	0	414",4		-1096",2		229",2	
0	0	-0",412		0",320		0",825	
		$\times(t-t_0)$		$\times(t-t_0)$		$\times(t-t_0)$	
3	-2	109",3	694",4	39",1	-1532",9	-136",2	209",3
6	-4	55,6	251,9	118,5	-486,6	-169,3	37,9
9	-6	32,3	115,9	120,1	-179,8	-147,5	-23,3
12	-8	18,6	58,0	103,9	- 63,7	-117,4	-39,2
15	-10	10,1	30,2	83,1	- 17,6	-88,6	-37,6
18	-12	5,1	16,2	63,5	1,1	-64,6	-31,6
21	-14	2,3	8,9	47,4	9,1	-46,2	-25,9
24	-16	0,8	5,0	34,0	10,6	-32,1	-20,2
27	-18	0,1	2,8	23,8	9,9	-21,8	-15,3
30	-20	-0,3	1,6	16,2	8,3	-14,4	-11,4

Таблица 5

Плу- тон	Возм. тело	Юпитер		Сатурн		Уран	
		cos	sin	cos	sin	cos	sin
$\delta J$							
0	0	3",6		-4",4		-38",0	
0	0	-0",069 <small><math>\times(t-t_0)</math></small>		-0",070 <small><math>\times(t-t_0)</math></small>		-0",068 <small><math>\times(t-t_0)</math></small>	
I	0	-0",5	-3",5	0",1	-2",4	0",4	-1",8
0	I	-21,9	176,2	34,7	10,9	2,5	-3,9
I	-I	130,8	-230,7	-44,2	-36,9	-5,9	3,9
I	I	-63,5	-232,6	-45,4	3,9	-0,5	3,7
3	-I					-35,4	17,6
6	-2					-9,1	-6,9
9	-3					-1,0	-4,3
$\delta i$							
0	0	152",5		-30",8		6",6	
0	0	0",00033 <small><math>\times(t-t_0)</math></small>		0",00023 <small><math>\times(t-t_0)</math></small>			
I	0	-0",4	0",2	-0",04	-0",03	0",1	0",02
0	I	2,7	-21,7	-4,3	-1,4	-0,3	0,5
I	-I	66,7	38,8	10,9	-12,8	-1,4	-1,9
I	I	-67,4	19,3	1,3	13,2	1,1	0,2
3	-I					1,9	-6,3
6	-2					2,3	-1,8
9	-3					1,4	-0,03

	Плутон	Нептун
$a$ (а.е.)	39.672599	30.070672
$e$	0,24706226	0,00853341
$i$	0,29862264	0,030962147
$\Omega$	1,9134432	2,2904654
$\omega$	1,9662576	4,7686060
$M_0$	4,8041498	1,8915900
$n$ (Рад/сут)	$0,68840925 \times 10^{-4}$	$0,10439328 \times 10^{-3}$

## Л и т е р а т у р а

1. Petrovskaya M.C. Expansions of the derivatives of the disturbing function in planetary problems. "Celestial Mechanics", 1972, v.6. N3.
2. Шараф Ш.Г. Теория движения Плутона, ч. I. "Труды Института теоретической астрономии АН СССР", 1955, т.4, с. I-I31.
3. Шараф Ш.Г., Будникова Н.А. Теория движения Плутона, ч. 2-4. "Труды ИТА АН СССР", 1964, т.10, с. I-160.
4. Cohen G.J., Hubbard E.C. Libration of the close approaches of Pluto to Neptune. "Astronomical Journal", 1965, v. 70, N 1, p. 10-13.
5. Hori G., Giacaglia G. Secular perturbations of Pluto. Research in Celestial Mechanics and Differential equations. University of Sao Paulo, CEMC-IPM-USP, 1967, N1.
6. Williams J.C., Benson G.S. Resonances in the Neptune-Pluto system. "Astronomical Journal", 1971, v. 76, N2, p. 167-177.
7. Nacozy P., Diehl R. On the long-term motion of Pluto. "Celestial Mechanics", 1974, v.8, N 4, p. 445-454.

8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, ч. I, М., "Наука", 1973.
9. Прокурин В.Ф. Теория движения Цереры. — Труды Института теоретической астрономии АН СССР, — 1952, вып. II.

### Резюме

Н. И. Лобкова

#### ВЕКОВЫЕ И ДОЛГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПЛУТОНА ОТ НЕПТУНА

Определены вековые и долгопериодические возмущения первого порядка элементов орбиты Плутона от Нептуна. При этом учтены периодические члены, соответствующие кратностям  $3k$  средней аномалии Плутона и  $-2k$  — средней аномалии Нептуна, где  $k = 1, 2, \dots, 10$ . Произведено сравнение полученных результатов с результатами других авторов.

Таблиц — 6, библиогр. — 9 назв.

### K o r r e a v i l k u m e

N. I. Lobkova

#### NEPTUNA RADĪTĀS GADSIMTU UN GARPERIODA PERTURBĀCIJAS PLUTONAM

Noteiktas Neptuna radītās pirmās kārtas gadsimtu un garperiodiskās perturbācijas Plutona orbītas elementiem. Seit ievēroti periodiskie locekļi, atbilstoši Plutona vidējās anomālijas  $3k$  daudzkrātnim un Neptuna vidējās anomālijas  $-2k$  daudzkrātnim, kur  $k = 1, 2, \dots, 10$ . Izdarīta iegūto rezultātu salīdzināšana ar citu autoru rezultātiem.

## Summary

N. I. Lobkova

SECULAR AND LONG-PERIOD PERTURBATIONS OF PLUTO BY  
NEPTUNE

Secular and long-period first order perturbations of Pluto's orbital elements by Neptune have been found. The periodic terms include the multiples  $3\kappa$  and  $-2\kappa$  of Pluto's and Neptune's mean anomalies respectively and  $\kappa = 1, 2, \dots, 10$ . The results obtained are compared with those by other authors.

УДК 517.91

О. М. Юдрупо  
АН ЛССР

КОНТИНУАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ НА ТОРЕ

Для глобальной классификации динамических систем, топологическая эквивалентность оказалась слишком тонкой, поэтому в работе [3] дано определение более широкого отношения эквивалентности — континуальной эквивалентности динамических систем. К сожалению, в настоящей статье доказано, что множество континуальных классов динамических систем имеет мощность континуума.

Итак, пусть  $\varphi, \psi$  — динамические системы на  $m$ -мерном многообразии  $M$ . Положим  $\varphi > \psi$ , если существует непрерывное сюръективное отображение  $F: M \rightarrow M$  такое, что  $F$  отображает траектории системы  $\varphi$  на траектории системы  $\psi$ , при условии, что сохраняется направление движения на траекториях.

Рассмотрим динамическую систему  $\varphi$  на плоскости  $R^2$  определенную уравнением

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

где  $x = (x^1, x^2)$  и  $f(x) = (f^1(x), f^2(x))$ ,  $f \in C$ ,  $f(x^1+1, x^2) = f(x^1, x^2+1) = f(x^1, x^2)$  и  $f$  удовлетворяет условию единственности решения.

Предположим, что

$$f^1(x) > 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (1) будем обозначать через  $\varphi(t, x_0)$ ,  $\varphi(0, x_0) = x_0$ , а траекторию, проходящую через точку  $x_0$  — через  $\varphi_{x_0}$ . Согласно (2),  $\varphi^1(t, x_0) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Следовательно, система не имеет точек покоя.

Пусть имеем накрытие  $h, R^2 \rightarrow T^2$ . Тогда динамическая система  $\varphi$  определяет динамическую систему  $h\varphi$  на то-

ре  $T^2$ . Для таких систем известно, что существует предел

$$\mu = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi^2(t, x_0)}{\varphi^1(t, x_0)},$$

не зависящий от  $x_0$  и называемый числом вращения. Если

$x_k = \varphi^2(t_k, 0)$ , где  $\varphi^1(t_k, 0) = k$ , то

$$\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_k^2}{k}.$$

Пусть  $h\varphi = \psi h$ . Тогда отображение  $F: T^2 \rightarrow T^2$  индуцирует непрерывное сюръективное отображение  $H: R^2 \rightarrow R^2$  такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T^2 & \xrightarrow{F} & T^2 \\ h \uparrow & & \uparrow h \\ R^2 & \xrightarrow{\quad} & R^2 \end{array}$$

коммутативна. В частности  $H(\varphi(R, \cdot)) = \psi(R, H(\cdot))$ , а в силу сюръективности  $F$  имеем  $H(x^1+1, x^2) = (H^1(x)+m, H^2(x)+n)$ ,  $H(x^1, x^2+1) = (H^1(x)+p, H^2(x)+q)$ , где  $m, n, p, q$  целые числа. И так имеем  $\varphi > \psi$ . Повторяя суждения работы [1], имеем

Лемма I. Если  $\varphi > \psi$ , то справедливо соотношение

$$\tilde{\mu} = \frac{n + q\mu}{m + p\mu}, \quad (3)$$

где  $\mu, \tilde{\mu}$  являются числами вращения соответственно систем  $\varphi, \psi$ ,  $m$  и  $n$ , а также  $p$  и  $q$  взаимно просты.

Доказательство. Пусть  $H(R \times 0) = \mathcal{J}_1$ ,  $H(0) = 0$ ,  $H(m, n) \in \mathcal{J}_1$ . Рассмотрим траекторию  $\varphi_0$  системы  $\varphi$ . Соответствующая траектория системы  $\psi$  будет  $H(\varphi_0) = \varphi_0$ , так как  $H(0) = 0$ . Пусть  $x_0 = 0$ ,  $x_k = \varphi_0 \cap k \times R$ , тогда  $\tilde{x}_k = H(x_k) \in \mathcal{J}_0 + (k\mu, k\nu)$ , где  $\mathcal{J}_0 = H(0 \times R)$ , а выражение  $\mathcal{J}_0 + (k\mu, k\nu)$  обозначает кривую  $\mathcal{J}_0$ , сдвинутую на

$kn$  по направлению оси  $x^1$  и на  $kn$  — по направлению оси  $x^2$ . Пусть далее  $x_n \in R \times (S_n, S_n + 1)$ , где  $S_n = [x_n^2]$  ( $[\cdot]$  означает целую часть). Тогда  $\tilde{x}_n$  находится между линиями  $J_1 + (S_n p, S_n q)$  и  $J_1 + ((S_n + 1)p, (S_n + 1)q)$ , т.е.  $\tilde{x}_n = (kn + pS_n + \xi_n^1, kn + qS_n + \xi_n^2)$ , где  $|\xi_n^1| < |p|$ ,  $|\xi_n^2| < |q|$ . Поэтому в силу равенства  $\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{S_k}{k}$  имеем

$$\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{kn + S_k q + \xi_k^2}{kn + S_k p + \xi_k^1} = \frac{n + q\mu}{m + p\mu},$$

чем и закончено доказательство леммы.

Если число вращения  $\mu$  иррационально, то различаем два случая: эргодический и сингулярный.

Лемма 2. Для любой сингулярной системы  $\varphi$  существует некоторая эргодическая система  $\psi < \varphi$ .

Доказательство. Пусть  $\varphi$  сингулярная динамическая система, определенная на торе  $T^2$ . Для системы  $\varphi$  на  $T^2$  существует глобальная секущая — подмногообразие  $S^1 = h(0 \times R)$  и пусть  $\bar{\varphi}$  — диффеоморфизм последования, определенный системой  $\varphi$ . Пусть  $f: S^1 \rightarrow S^1$  канторова функция [2], которая непрерывна, сюръективна, постоянна на смежных интервалах. Определим гомеоморфизм  $\bar{\psi}: S^1 \rightarrow S^1$ , полагая  $\bar{\psi}(x) = f \circ \bar{\varphi} \circ f^{-1}(x)$ . Пусть  $\psi$  является надстройкой гомеоморфизма  $\bar{\psi}$ . Тогда отображение  $F: T^2 \rightarrow T^2$  следующая

$$F(x) = \psi(t, f(\varphi(-t, x))).$$

где  $\varphi(-t, x) \in h(0 \times R)$ . Лемма доказана.

Теорема 1. Множество непрерывных [3] классов динамических систем без точек покоя на торе, траектории которых пересекают меридианы тора в одном направлении, имеет мощность континуума.

Теорема доказывается аналогично лемме 4.2 [1], если вместо леммы 2.2 [1] использовать лемму 1.

Лемма 3. Для любой динамической системы  $\varphi$  с числом вращения  $\mu$  существует система  $\psi < \varphi$  с числом вращения

$$\tilde{\mu} = \frac{n + q\mu}{m + p\mu},$$

где  $m, n, p, q$  - целые числа и  $|mq - np| \geq 1$ .

. Доказательство. отображение  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  уже построено в лемме 2.1 [I], которое является гомеоморфизмом даже, если  $|mq - np| > 1$ . Следует отметить, что отображение  $F: T^2 \rightarrow T^2$ , которое отображает траектории системы  $h\varphi$  на траектории системы  $h\psi$ , где  $F(x) = h \circ H \circ h^{-1}(x)$ , не является гомеоморфизмом.

Теорема 2. Эргодические системы являются минимальными системами [4] для динамических систем на  $T^2$  с иррациональным числом вращения.

Доказательство. Допустим противное. Пусть  $\varphi$  - эргодическая система с числом вращения  $\mu$ , для которой существует минимальная система  $\omega < \varphi$  и соотношение  $\varphi < \omega$  не истинно. Но согласно лемме I справедливо соотношение (3). Если обозначить  $m' = q$ ,  $n' = n$ ,  $p' = p$ ,  $q' = -m$  и применить лемму 3 для этих констант и числа вращения  $\bar{\mu}$ , где  $\bar{\mu}$  - число вращения системы  $\omega$ , то получим  $\omega > \bar{\varphi}$ . Системы  $\bar{\varphi}$  и  $\varphi$  имеют одинаковое число вращения  $\mu$ , а в силу леммы 4.1 [I] эти системы топологически эквивалентны, что противоречит допущенному. Согласно лемме 2 эргодические системы являются минимальными для сингулярных систем.

Теорема 3. Динамические системы с рациональным числом вращения имеют только три класса континуально эквивалентных систем.

Доказательство. Пусть система  $\varphi$  имеет рациональное число вращения. Согласно следствию 2.3 [I] существует система  $\psi$ , топологически эквивалентная системе  $\varphi$ , с  $\mu = 0$ . Согласно лемме 14.1 ([5], стр. 239) для динамической системы  $\psi$  существует глобальное окружющее многообразие  $S^1$  и диффеоморфизм последования  $\bar{\psi}$  на  $S^1$ . Пусть на  $T^2$  существует открытое множество  $A$  незамкнутых траекторий системы  $\varphi$ , предельное множество которых состоит из замкнутых траекторий  $\psi_{x_1}, \psi_{x_2}, \dots, \psi_{x_n}$ ,  $x_2 \in S^1$ . Допустим, что  $x_1 \neq x_2$  и рассмотрим отображение  $f: S^1 \rightarrow S^1$ ,  $f(0) = f(2\pi)$ ,

$$f(\theta) = \begin{cases} \theta, & \text{если } \theta \in [0, \theta_1], \\ \theta_1, & \text{если } \theta \in [\theta_1, \theta_2], \\ p(\theta), & \text{если } \theta \in [\theta_2, 2\pi], \end{cases}$$

где  $\theta_1, \theta_2$  является координатами точек  $x_1, x_2$ ,  $p(\theta) =$

$$= \frac{2\pi - \theta_1}{2\pi - \theta_2} \theta + \frac{2\pi(\theta_1 - \theta_2)}{2\pi - \theta_2}. \text{ При этом, если } \theta \in [\theta_1, \theta_2],$$

то ей соответствующая точка  $x \notin A \cap S^1$ . Положим  $\bar{\omega}_1(x) = f \circ \bar{\psi} \circ f^{-1}(x)$ , где  $x \in S^1$ . Пусть  $\omega_1$  является надстройкой гомеоморфизма  $\bar{\omega}_1$ . Очевидно, система  $\omega_1$  имеет только одну замкнутую траекторию. Если положить, что множество  $A$  состоит только из замкнутых траекторий, то аналогично получим систему  $\omega_2$ , которая имеет только замкнутые траектории. Очевидно, системы  $\omega_1$  и  $\omega_2$  являются минимальными. Легко показать, что других минимальных систем для  $f \neq 0$  не существует. Следовательно, имеем только три класса континуально эквивалентных систем.

За постановку задачи автор благодарит своего научного руководителя Л.Э. Рейзиня.

### Л и т е р а т у р а

1. Рейзинь Л.Э. Топологическая классификация динамических систем без точек покоя на торе. "Латвийский математический ежегодник", 1969, вып.5, с. 113-121.
2. Дьеддонне Ж. Основы современного анализа. М., "Мир", 1964.
3. Юдрупс О.М. Континуальная эквивалентность динамических систем. "Латвийский математический ежегодник", 1976, т.20, с.138-140.
4. Юдрупс О.М. Минимальные системы на плоскости. "Латвийский математический ежегодник", 1976, т.20, с.133-137.
5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., "Мир", 1970.

## Резюме

О. М. Юдрис

КОНТИНУАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
НА ТОРЕ

Доказано, что множество классов континуально эквивалентных динамических систем, траектории которых пересекают меридианы тора в одном направлении, имеет мощность континуума. Библиогр. — 5 назв.

## K o r s a v i l k u m s

O. J u d r i s

## DINAMISKO SISTĒMU KONTINUĀLĀ EKVIVALENCE UZ TORĀ

Apskatītas dinamisko sistēmu, kuru trajektorijas šķērso tora meridiānu vienā virzienā, kontinuušķās ekvivalences klases. Pierādīts, ka šādu klasu kopai ir kontinuma apjoms.

## S u m m a r y

O. J u d r i s

## CONTINUAL EQUIVALENCE OF DYNAMICAL SYSTEMS ON TORUS

The classes of continual equivalence of dynamical systems on torus all trajectories of which intersect meridian in one and the same direction are considered. It is proved that the set of such classes has the cardinality of continuum.

УДК 522.9

К. А. Штейнс,  
Э. Я. Каупуш,  
П. П. Розенберг  
ЛГУ им. П. Стучки

### О ТОЧНОСТИ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ РЕГИСТРАЦИИ МОМЕНТОВ ПРОХОЖДЕНИЯ ЗВЕЗД

Регистрация моментов прохождения звезд безличным микрометром в большой мере считалась независимой от наблюдателя и оценивалась по формуле

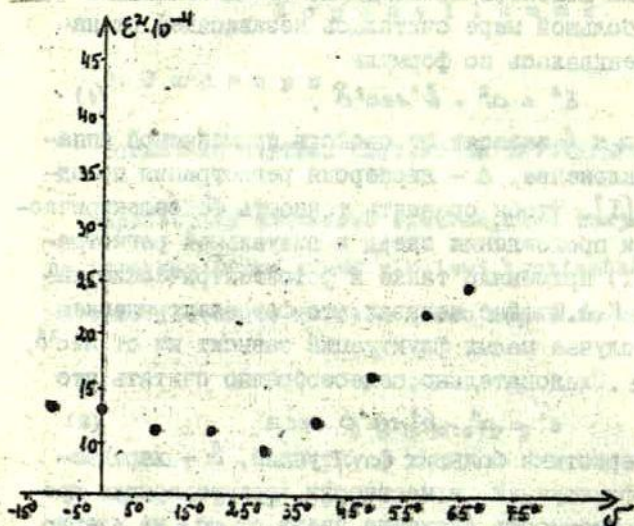
$$\varepsilon^2 = a^2 + b^2 \sec^2 \delta, \quad (1)$$

где параметры  $a$  и  $b$  зависят от свойств применяемой аппаратуры,  $\delta$  — склонение,  $\varepsilon$  — дисперсия регистрации по одному контакту [1]. Чтобы сравнить точность фотоэлектрической регистрации прохождения звезд с визуальной регистрацией, формулу (1) применяли также к фотоэлектрическим наблюдениям [1]. К. А. Штейнс показал, что фотоэлектрическая регистрация в случае малых флуктуаций зависит не от  $\sec^2 \delta$ , а от  $\sec^2 \delta \sec z$ . Следовательно, целесообразно считать, что

$$\varepsilon^2 = a^2 + b^2 \sec^2 \delta \sec z, \quad (2)$$

где  $a$  — характеристика больших флуктуаций,  $b$  — характеристика малых флуктуаций, в частности, характеристика дрожаний звезд. Зависимость дрожания звезд от  $\cos z$  не всегда представляется первой степенью  $\cos z$  — все зависит от состояния атмосферы, в частности, от состояния воздуха в трубе. Для повышения точности определения времени пассажным инструментом В. Э. Брандт предложил направлять на пассажный инструмент поток воздуха вентилятором [3]. Естественно, что в таком случае зависимость  $\varepsilon^2$  от  $z$  изменится. В настоящей статье на основе определения дисперсии моментов регистрации 7633 звезд изучается точность регистрации моментов прохождений в АО Латв. гос. университета [4]. Соответ-

ствующие значения  $\epsilon$  были определены автоматически методом регистрации выбросов [2]. В частности, сравниваются преимущества и недостатки формул (1) и (2). Все звезды разделены на 9 групп по их склонению с интервалами  $10^\circ$ . При анализе выяснилось, что группу  $\delta (+65^\circ, 75^\circ)$  целесообразно разделить на две группы. Для каждой группы определялись  $\epsilon^2$  двумя способами. Во-первых, вычислялась сумма квадратов отклонений и делилась на их число. Во-вторых, дисперсия определялась как параметр нормального распределения при помощи анализа выборки. За исключением интервала  $\delta (70^\circ, 75^\circ)$ , имелся избыток больших значений флуктуаций. В случае  $\delta (70^\circ, 75^\circ)$  в выборке не обнаружено больших значений флуктуаций (усеченное нормальное распределение). Несогласие в значениях  $\epsilon^2$  достигало 20%.



На графике показаны значения  $\epsilon^2$ , определенные по первому способу. Из графика непосредственно видно, что при больших зенитных расстояниях на точности регистрации сказывается дрожание звезд, следовательно формула (1) не применима. Однако формула (2) также не дает минимума  $\epsilon^2$  при  $\delta = 30^\circ$ . Возможно, что смещение минимума вызвано потоком воздуха, направленным на трубу пассажного инструмента. Из графика видно, что моменты прохождения звезд со склоне-

нием ( $70^\circ, 75^\circ$ ) регистрируются особенно плохо. Мы предлагаем следующее объяснение этому явлению. Вследствие криволинейного пути звезды с большим склонением, ее изображение приближается к краю дорожки. Так как край дорожки закрыт лезвием, которое плохо отшлифовано, то в фототоке наблюдаются большие флуктуации, которые не компенсируются. Не компенсируются также изменения в регистрируемом моменте прохождения, т.к. края, к которым приближается звезда перед и после перекладки инструмента, различны. Следовательно, неточными получаются и моменты прохождений звезд с большими склонениями.

Чтобы сравнить точность регистрации моментов прохождений в АО Латв. гос. унив. с представленной в литературных источниках мы решили вычислить аналогичные характеристики, хотя формула (I) плохо представляет точность регистрации моментов прохождений в АО Латв. гос. университета. Определения  $\alpha$  и  $\beta$  велись по данным с объединенными значениями  $\delta$  ( $65^\circ, 70^\circ$ ) и  $\delta$  ( $70^\circ, 75^\circ$ ). Результат помещен в следующей таблице (табл. I).

Таблица I

Кем или где произведены наблюдения	N	$\alpha$	$\beta$
Альбрехт	100	0,055	0,037
Боррас	100	0,051	0,045
Дурелл	120	0,045	0,033
Швейцария	86	0,031	0,030
Уинк (от. инстр.)	112	0,033	0,040
Уинк (новый инстр.)	112	0,026	0,038
Свердловск	90	0,024	0,028
Константинов	81	0,017	0,022
Брандт (фотохронограф)	90	0,039	0,024
АО Латв.ГУ автоматическая регистрация средних моментов прохожд. звезд методом случайных выбросов	7633	$0,030 \pm 0,002$	$0,016 \pm 0,002$

Точность регистрации моментов прохождений звезд в АО Латв. гос. университете по сравнению с фотохронографом несколько возрасла. По нашему мнению, уменьшение значений  $\alpha$  и  $\delta$  указывает на развитие фотоэлектрической регистрации моментов прохождений за последние десятилетия.

### Л и т е р а т у р а

1. Долгов П.Н. Определение времени пассажным инструментом в меридиане. М., "Госизд. технико-теоретической лит." 1952.
2. Штейнс К.А. Формула для определения дисперсии моментов прохождения звезд в зависимости от их дрожания. - "Уч. зап. Латв.ГУ", 1971, т.148, с.29.
3. Брандт В.Э. Влияние внешней среды на наблюдения звезд пассажным инструментом. - "Астрономический журнал", 1967, т.44, № 1.
4. Штейнс К.А., Розенберг П.П. Приспособление для автоматического определения дисперсии средних моментов прохождения звезд. - "Уч. зап. Латв.ГУ", 1973, т.190, с.54.

### Р е з ю м е

К. А. Ш т е й н с ,  
Э. Я. Каупуш,  
П. П. Розенберг

#### О ТОЧНОСТИ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ РЕГИСТРАЦИИ МОМЕНТОВ ПРОХОЖДЕНИЯ ЗВЕЗД

На основе примерно 7000 дисперсий регистрации моментов прохождения звезд, полученных при помощи специального прибора, сконструированного К.А.Штейнсом и П.П.Розенбергом, показано, что моменты прохождений звезд со склонениями  $70^\circ - 75^\circ$  регистрируются особенно плохо. Это объяснено криволинейным путем изображения звезд по дорожке с неидеальными краями экранировки.

Таблиц - I, иллюстр. - I, библиогр. - 4 назв.

K. S t e i n s ,  
E. K a u p u s a ,  
P. R o z e n b e r g s

PAR ZVAIGZNU TRANZĪTMOMENTU FOTOLEKTRISKĀS  
REĢISTRĀCIJAS PRECIZITĀTI

Pamatojoties uz apmēram 7000 reģistrētām zvaigžņu tranzītmomentu dispersijām, kas iegūtas ar speciālu iekārtu, ko konstruēja K.Šteins un P.Rozenbergs, parādīts, ka vislielāki kļūmju reģistrējamie tranzītmomentu zvaigznēm ar deklinācijām  $70^{\circ}$  -  $75^{\circ}$ . To izsaka zvaigznes liklīnijas ceļš pa režģi ar neideālām ekranizējuma malām.

S u m m a r y

K. S t e i n s ,  
E. K a u p u s a ,  
P. R o z e n b e r g s

ON THE ACCURACY OF THE STAR TRANSIT MOMENT  
PHOTOELECTRIC RECORDING

The dispersions of about 7000 star transit moments photoelectric registrations obtained with a special device constructed by K.Steins and P.Rozenbergs show that transit moments for stars with declinations from  $70^{\circ}$  to  $75^{\circ}$  are of least precision. It is due to curvilinear paths of high declination stars touching uncoated edges of the mirror grating.

УДК 522.982

Л. А. Розе,  
Л. Ф. Розе  
ЛГУ им. П. Стучки

### УСТОЙЧИВОСТЬ АЗИМУТА ПАССАЖНОГО ИНСТРУМЕНТА ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

В процессе усовершенствования наблюдений, при выборе программы наблюдений и разработке наиболее рационального способа обработки наблюдательного материала необходимы сведения об устойчивости пассажного инструмента, в том числе и об устойчивости его азимута.

Просмотр наблюдательного материала на пассажном инструменте АПМ-10 № 580003 службы времени Латвийского государственного университета показал значительные изменения азимута инструмента как в течение ночи, так и в течение года.

Для исследования изменений азимута нами были проанализированы наблюдения 1971, 1972 и 1973 годов. Этот период был выбран потому, что в течение упомянутого интервала времени не производилась регулировка азимута инструмента. За это время наблюдения проводили: Каупуш Э.Я. — 68 ночей (2092 звезд), Розе Л.А. — 55 (1752), Розе Л.Ф. — 81 (2813) и Рунгайне И.К. — 114 (4599) соответственно,

Обработка наблюдений производилась в системе Сводного каталога служб времени [1] видеоизменным методом наименьших квадратов. Суть этого метода вычислений заключается в том, что для каждой почасовой группы, содержащей 12 — 16 звезд, составлялась система условных уравнений по формуле Майера. Из каждого уравнения вычиталось среднее арифметическое и далее решалась новая система с одним неизвестным — азимутом инструмента — методом наименьших квадратов.

В качестве исходного материала брались средние значения азимута инструмента для каждой ночи наблюдений. Эти величины азимута по данным Международного Бюро времени [2] по формуле Костинского исправлялись за движение полюса. Исправленные таким образом значения азимута осреднялись по десятидневным интервалам времени и наносились на график (рис. I). Из рис. I видна значительная волна изменения азимута в течение года, повторяющаяся из одного года к другому.

Для выяснения влияния ошибок каталога на значения азимута нами использовались почасовые значения азимута.

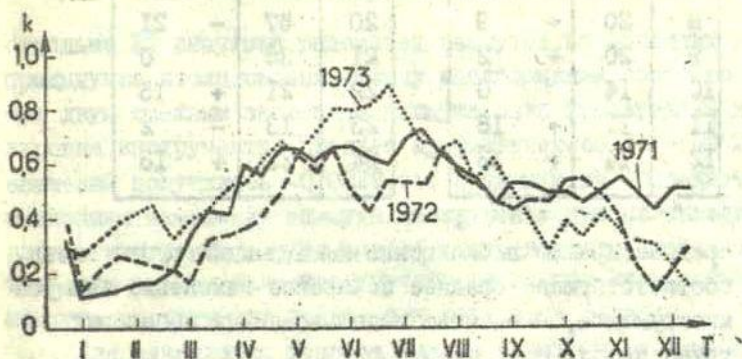


Рис. I. Значения азимута инструмента в течение года. На оси T — десятидневные интервалы времени. На оси k — азимут инструмента в секундах времени.

Составлялись разности между почасовыми значениями азимута инструмента одной ночи в смысле "последующее значение минус предыдущее". Для каждой такой разности определялось среднее прямое восхождение звезд, по которым оно определено. После осреднения по прямым восхождениям и линейного выравнивания эти значения приведены в табл. I. Как видно из табл. I, зависимость азимута от прямых восхождений звезд на порядок меньше изменений азимута в течение года. Можно предположить, что причина годовых изменений азимута в основном термического происхождения.

Распределение почасовых изменений азимута по прямым восхождениям

$\alpha$	$n$	$\Delta\kappa$	$\alpha$	$n$	$\Delta\kappa$
I <sup>h</sup>	15	+0,004	I3 <sup>h</sup>	14	-0,008
2	15	+ 10	I4	15	- 7
3	18	+ 12	I5	31	- 11
4	8	+ 16	I6	30	- 6
5	4	+ 4	I7	20	- 13
6	4	+ 32	I8	19	- 24
7	13	- 25	I9	43	- 11
8	20	- 9	20	57	- 21
9	20	+ 2	21	38	0
10	14	0	22	21	+ 15
11	11	+ 18	23	13	- 2
12	14	+ 13	24	23	+ 13

$\alpha$  - среднее прямое восхождение наблюдаемой группы звезд,  
 $\Delta\kappa$  - соответствующее среднее почасовое изменение азимута  
инструмента,  $n$  - число использованных почасовых  
групп звезд.

Среднее арифметическое почасовых изменений азимута инструмента для 1971, 1972 и 1973 годов получились  $-0,0229$ ,  $-0,0242$  и  $-0,0292$  соответственно. Как видно из этих чисел, в среднем изменение азимута в течение часа весьма устойчиво. Распределение отдельных значений почасовых изменений азимута инструмента характеризует рис. 2.

Для оценки влияния изменения азимута на поправку часов нами выбраны 13 почасовых групп звезд, характерных наибольшими изменениями азимута инструмента в течение их наблюдений. При обработке их учтено линейное изменение азимута. По каждой упомянутой группе звезд был подсчитан соответствующий поправочный член поправки часов, в экстремальном случае достигший  $0,007$ .

Нами исследовалось также влияние нивелировки инструмента на изменение азимута. Для этого было выделено

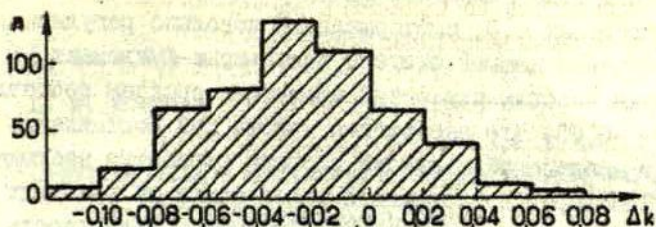


Рис. 2. Распределение почасовых изменений азимута. На оси  $\Delta k$  - значения почасовых изменений азимута в секундах времени. На оси  $n$  - число случаев почасовых изменений азимута,

отдельно 27 значений разностей азимутов, не вошедших в предыдущие исследования. Между наблюдениями, соответствующим двум смежным значениям азимута, была произведена нивелировка инструмента. Среднее арифметическое из этих 27 значений получилось  $-0^{\circ},0229$ , что практически совпадает со значением изменения азимута инструмента при не-нивелированном инструменте. Это исследование дает нам право считать, что нивелировка инструмента не влияет на устойчивость азимута инструмента больше, чем остальные факторы.

Для вычисления вопроса, какова связь между изменением наклонности инструмента с изменением азимута, нами было сделано следующее. Для каждой ночи наблюдений была подсчитана средняя арифметическая наклонность и образованы разности с наклонностями каждой отдельной поправки часов. То же было вычислено и для азимута инструмента. По этим разностям был подсчитан коэффициент корреляции линейной корреляционной связи, характеризующий зависимость между изменением наклонности и изменением азимута. Значения коэффициента корреляции получились для 1971, 1972 и 1973 годов  $-0,47$ ;  $-0,42$  и  $-0,47$  соответственно. Эти результаты свидетельствуют о том, что нет основания считать изменение азимута зависящим от изменения наклонности.

Таким образом можно сделать следующие выводы, характеризующие устойчивость азимута пассажного инструмента служб времени Латвийского государственного университета:

1. В течение года изменение азимута происходит в весьма больших пределах  $0^{\circ},8$ , повторяющееся довольно регулярно. Это свойственно данной системе инструмент-фундамент.
2. Значения часовых изменений азимута в среднем составляют  $-0^{\circ},02 \div -0^{\circ},03$ , что необходимо учесть при составлении программы наблюдений и выбора способа обработки наблюдений.
3. Нивелировка пассажного инструмента не приводит к дополнительному изменению азимута, что дает возможность при необходимости нивелировку производить в процессе наблюдений.

### Л и т е р а т у р а

1. Павлов Н.Н., Афанасьева П.М., Старицын Г.В. Сводный каталог служб времени СССР. — Труды ГАО, 1971, т. XXVIII, серия П.
2. Bureau International de l'Heure, Rapport annuel pour 1971, 1972, et 1973.

### Р е з ю м е

Л. А. Розе,

Л. Ф. Розе

#### УСТОЙЧИВОСТЬ АЗИМУТА ПАССАЖНОГО ИНСТРУМЕНТА ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

В статье показано, что в течение года происходит термическое изменение азимута пассажного инструмента в пределах  $0^{\circ},8$ . Среднее изменение азимута во время наблюдений в пределах  $-0^{\circ},02 \div -0^{\circ},03$  в час должно учитываться при составлении программы и при выборе методики обработки наблюдений. Произведенные опыты позволяют сделать вывод, что при необходимости возможна нивелировка инструмента в процессе наблюдений. Таблиц — 1, иллюстр. — 2, библиогр. — 2 назв.

L. A. R o z e ,

L. F. R o z e

LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES PASĀZINSTRUMENTA  
AZIMUTA STABILITĀTE

Darbē parādīts, ka termisku iemeslu dēļ LVU pasāz-instrumenta azimuts gada laikā mainās  $0,8^{\circ}$  robežās. Azimu-ta maiņas novērojumu laikā, kuru vidējā vērtība ir  $-0,02^{\circ} +$   
 $-0,03^{\circ}$  stundā, jāievēro, sastādot novērojumu programmu un izvēloties aprēķinu metodiku. Izdarītie eksperimenti ļauj secināt, ka nepieciešamības gadījumā pieļaujama instrumen-ta nivelēšana novērojumu laikā.

S u m m a r y

L. A. R o z e ,

L. F. R o z e

AZIMUTH STABILITY OF THE TRANSIT INSTRUMENT  
OF THE LATVIAN STATE UNIVERSITY

In this paper the annual change of azimuth due to thermal effects is estimated to lie within  $0,8^{\circ}$ . The average azimuth change may reach minus  $0,02^{\circ} + 0,03^{\circ}$  hourly during observations, necessitating a careful choice of the observation program and the reduction method. Experiments also show that levelling of the instrument may be permissible during observations without causing any significant harmful effects.

УДК 522.61

В. В. Х а р и ч е в

ЛГУ

## ИНВАРИАНТЫ И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ

### ОТОЖДЕСТВЛЕНИЯ ЗВЕЗД В КАТАЛОГЕ

Для задачи отождествления звезд на снимке  $S$ , полученном в результате фотографирования какого-либо участка неба, со звездами из каталога  $K$  естественно использование инвариантов для преобразований движения плоскости /сдвиги и вращения/ и, возможно, гомотетии. Параметр гомотетии привносится в процессе фотографирования самой оптической системой и его можно исключить или даже пренебречь им [1].

Каталог  $K$  представляет собой набор конфигураций звезд, /в каждой конфигурации  $t_r$  звезд/ с нагрузками - вектор  $\alpha_r$ . Размерность  $\alpha_r$  равна  $t_r$ . Компоненты вектора нагрузок есть, например, диаметры звезд на снимке или их видимые величины. В такой постановке задача отождествления состоит в отыскании конфигурации  $s$  на снимке  $S$

$$k = \phi(s),$$

где  $k$  одна из конфигураций звезд каталога,  $\phi$  - преобразование трансляции и вращения плоскости. Причем векторы нагрузок  $\alpha$  и  $\beta$  для конфигураций точек  $k$  и  $s$  связаны соотношением

$$|\alpha - \lambda\beta| < \Delta; \quad \Delta, \lambda > 0. \quad (1)$$

Число  $\lambda$  обусловлено разной светочувствительностью фотопластинок или фотопленок, а также временем экспозиции.

Соотношение (1) служит основой при организации поиска конфигурации  $s$  с вектором нагрузок  $\beta$  на снимке. Для

поиска используется метод сортировки по "ящикам" последовательно поступающей информации о видимых величинах звезд снимка. Роль "ящиков" играют компоненты вектора  $\alpha$ .

Для реализации этого метода требуется выполнение условия, при котором видимые звездные величины в каталоге и уровни почернения звездных изображений на снимке были бы, примерно, пропорциональны по всей шкале используемых звездных величин.

Система координат на снимке не предполагается идеальной. Поэтому для окончательной идентификации конфигурации точек на снимке

$$z_j = \alpha_j + i \delta_j, \quad i^2 = -1,$$

с фиксированной конфигурацией  $k$  звезд из каталога, нагрузки /спектральные характеристики, почернения/ которых примерно удовлетворяют (1), используется полная система инвариантов относительно группы преобразований

$$I_p s = \sum_{j=1}^t (z_j - \bar{z})^{p+1} / t \exp(p+1)\varphi_i, \quad p=1, 2, \dots, t, \quad (2)$$

где  $t$  - число точек в конфигурации  $s$ ,  $\varphi$  - угол между фиксированным вектором, привязанным к конфигурации  $s$ , и осью абсцисс на снимке,  $\bar{z}$  - геометрический центр конфигурации.

Для конфигураций точек на плоскости, отличающихся разве что сдвигом и вращением, упорядоченный набор чисел (2) один и тот же

$$I_p \phi s = I_p s.$$

Верно и обратное утверждение [2].

Такой метод отождествления точечных конфигураций обладает определенной устойчивостью к ошибкам измерения координат звезд в плоскости снимка.

Именно, если комплексное число  $\varepsilon_j$  - ошибка измерения координат точки  $z_j$ , то  $I_p^k$  - инвариант искаженной конфигурации стремится к  $I_p$  - инварианту точно измеренной конфигурации.

Легко выводится, убеждающая в этом оценка

$$|I_{ps} - I_{ps}^{\epsilon}| \leq A(p, R) \epsilon,$$

$R$  - радиус точно измеренной конфигурации,  $\epsilon$  - максимальная по модулю погрешность измерения координат точек снимка.

$$\epsilon = \max_{j=1,2,\dots,t} |\epsilon_j - \bar{\epsilon}|,$$

$$\bar{\epsilon} = \sum_{j=1}^t \epsilon_j / t.$$

Таким образом точность идентификации определяется ошибками измерения координат точек  $\epsilon$  и нагрузок  $\Delta$ .

### Л и т е р а т у р а

1. Балодис Я.К. Об автоматическом отождествлении звезд. - "Уч.записки Латв.УУ", 1972, т.169.
2. Харичев В.В., Шмидт А.А., Якубович В.А. Об одной новой задаче распознавания образов. - "Автоматика и телемеханика". 1973, № 1.

### Р е з ю м е

В. В. Х а р и ч е в

#### ИНВАРИАНТЫ И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОТООЖДЕСТВЛЕНИЯ ЗВЕЗД В КАТАЛОГЕ

В работе дано математическое описание метода идентификации звездных конфигураций по двум критериям на фотоснимках неба. Его основой является использование полной системы инвариантов относительно группы движения на плоскости. Метод наиболее эффективен в случае, когда большинство звезд снимка заведомо имеются в каталоге и имеет место примерная пропорциональность между видимыми звездными величинами в каталоге и их почернениями или диаметрами на снимке.

## K o p s a v i l k u m s

V. H a r i c e v s

INVARIANTI UN KĻŪDU NOVĒRTĒJUMS ZVAIGZŅU  
IDENTIFIKĀCIJĀS UZDEVUMAM

Darbā dots zvaigzņu konfigurāciju identifikācijas metodes matemātiskais apraksts, izmantojot divus kritērijus. Tā balstās uz pilnas invariantu sistēmas pielietosanu pret grupas pārvietojumu uz plaknes. Metode darbojas efektīvi gadījumā, kad visos fotouzņēmumos identificējamās zvaigznes ir atrodamas zvaigzņu katalogā un ir spēkā proporcionalitāte starp vizuālajiem zvaigzņu lielumiem katalogā un to diametriem jeb blīvumiem uz kadra.

## S u m m a r y

V. K h a r i s h e v

INVARIANTS AND ERROR ESTIMATE OF THE  
STAR IDENTIFICATION PROBLEM.

This paper contains mathematical description of the two-criteria method for identifying star images on photographic frames. It is based on the use of the complete system of invariants for the group of movements on a plane. The proposed method is most effective when every star on the frame is almost certain to be present in the catalogue and when star image diameters (or degrees of darkening) on the frame are rather strictly proportional to their magnitudes (in the catalogue).

## С о д е р ж а н и е

I. К. А. Штейнс. Оценка боковой рефракции . . . . .	3
2. К. А. Штейнс, Э. Я. Кауцун, П. П. Розенберг. Сферически- слончатая модель рефракции атмосферы с линейными поправками . . . . .	II
3. М. К. Абеле, Я. В. Вяттер. Об определении ориентации орбитальной оси монтировки телескопа . . . . .	22
4. Я. В. Вяттер. К вопросу об определении звезд, пере- секающих зону наблюдения ИСЗ . . . . .	28
5. А. В. Иванов, П. П. Розенберг. Автоматическая на- стройка генератора меток в устройстве опреде- ления средних моментов прохождений звезд . . . . .	39
6. А. Д. Погоний, Е. В. Хруцкая. Автоматическая запись и обработка отсчетов окулярного микрометра ме- ридианного круга . . . . .	46
7. К. А. Штейнс, А. В. Иванов. Зеркальная визирная ре- шетка для автоматического наведения трубы на звезду . . . . .	55
8. М. К. Абеле. Испытание оптического компенсатора наклона на фотоэлектрическом отражательном зе- нитном телескопе . . . . .	59
9. И. А. Ревина. Влияние селекции открытия в распре- делении комет . . . . .	63
10. К. А. Штейнс, И. А. Ревина. Устойчивость почти пара- болических орбит в кометном облаке . . . . .	76
II. Л. К. Лауцениек. Вычисление области подвижного барьера методом минимизации . . . . .	90
12. Ю. Х. Загар. Однопараметрические семейства эле- ментов орбит ИСЗ . . . . .	108
13. Ю. Х. Загар. Определение постоянных параметризации I2I	
14. Н. И. Лобкова. Вековые и долгопериодические возму- щения Плутона от Нептуна . . . . .	136

15. О.М.Юдрупс. Континуальная эквивалентность динамических систем на торе . . . . . 151
16. К.А.Штейнс, Э.Я.Каупуш, П.П.Розенберг. О точности фотозлектрической регистрации моментов прохождения звезд . . . . . 157
17. Л.А.Розе, Л.Ф.Розе. Устойчивость азимута пассажного инструмента Латвийского государственного университета . . . . . 162
18. В.В.Харичев. Инварианты и оценка погрешности для задачи отождествления звезд в каталоге . . . . . 168

## C o n t e n t s

1. K.Šteins. Estimation of lateral refraction . . . . . 3
2. K.Šteins, E.Kaupuša, P.Rozenbergs. A spherical lamellar atmospheric refraction model with linear corrections . . . . . 11
3. M.Ābele, J.Vjaters. On the determination of the telescope orbital axis orientation . . . . . 22
4. J.Vjaters. On the determination of the stars crossing the AES observation zone . . . . . 28
5. A.Ivanovs, P.Rozenbergs. Automatic adjustment of the mark generator in the star mean transit moment recorder . . . . . 39
6. A.Pogony, E.Khrutskaya. Automatic tape-recording and treatment of the readings of meridian circle ocular micrometer . . . . . 48
7. K.Šteins, A.Ivanovs. A mirror grating for automatic telescope pointing on a chosen star . . . . . 55
8. M.Ābele. Testing of an optical compensator on photoelectric reflecting zenith tube . . . . . 59

9. I.Revina. Influence of the discovery selection  
in the distribution of comets . . . . . 63
10. K.Šteins, I.Revina. Stability of quasi-parabolic  
orbits in the cometary cloud . . . . . 76
11. L.Lauceniēks. Computation of the mobile barrier  
area by minimization method . . . . . 90
12. J.Žagars. Single parameter sets of satellite  
orbital elements . . . . . 108
13. J.Žagars. Calculation of parametrization  
constants . . . . . 121
14. N.Lobkova. Secular and long-period perturbations  
of Pluto by Neptune . . . . . 136
15. O.Judrups. Continual equivalence of dynamical  
systems on torus . . . . . 151
16. K.Šteins, E.Kaupuša, P.Rozenbergs. On the accuracy  
of the star transit moment photoelectric  
recording . . . . . 157
17. L.A.Roze, L.P.Roze. Azimuth stability of the  
transit instrument of the Latvian State University 162
18. V. Kharichev. Invariants and error estimate of  
the star identification problem . . . . . 168