ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

515.12(082)
Т 583

Рига 1985

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра математического анализа

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

LUB

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1985

УДК 513 + 517 + 519

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

Топологические пространства и их отображения: Сборник научных трудов /Отв.ред. Е.Л.Энгельсон. -Рига:ЛГУ им.П.Стучки, 1985. - 192 с.

Сборник научных трудов "Топологические пространства и отображения" содержит результаты исследований, проведен в 1982-84 гг. на математических кафедрах ЛГУ им. П.Стучки, Даугавпилсского педагогического института, РКИИГА им.Ленинского комсомола, МГУ им. М.В.Ломоносова и некоторых других вузов. Результаты, содержащиеся в статьях сборника, доложены на секции топологии и секции функционального анализа и его приложений 42-й и 43-й научных конференций ЛГУ им. П.Стучки в 1983 и 1984 гг., а также на заседаниях научных семинаров ЛГУ им. П.Стучки, ДПИ, МГУ им. М.В.Ломоносова и на заседаниях 8-й Школы по теории операторов в функциональных пространствах (Рига , 1983).

Сборник предназначен для научных работников в области функционального анализа, теории функций и топологии,а также для аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в указанных областях.

Библ. - 140 назв.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

И.В.Карклиньш, Я.К.Лапиньш, У.Ё.Райтумс, В.А.Старцев, Г.К.Энгелис, Е.Л.Энгельсон (отв.редактор), А.П.Шостак

Печатается по решению Издательского совета ЛГУ им. П.Стучки

Т $\frac{20203-072у}{М\ 812(11)-85}$ 5доп.85.1702040000

© Латвийский государственный университет им.П.Стучки,1985

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.83

О ПРОСТРАНСТВАХ С ТОЧЕЧНО-СЧЕТНОЙ БАЗОЙ

А.В.Архангельский
МГУ им.М.В.Ломоносова

Все пространства, рассматриваемые в статье, заранее предполагаются тихоновскими. Семейство $\mathcal{B}$ открытых в пространстве X множеств называется псевдобазой этого пространства, если $\{x\} = \bigcap\{U : U \in \mathcal{B}\}$ и для всех $x \in X$. Если $\mathcal{B}$ – семейство множеств в то $\langle \mathcal{B}, \aleph_0 \rangle = \{x \in X : |\{U \in \mathcal{B} : U \ni x\}| \leq \aleph_0\}$ жество точек счетной кратности семейства $\mathcal{B}$. Мы пользуемся этим обозначением ниже. Семейство $\mathcal{B}$ называется чечно-счетным на множестве $Y \subset X$, если Y $\mathcal{B}$. Пространство называется псевдокомпактным, если всякая непрерывная вещественная функция на X ограничена.

Определение I. Множество $A \subset X$ называется относительно счетно-компактным в пространстве X, если для всякого бесконечного множества $B \subset A$ найдется предельная точка в X

Определение 2. Пространство X называется счетно-пракомпактным, если существует всюду плотное в X подпространство Y, которое относительно счетно-компактно в X

Очевидно, каждое счетно-пракомпактное пространство псевдокомпактно.

Как известно, псевдокомпактность не наследуется, вообще говоря, произвольными замкнутыми подпространствами.

В связи с этим, мы даём

Определение 3. Пространство X называется сильно псевдокомпактным, если существует всюду плотное в X множество Y такое, что каково бы ни было счетное множество $A \subset Y$, найдется счетное множество $B \subset X$, для которого $\bar{B}$ псевдокомпактно и $A \subset B$

Очевидно, каждое счетно пракомпактное пространство сильно псевдокомпактно и каждое сильно псевдокомпактное пространство псевдокомпактно.

Следующий результат хорошо известен.

Теорема I (см. [I], (2.I.I4)). Если пространство X счетно-компактно и обладает псевдобазой $\mathfrak{B}$ такой, что множество $\langle \mathfrak{B}, \aleph_0 \rangle$ точек её счетной кратности всюду плотно в X, то семейство $\mathfrak{B}$ счетно и X - компакт со счетной базой.

В доказательстве теоремы I существенную роль играет следующий ее частный случай:

Теорема 2 [2]. Каждое счетно-компактное пространство со счетной псевдобазой обладает и счетной базой.

М.Матвеевым [3] выделена следующая разновидность теоремы I:

Теорема I'. Если X - счетно-пракомпактное пространство с точечно счетной псевдобазой $\mathfrak{B}$, то эта псевдобаза счетна.

Не каждое счетно-пракомпактное пространство со счетной псевдобазой имеет и счетную базу (В.В.Успенский).

В данной статье мы формулируем ряд обобщений теорем I и I', стремясь к максимальной общности. То, что мы подходим к цели весьма близко, видно из следующего замечательного результата, недавно полученного Д.Б.Шахматовым:

Для каждого кардинала τ, существует псевдокомпактное пространство с точечно-счетной базой, содержащее замкнутое дискретное подпространство мощности τ.

Предложение I. Пусть X - псевдокомпактное пространство. Тогда множество Y всех изолированных в X точек относительно счетно-компактно в X

Доказательство. Это сразу следует из того, что каждое дискретное семейство непустых открытых множеств в псевдокомпактном пространстве конечно(изолированные точки образуют открытые одноточечные множества).

Так как в разреженном пространстве множество всех изолированных точек всюду плотно, получаем из предложения I такой результат:

Теорема 3. Каждое разреженное псевдокомпактное пространство счетно-паракомпактно.

Из предложения I и теоремы I вытекает также

Теорема 4. Если X - псевдокомпактное пространство с точечно-счетной базой, и множество всех изолированных точек пространства X всюду плотно в X, то X - компакт со счетной базой.

Это утверждение представляет интерес в связи с приведенным выше результатом Шахматова.

Теорема 5. Пусть X - сильно псевдокомпактное пространство с точечно счетной базой $\mathcal{B}$ Тогда база $\mathcal{B}$ счетна и X - компакт.

Доказательство. Возьмем $Y \subset X$ такое, как в определении 3. Покажем, что если $A \subset Y$ и A счетно, то $\bar{A}$ - компакт. Действительно, существует счетное множество $B \subset X$ такое, что $A \subset B$ и $\bar{B}$ псевдокомпактно. Семейство $\gamma = \{U \in \mathcal{B}: U \cap B \neq \emptyset\}$ счетно и $\{U \cap B: U \in \gamma\}$ - счетная база пространства $\bar{B}$. Значит, $\bar{B}$ - компакт. Тем более, $\bar{A}$ - компакт. Отсюда следует, что Y относительно счетно-компактно в X - т.е. пространство X счетно-паракомпактно. Остаётся сослаться на теорему I Матвеева.

Предложение 2. Пусть $\mathcal{B}$ - открытое покрытие пространства X и $A = \langle \mathcal{B}, \aleph_0 \rangle$ - множество точек счетной кратности семейства $\mathcal{B}$. Тогда, для каждого счетного множества $M \subset A$, $\bar{M} \subset \langle \mathcal{B}, \aleph_0 \rangle$ (т.е. A $\aleph_0$ - замкнуто снизу в смысле [I]).

Доказательство. Пусть $x \in \bar{M}$ и $U \in \mathcal{B}$, $U \ni x$. Тогда $U \ni y$ для некоторого $y \in M$. Значит, $\{U \in \mathcal{B}: U \ni x\} \subset \{U \in \mathcal{B}: U \cap M \neq \emptyset\} = \bigcup\{\{U \in \mathcal{B}: U \ni y\}: y \in M\}$ - счетное семейство, так как $M \subset A$ и $|M| \leq \aleph_0$ Следовательно, $x \in \langle \mathcal{B}, \aleph_0 \rangle = A$.

Предложение 3. Пусть $\mathcal{B}$ - открытое покрытие счетно-компактного пространства X. Тогда $A = \langle \mathcal{B}, \aleph_0 \rangle$ - счетно-компактное подпространство пространства X

Доказательство. Это прямо следует из предложения 2.

Предложение 4. Пусть $\mathcal{B}$ - псевдобаза счетно-компактного пространства X. Тогда множество $A = \langle \mathcal{B}, \aleph_0 \rangle$

точек счетной кратности семейства $\mathfrak{B}$ замкнуто в X, является компактом со счетной базой и множеством типа G_δ в X.

Доказательство. В силу предложения 3, A счетно-компактно. Семейство $\{U \cap A \quad U \in \mathfrak{B} \text{ и } U \cap A \neq \emptyset\}$ - точечно-счетная псевдобаза пространства A. По теореме I, семейство $\{U \in \mathfrak{B} : U \cap A \neq \emptyset\}$ счетно и A - компакт со счетной базой. Теперь ясно, что A - множество типа G_δ в X (так как $\mathfrak{B}$ - псевдобаза).

Теорема 6. Пусть $\mathfrak{B}$ - псевдобаза счетно-компактного пространства X и каждое замкнутое в X множество, лежащее во множестве $X \setminus \langle \mathfrak{B}, \aleph_0 \rangle$ точек на счетной кратности семейства $\mathfrak{B}$, метризуемо. Тогда X - компакт со счетной базой.

Доказательство. Это следует из предложения 4 и того, что счетно-компактное пространство, являющееся объединением счетного множества пространств со счетной базой, само имеет счетную базу и является компактом (см. [I], [4]).

Следствие I. Пусть $\mathfrak{B}$ - псевдобаза счетно-компактного пространства X и подпространство $\mathfrak{X} = X \setminus \langle \mathfrak{B}, \aleph_0 \rangle$, образованное множеством всех точек не счетной кратности семейства $\mathfrak{B}$, удовлетворяет какому-либо из следующих условий:

а) $\mathfrak{X}$ сепаратизуемо;

б) Диагональ в $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ имеет тип G_δ;

в) Пространство $\mathfrak{X}$ обладает точечно-счетной псевдобазой.

Тогда X - компакт со счетной базой.

Доказательство. Так как каждое счетно-компактное пространство, удовлетворяющее одному из условий а), б), в), метризуемо (см. [I], [4], [5]), можно сослаться на теорему 6.

Приведем для полноты и следующий результат, легко доказываемый с помощью теоремы I.

Теорема 7. Пусть X - счетно-компактное пространство и $\{\mathfrak{B}_i : i \in N^+\}$ - счетное семейство псевдобаз пространства X такое, что $X = \bigcup \{\langle \mathfrak{B}_i, \aleph_0 \rangle : i \in N^+\}$.

Тогда X - компакт со счетной базой.

Доказательство. В силу предложения 4, $X = \bigcup\{\langle \mathcal{B}_i, \mathcal{S}_0 \rangle : i \in N\}$, причём каждое $\langle \mathcal{B}_i, \mathcal{S}_0 \rangle$ является пространством со счетной базой. Значит, X обладает счетной сетью. Отсюда следует, что X - компакт со счетной базой.

Остается открытым следующий вопрос:

Задача. Пусть X - сильно псевдокомпактное пространство с точечно-счетной псевдобазой $\mathcal{B}$. Верно ли, что семейство $\mathcal{B}$ счетно?

Замечание. Теоремы I, 6 и 7 не распространяются на счетно пракомпактные пространства.

Литература

1. Архангельский А.В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты. - УМН, 1978, т.33, в.6, с.29-84.
2. Архангельский А.В., Произволов В.В. О связи между точечной мощностью системы подмножеств бикомпакта и его весом. - Вестн.МГУ. Сер.матем., 1966, т.3, с.75-77.
3. Матвеев М.В. О свойствах типа псевдокомпактности и счетной компактности. - Вестн. МГУ. Сер.матем., 1984, № 2, с. 24 - 26.
4. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. - М., 1974.
5. Chaber J. Conditions which imply compactness in countably compact spaces. - Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math., 1976, vol. 24, p. 993 - 998.

Поступила 27 января 1984 года

Топологические пространства и их отображения. Рига. 1985.

УДК 517.988.52

ЗАМЕЧАНИЕ К ПРИНЦИПУ СРАВНЕНИЯ КРАСНОСЕЛЬСКОГО ДЛЯ КОМПАКТНЫХ ГРУПП

З.И.Баланов, С.В.Винниченко
Даугавпилсский педагогический институт

Настоящая заметка тесно связана с теоремой 2 из [1]. В [1] известный принцип сравнения Красносельского удалось распространить со случая действия конечных циклических групп на случай произвольных конечных групп и бесконечных, изоморфных компактной не вполне несвязной группе. В настоящей заметке строится пример векторных полей, эквивариантных и полугомотопных относительно бесконечной группы, изоморфной компактной вполне несвязной, которые, тем не менее, имеют различные вращения. Этим показывается существенность условия не вполне несвязности в теореме 2 из [1]. Все неопределенные здесь понятия можно найти в [1] и [4].

Основной в наших построениях является следующая теоретико-групповая

Лемма 1. В группе G -гомеоморфизмов n -мерной сферы ($n > 1$) - существует подгруппа, изоморфная группе целых p - адических чисел Z_p. (Как хорошо известно, последняя является бесконечной компактной вполне несвязной (см. [2], с.177)).

Доказательство. Очевидно, R^+ - аддитивная группа вещественных чисел - вложима в G. Покажем, что Z_p вложима в R^+. Действительно, Z_p -абелева группа без кручения, следовательно, она вложима в G^* - полную абелеву группу без кручения (см. [3], с.62). Ясно, что G^* можно выбрать континуальной мощности. Для этого достаточно взять все частные Z_p. Остается показать, что G^* изоморфна R^+. Так как G^* не имеет кручения, то по теореме 9.1.6 из [3] она представима прямой суммой континуального набора групп Q (здесь Q -аддитивная группа рациональных чисел). Аналогично, R^+ также представима континуальным набором слагаемых Q. Отсюда, G^* изоморфна R^+.

Ниже мы строим пример действия R^+ (а, значит, с учи-

ом леммы I и Z_p) на единичной окружности и пример векторных полей, эквивариантных и полугомотопных относительно R^+, имеющих, однако, различные вращения. Нам удобно R^+ представлять изоморфной ей $R^{\cdot}_+$ -мультипликативной группой положительных вещественных чисел. Считаем единичную окружность отрезком [0,2] (0 и 2 совпадают). Для любого вещественного положительного α определим f_α - гомеоморфизм единичной окружности на себя - формулой

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \in [0,1] \\ 2-(2-x)^\alpha, & x \in [1,2] \end{cases} \qquad (I)$$

Пусть $V = \{f_\alpha\}_{\alpha \in R^{\cdot}_+}$ - группа гомеоморфизмов единичной окружности, определенных по формуле (I). Как нетрудно убедиться, V изоморфна $R^{\cdot}_+$ и, следовательно, содержит изоморфный образ Z_p. Положим теперь поле Φ равным тождественному, а поле Ψ определим формулой $\Psi : x \to 2-x$ Так как $N(V) = \{0;1\}$, то эквивариантность и полугомотопность проверяются непосредственно. Однако при этом $\gamma(\Phi) = 1$ $\gamma(\Psi) = -1$, чем и завершается построение нашего контрпримера.

Литература

I. Баланов З.И., Бродский С.Д. Принцип сравнения Красносельского и продолжение эквивариантных отображений. - В кн.: Функциональный анализ. Ульяновск, вып.I, 1984.
2. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. - М., 1979.
3. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М., 1977.
4. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. - М., 1975.

Поступила 3 ноября 1983 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 519.46

ИЗОМОРФИЗМ ТРЕУГОЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБР ЛИ (p-АЛГЕБР ЛИ) И АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

А.Х.Брегман
ЛГУ им.П.Стучки

I. Конструкция треугольного произведения представлений алгебр Ли (p-алгебр Ли) и ассоциативных алгебр изучалась рядом авторов ([3] , [5] , [6]). Первоначально она была определена в категории представлений групп [4] , где является одним из основных инструментов исследования полугруппы многообразий представлений групп. При изучении операции треугольного произведения в указанных категориях оказалось, что многие ее свойства аналогичны известным свойствам сплетений групп (например, имеет место аналог теоремы Калужнина-Краснера о сплетении групп и др. [3]).

С.М.Вовси доказал аналог одной теоремы П.Неймана о сплетениях для операции треугольного произведения представлений групп.

Теорема I [2]. Любые два треугольных разложения произвольного точного представления обладают сопряженными продолжениями.

С другой стороны, Л.А.Альшанским доказан ослабленный вариант приведенной теоремы в категории полуавтоматов.

Теорема 2 [I]. Любые два треугольных произведения точных полуавтоматов над полем, изоморфные как полуавтоматы, обладают общим продолжением.

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема. Любые два треугольных разложения произвольного точного представления алгебры Ли обладают сопряженными продолжениями.

Аналогичное утверждение справедливо в категории представлений p-алгебр Ли и ассоциативных алгебр.

Отметим, что хотя формулировки ранее доказанной теоремы I и приведенной теоремы совпадают, понятие сопряжен-

ности пар в категории представлений групп и алгебр Ли различны. Если в случае групп сопряжение производится с помощью элемента из самой группы, то в рассматриваемом случае соответствующий элемент выбирается вне алгебры Ли. Это изменяет методику доказательства, хотя по существу его схема подобна приведенной в [2].

В заключении рассматриваются связи между треугольными разложениями представления p-алгебры Ли и соответствующего представления алгебры Ли, а также между треугольными разложениями представления ассоциативной алгебры и соответствующего представления коммутаторной алгебры.

2. Напомним основные определения, относящиеся к конструкции треугольного произведения лиевских пар.

Пусть даны две лиевские пары (V_1, L_1) и (V_2, L_2) над некоторым полем K. Пусть $\Phi = \mathrm{Hom}_K(V_2, V_1)$ $(V, \Sigma) = (V_1 + V_2, L_1 + L_2)$ – прямая сумма исходных лиевских пар. Определим действия алгебры $\Sigma = L_1 + L_2$ в Φ если $\varphi \in \Phi$ и $\sigma = \ell_1 + \ell_2$, где $\ell_1 \in L_1$, $\ell_2 \in L_2$ и $v_2 \in V_2$, то $v_2 \cdot (\varphi \circ \sigma) = v_2 \cdot (\varphi \circ (\ell_1 + \ell_2)) = (v_2 \varphi)\ell_1 - (v_2 \ell_2)\varphi$ Полученной таким образом лиевской паре (Φ, Σ) отвечает полупрямая сумма $L = \Phi \leftthreetimes \Sigma$ (здесь Φ – абелева алгебра Ли). Определим теперь лиевскую пару $(V_1 + V_2, \Phi \leftthreetimes \Sigma)$. Сначала определим действие Φ в $V = V_1 + V_2$ если $\bar{\varphi}$ – элемент из Φ, рассматриваемый как элемент в $L = \Phi \leftthreetimes \Sigma$ то для $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$ положим $v_1 \bar{\varphi} = 0$, $v_2 \bar{\varphi} = v_2 \varphi$ и продолжим, далее, действие $\bar{\varphi}$ по линейности.

Построенная таким образом пара $(V_1 + V_2, \mathrm{Hom}(V_2, V_1) \leftthreetimes (L_1 + L_2))$ обозначается через $(V_1, L_1) \nabla (V_2, L_2)$ и называется треугольным произведением исходных лиевских пар.

Операция треугольного произведения лиевских пар легко распространяется на произвольное число сомножителей. При этом она является ассоциативной.

Пусть теперь (V, L) – произвольная лиевская пара и θ элемент из $\mathrm{End}\, V$ такой, что $(1 + \theta)$ – автоморфизм алгебры L и $\theta^2 = 0$. Пара отображений $v \to v(1 + \theta)$, $\ell \to (1 - \theta)\ell(1 + \theta)$, где $v \in V$, $\ell \in L$ определяет автоморфизм представления (V, L), который

назовем внутренним. Если (A, Σ)- некоторое подпредставление в V, L), то пару $(A(1+\theta), (1-\theta)\Sigma(1+\theta))$ будем обозначать через $(A,\Sigma)^{1+\theta} = (A^{1+\theta}, \Sigma^{1+\theta})$ (соответственно пару $(A(1-\theta), (1+\theta)\Sigma(1-\theta))$ обозначим через $(A,\Sigma)^{1-\theta} = (A^{1-\theta}, \Sigma^{1-\theta})$).

Если $(V,L) = (V_1,L_1) \nabla (V_2,L_2) \nabla \quad \nabla (V_n,L_n) = (\bar{V}_1,\bar{L}_1) \nabla (\bar{V}_2,\bar{L}_2) \nabla \ldots \nabla (\bar{V}_m,\bar{L}_m)$, то по аналогии с групповым случаем эти два разложения пары (V , L) называются сопряженными, если $m = n$ и существует внутренний автоморфизм представления (V, L), отображающий (V_i, L_i) на ($\bar{V}_i, \bar{L}_i$), $i = 1, 2, \ldots, n$

Естественным образом определяется также понятие продолжения разложения в треугольное произведение.

Переходим к доказательству теоремы, сформулированной в пункте I. Рассмотрим вначале случай, когда оба разложения представления (V , L) состоят из двух сомножителей:

$$(V,L) = (V_1,L_1) \nabla (V_2,L_2) = (V_1 \oplus V_2, \Phi \ltimes L_1 + L_2), \qquad (I)$$

$$(V,L) = (\bar{V}_1,\bar{L}_1) \nabla (\bar{V}_2,\bar{L}_2) = (\bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2, \bar{\Phi} \ltimes \bar{L}_1 + \bar{L}_2), \qquad (2)$$

где Φ и $\bar{\Phi}$ являются централизаторами в $\mathrm{End}\, V$ рядов $0 \leq V_1 \leq V$ и $0 \leq \bar{V}_1 \leq V$ соответственно. Так как V_1 и $\bar{V}_1$ инвариантны относительно L , то либо $V_1 \leq \bar{V}_1$, либо $\bar{V}_1 \leq V_1$ (см. [3]). Не ограничивая общности, предположим, что $V_1 \leq \bar{V}_1$

Обозначим через $V_3 = \bar{V}_1 \cap V_2$, тогда используя закон модулярности, получаем $\bar{V}_1 = \bar{V}_1 \cap V = \bar{V}_1 \cap (V_1 \oplus V_2) = V_1 \oplus (\bar{V}_1 \cap V_2) = V_1 \oplus V_3$ и $V = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2 = V_1 \oplus V_3 \oplus \bar{V}_2$.

Пусть π есть проекция пространства $\bar{V}_2$ на V_2 Тогда $V_2 = \bar{V}_2^{\pi} \oplus V_3$ и $V = V_1 \oplus V_3 \oplus \bar{V}_2^{\pi}$ Проверка этих равенств проделана в [2] , лемма 2.

Обозначим через Ψ централизатор ряда $0 \leq V_1 \leq \bar{V}_1 \leq V$ в $\mathrm{End}\, V$

<u>Лемма I.</u> $\Phi \leq \Psi$, $\bar{\Phi} \leq \Psi$ и Ψ - идеал в L

<u>Доказательство.</u> Непосредственно из определений следует, что $\Phi \subset \Psi$ и $\bar{\Phi} \subset \Psi$ Возьмем произвольный элемент $\psi \in \Psi$. Построим два отображения из $\mathrm{End}\, V$ $\varphi_1 \in \Phi$ и $\varphi_2 \in \bar{\Phi}$: если e_α, $\alpha \in I$ - базис пространства V , то

$$v_i\varphi_1 = \begin{cases} 0, & v_i \in V_1 \\ v_i\psi, & v_i \in \bar{V}_1 \setminus V_1 \\ 0, & v_i \in V \setminus \bar{V}_1 \end{cases} \qquad v_i\varphi_2 = \begin{cases} 0, & v_i \in \bar{V}_1 \\ v_i\psi, & v_i \in V \setminus \bar{V}_1 \end{cases}$$

Так как $\psi = \varphi_1 + \varphi_2$ Φ и $\bar{\Phi}$ - идеалы в L, то Ψ - идеал в L

Определим отображение $\theta : V \to V$ следующим образом: $v_1\theta = 0$, если $\bar{v}_1 \in \bar{V}_1$; если $\bar{v}_2 = v_1 + v_2$, то $\bar{v}_2\theta = v_1$ Ясно, что $\bar{V}_1^\theta = 0$ $V_2^\theta \subset V_1$ $\theta^2 = 0$ и $(1-\theta)(1+\theta) = 1$.

Покажем, что $1+\theta$ определяет внутренний автоморфизм пары (V, L).

Лемма 2. $(1-\theta)L(1+\theta) \subseteq L$

Доказательство. Пусть $l \in L$, $l = \bar{\varphi} + \bar{l}_1 + \bar{l}_2$ где $\bar{\varphi} \in \bar{\Phi}$, $\bar{l}_1 \in \bar{L}_1$, $\bar{l}_2 \in \bar{L}_2$ Легко проверить, что $(1-\theta)l(1+\theta) = \bar{\varphi} + \bar{l}_1 + \bar{l}_2 - \theta\bar{l}_1 + \bar{l}_2\theta$

Нужно показать, что $\bar{\varphi} - \theta\bar{l}_1 + \bar{l}_2\theta \in \bar{\Phi}$ Это следует из того, что $\forall \bar{v}_1 \in \bar{V}_1 : \bar{v}_1(\bar{\varphi} - \theta\bar{l}_1 + \bar{l}_2\theta) = 0$ $\forall \bar{v}_2 \in V_2 : \bar{v}_2(\bar{\varphi} - \theta\bar{l}_1 + \bar{l}_2\theta) \in V_1$

Значит, $(1-\theta)l(1+\theta) \in L$

Пусть L_3 множество всех тех элементов из L, которые действует в V_1 и в $\bar{V}_2$ нулевым образом и оставляет инвариантным $V_3 = \bar{V}_1 \cap V_2$. Тогда $L_3 \subseteq \bar{L}_1$

Лемма 3. $L = \langle \Psi, L_1, L_3, \bar{L}_2 \rangle$.

Доказательство. Так как $L = \bar{\Phi} \leftthreetimes (\bar{L}_1 + \bar{L}_2)$ и $\bar{\Phi} \subseteq \Psi$, то достаточно доказать, что $\bar{L}_1 \subseteq \langle \Psi, L_1, L_3, \bar{L}_2 \rangle$ Обозначим последнюю подалгебру через L_0.

Пусть $l_1 \in \bar{L}_1$. Так как $\bar{L}_1 \subset L$, то $l = \varphi + l_1 + l_2$, где $\varphi \in \Phi$, $l_1 \in L_1$, $l_2 \in L_2$ А так как Φ $L_1 \subset L_0$ то достаточно проверить что $l_2 \in L_0$.

Пусть $v_3 \in V_3$ Так как $V_3 \subset \bar{V}_1$, а $\bar{V}_1 L \subset V_1$ и $\bar{V}_1 = V_1 \oplus V_3$, то для любого $v_3 \in V_3$

$$v_3 l_2 = v_1' + v_3', \quad \text{где} \quad v_1' \in V_1, \quad v_3' \in V_3. \qquad (3)$$

Определим отображение $\tau \in \mathrm{End}\, V$ следующим образом: $v\tau = 0$, $\bar{v}_2\tau = 0$, $v_3\tau = v_1'$, где $v \in V_1$, $\bar{v}_2 \in \bar{V}_2$, $v_3 \in V_3$ и $v_1' \in V_1$ из разложения (3). Ясно, что $\tau \in \Psi$

Покажем, что $\tau - l_2 \in L_3$ Прямо по определению следует, что $v_1(\tau - l_2) = 0$ Если $v_3 \in V_3$, то $v_3(\tau - l_2) = v_3\tau - (v_1' + v_3') = v_1' - v_1' - v_3' = -v_3' \in V_3$ Покажем, что $\bar{v}_2(\tau - l_2) = 0$ $\bar{v}_2 \in \bar{V}_2$. Если $\bar{v}_2 = v_1 + v_2$, $v_1 \in V_1$ $v_2 \in V_2$, то

$\bar{\sigma}_2 l = (\sigma_1 + \sigma_2)(\varphi + l_1 + l_2) = \sigma_2\varphi + \sigma_1 l_1 + \sigma_2 l_2$.

Так как $l \in L_1$, то $\bar{\sigma}_2 l = 0$, а значит и $\sigma_2 l_2 = 0$ Поэтому $\bar{\sigma}_2 l_2 = (\sigma_1 + \sigma_2) l_2 = \sigma_2 l_2 = 0$, и следовательно $\bar{\sigma}_2(\tau - l_2) = \bar{\sigma}_2\tau - \bar{\sigma}_2 l_2 = 0$ Окончательно получаем, что $\tau - l_2 \in L_3 \subset L_0$ Но так как $\tau \in \Psi$, то $\tau - (\tau - l_2) = l_2 \in L_0$. Лемма доказана.

<u>Лемма 4.</u> $L_1^{1+\theta} \subseteq \bar{L}_1$

<u>Доказательство.</u> Надо показать, что $L_1^{1+\theta}$ действует в $\bar{V}_2$ нулевым образом, а элементы в $\bar{V}_1$ оставляет инвариантными.

Пусть $l_1 \in L_1$ и $\bar{\sigma}_2 = \sigma_1 + \sigma_2$. Тогда, так как $(1-\theta) l_1 (1+\theta) = l_1 - \theta$, то $\bar{\sigma}_2 (1-\theta) l_1 (1+\theta) = (\sigma_1 + \sigma_2)(l_1 - \theta l_1) = \sigma_1 l_1 - \bar{\sigma}_2 \theta l_1 = \sigma_1 l_1 - \sigma_1 l_1 = 0$

Так как $V_1 \subseteq \bar{V}_1$, то $\sigma_1(l_1 - \theta l_1) \in \bar{V}_1$

<u>Лемма 5.</u> $\bar{L}_2^{1-\theta} \subseteq L_2$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\bar{l}_2 \in \bar{L}_2$ Покажем, что $\sigma_2(\bar{l}_2 - \bar{l}_2\theta) \in V_2$ где $\sigma_2 \in V_2$. Обозначим $\sigma_2 \bar{L}_2 = \bar{\sigma}_2 \in \bar{V}_2$ и $\bar{\sigma}_2 = \sigma_1' + \sigma_2'$, $\sigma_1' \in V_1$, $\sigma_2' \in V_2$. Тогда $\sigma_2(\bar{l}_2 - \bar{l}_2\theta) = \sigma_1' + \sigma_2' - (\sigma_1' + \sigma_2')\theta = \sigma_1' + \sigma_2' - \sigma_1' = \sigma_2' \in V_2$. Из того, что $V_1 \subset \bar{V}_1$, сразу следует равенство $\sigma_1(l_2 - l_2\theta) = 0$ $\sigma_1 \in V_1$

<u>Лемма 6.</u> $(V, L) = (V_1, L_1^{1+\theta}) \nabla (V_3, L_3) \nabla (\bar{V}_2, \bar{L}_2)$ $(\bar{V}_1, \bar{L}_1) = (V_1, L_1^{1+\theta}) \nabla (V_3, L_3)$.

<u>Доказательство.</u> I) Покажем, что если Σ - подалгебра в L , порожденная подалгебрами $L_1^{1+\theta}$, L_3 и L_2 , то пара (V, Σ) раскладывается в прямую сумму пар $(V_1, L_1^{1+\theta})$, (V_3, L_3) и $(\bar{V}_2, \bar{L}_2)$. $\bar{L}_2$ действует нулевым образом в $\bar{V}_1 = V_1 + V_3$ и $\bar{V}_2 \bar{L}_2 \subset \bar{V}_2$ L_3 по определению действует нулевым образом в V_1 и $\bar{V}_2$ и оставляет инвариантным V_3 . По лемме 4 следует, что $L_1^{1+\theta}$ действует в $\bar{V}_2$ нулевым образом и элементы из $\bar{V}_1$ оставляет инвариантными.

Покажем, что $L^{1+\theta}$ в V_3 действует нулевым образом. Это следует из того, что $V_3 = V_2 \cap \bar{V}_1$, значит $\sigma_3(l_1 - \theta l_1) = \sigma_3 l_1 - \sigma_3 \theta l_1 = 0$ Используя равенство $V = V_1 \oplus V_3 \oplus V_2$ окончательно получаем, что $(V, \Sigma) = (V_1, L_1^{1+\theta}) \oplus (V_3, L_3) \oplus (\bar{V}_2, \bar{L}_2)$

2) По лемме идеал Ψ в L является централизатором в $End\, V$ где $0 \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset V$.

3) Из леммы 4 и из того, что $\theta \in \Psi$ следует, что $L = \langle \Psi, L_1^{1+\theta}, L_3, L_2 \rangle$ Поэтому $L = \Psi \lambda (L_1^{1+\theta} \oplus L_3 \oplus L_2)$

Из I)-3) следует, что $(V, L) = (V_1 L_1^{1+\theta}) \nabla (V_3, L_3) \nabla (\bar{V}_2, \bar{L}_2)$ Из этого равенства и из того, что $(V, L) = (\bar{V}_1, \bar{L}_1) \nabla (\bar{V}_2, \bar{L}_2)$, $(V_1, L_1^{1+\theta}) \leq (\bar{V}_1, \bar{L}_1)$, $(V_3, L_3) \leq (\bar{V}_1, \bar{L}_1)$, следует равенство $(\bar{V}_1, \bar{L}_1) = (V_1, L_1^{1+\theta}) \nabla (V_3, L_3)$

<u>Лемма 7.</u> $(V, L) = (V_1, L_1) \nabla (V_3, L_3) \nabla (\bar{V}_2^{1-\theta}, \bar{L}_2^{1-\theta})$ $(V_2, L_2) = (V_3, L_3) \nabla (\bar{V}_2^{1-\theta}, \bar{L}_2^{1-\theta})$

<u>Доказательство.</u> I) Заметим сначала, что $\bar{V}_2^{1-\theta} = \bar{V}_2^{\sigma}$ так как если $\bar{v}_2 = v_1 + v_2$, то $\bar{v}_2(1-\theta) = v_1 + v_2 - v_1 = v_2 \in V_2$ и $V = V_1 \oplus V_3 \oplus \bar{V}_2^{\sigma}$. Алгебра L_1 действует нулевым образом в $V_2 = V_3 \oplus \bar{V}_2^{\sigma}$ По определению L_3 действует нулевым образом в V_1 и $\bar{V}_2$, а так как каждый $\bar{v}_2^{\sigma} \in \bar{V}_2^{\sigma}$ представим в виде $\bar{v}_2^{\sigma} = \bar{v}_2 - v_1$, где $\bar{v}_2 \in \bar{V}_2$, $v_1 \in V_1$, то L_3 действует нулевым образом в $V_1 + \bar{V}_2^{\sigma}$ Алгебра $L_2^{1-\theta}$, очевидно, действует в $\bar{V}_1 = V_1 \cdot V_3$ нулевым образом, а по лемме 5 элементы из V_2 оставляет инвариантными. Из всего сказанного следует, что
$(V_1 \langle L_1, L_3, \bar{L}_2^{1-\theta} \rangle) = (V_1, L_1) \oplus (V_3, L_3) \oplus (\bar{V}_2^{1-\theta}, \bar{L}_2^{1-\theta})$.

2) Идеал Ψ в L является централизатором в $\mathrm{End}\, V$ ряда $0 \leq V_1 \leq \bar{V}_1 \leq V$

3) Из леммы 4 и из того, что $\theta \in \Psi$ следует равенство $L = \Psi \lambda (L_1 + L_3 + L_2^{1-\theta})$. Таким образом получаем, что $(V, L) = (V_1, L_1) \nabla (V_3, L_3) \nabla (\bar{V}_2, \bar{L}_2)^{1-\theta}$ С другой стороны, $(V, L) = (V_1, L_1) \nabla (V_2, L_2)$ А так как по лемме 5 $(\bar{V}_2, \bar{L}_2)^{1-\theta} \leq (V_2, L_2)$ и по определению $(V_3, L_3) \leq (V_2, L_2)$ то $(V_2, L_2) = (V_3, L_3) \nabla (\bar{V}_2, \bar{L}_2)^{1-\theta}$. Лемма доказана.

Из лемм 6 и 7 следует, что два разложения

$$(V, L) = (V_1, L_1) \nabla (V_2, L_2) \nabla (\bar{V}_2^{1-\theta}, \bar{L}_2^{1-\theta}) \qquad (4)$$

$$(V, L) = (V_1, L_1^{1+\theta}) \nabla (V_3, L_3) \nabla (\bar{V}_2, \bar{L}_2) \qquad (5)$$

являются продолжениями разложений (I) и (2) соответственно.

Заметим, что так как θ действует нулевым образом на $\bar{V}_1$, то $(1+\theta)$ действует тождественно на V_1 и V_3 Покажем, что также $L_3^{1+\theta} = L_3$. Действительно, если $v \in \bar{V}_1 \cap V_2 = V_3$ и $v = v_1 + v_2$ то $(v_1 + v_2)(1-\theta) \ell_3 (1+\theta) = (v_1 + v_2) \ell_3 (1+\theta) - (v_1 + v_2) \theta \ell_3 (1+\theta)$. Но $v_1 \ell_3 = 0$ и $V_3 (1+\theta) \subset V_3$, $V_2 \ell_3 (1+\theta) \subset V_3 (1+\theta) \subset V_3$. Следо-

вательно, $V_3(1-\theta)\ell_3(1+\theta) \subset V_3$. Легко видеть, что $\sigma_1(1-\theta)\ell_3(1+\theta)=0$ и $\sigma_2(1-\theta)\ell_3(1+\theta)=0$. Следовательно, $L_3^{1+\theta} \subset L_3$. Аналогично $L_3^{1-\theta} \subset L_3$. Значит $L_3^{1+\theta} = L_3$. Этим доказано, что разложения (4) и (5) сопряжены.

Общий случай доказывается по индукции также как и в [2] с очевидными изменениями и поэтому мы его опускаем.

Теорема доказана.

Дословным повторением приведенных выше рассуждений доказывается аналогичная теорема в категории p-пар. Добавляется лишь проверка согласованности участвующих отображений с p-операцией. Наконец, в случае представлений ассоциативных алгебр те же рассуждения приводят к соответствующей теореме о сопряжении двух разложений в треугольное произведение подпар.

Укажем связь между треугольными разложениями представления p-алгебры Ли (ассоциативной алгебры) и ее лиевского разложения.

Пусть (V, L) - точное представление p-алгебры Ли L и $(V,L)=(V_1,L_1)\nabla(V_2,L_2)\nabla\ldots\nabla(V_n,L_n)$ - некоторое треугольное разложение (V, L) на подпары (V_i, L_i) (см. [3]). Если теперь рассматривать (V, L) только как алгебру Ли, то последнее разложение естественно приводит нас к разложению (V, L) в треугольное произведение лиевских подпар (V_i, L_i). При этом из неразложимости лиевской пары (V_i, L_i) в треугольное произведение следует неразложимость этой пары с точки зрения p-алгебры Ли и наоборот. Это позволяет утверждать, что имеет место

<u>Предложение I.</u> Пусть $(V,L)=(V_1,L_1)\nabla\ldots\nabla(V_n,L_n)$ где все (V_i, L_i) - неразложимые p-пары.

Тогда, если $(V,L)=(\bar{V}_1,\bar{L}_1)\nabla\ldots\nabla(\bar{V}_m,\bar{L}_m)$ - разложение лиевской пары (V, L) в треугольное произведение неразложимых лиевских подпар $(\bar{V}_i, \bar{L}_i)$, то $n=m$ и $(V_i, L_i) \simeq (\bar{V}_i, \bar{L}_i)$, где $(\bar{V}_i, \bar{L}_i)$ является лиевской p-парой и последний изоморфизм сохраняет p-структуру.

Соответствующая связь имеется также при разложении представления ассоциативной алгебры A (V, A) в треугольное произведение подпар и разложении представле-

ния соответствующей ей коммутаторной алгебры A_L , то есть пары (V, A_L).

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Р.С.Липянскому за руководство и помощь в работе над данной статьей.

Литература

1. Альшанский Л.А. Изоморфизм треугольных произведений линейных полуавтоматов и представлений. - Латв. мат. ежегодник, 1983, т.27, с.183-190.
2. Вовси С.М. Изоморфизм треугольных разложений представлений разложений групп. - Латв. мат. ежегодник, 1977, т.21, с.116-123.
3. Липянский Р.С. Полугруппа многообразий лиевских пар. - В кн.: Теория множеств и топология. Ижевск, 1977, с.44-54.
4. Плоткин Б.И. Треугольные произведения пар. - В кн.: Некоторые вопросы теории групп. Рига, 1971, с.140-170.
5. Кальюлайд У. Треугольные произведения представлений полугрупп и ассоциативных алгебр. - Успехи мат. наук, 1977, т. 32, вып. 4, с. 253-254.
6. Кроп Л.Е., Симонян Л.А. О чистых и магнусовых многообразиях в представлениях групп. - В кн.: Сборник работ по алгебре. Рига, 1978, с.108-129.

Поступила 12 сентября 1984 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.83

МЕТОД ЖЕСТКИХ СПЕКТРОВ В ТЕОРИИ ПАРАКОМПАКТНЫХ σ - ПРОСТРАНСТВ

Ю.Х.Брегман
ЛГУ им.П.Стучки

Многие задачи топологии, топологической алгебры и функционального анализа, связанные в своей постановке с метрическими пространствами, выводят за пределы этого класса. Такая ситуация возникает, например, при исследовании замкнутых непрерывных образов метрических пространств, CW - комплексов, свободных топологических групп в смысле Маркова и др. В связи с такими задачами в последние два десятилетия появились различные обобщения метризуемых пространств. К важнейшим из них принадлежат перистые паракомпакты [1], кружевные пространства [2] и паракомпактные σ -пространства [3] Если теория перистых паракомпактов достаточно хорошо развита, то свойства паракомпактных σ -пространств (т.е. паракомпактов с σ -дискретной сетью) исследованы недостаточно.

В настоящей работе мы развиваем метод обратных спектров в классе паракомпактных σ -пространств (метод жестких спектров). Нашей целью является аппроксимация паракомпактных σ-пространств с помощью обратных спектров, объектами которых являются метрические пространства, а морфизмами - уплотнения, применение таких спектров для исследования размерностных свойств паракомпактных σ -пространств.

Исходным для нашего исследования явилось понятие слабого уплотнения, введенное А.В.Архангельским [4] Уплотнение (т.е. непрерывная биекция) f $X \to Y$ называется слабым, если пространство X регулярно, Y - паракомпакт и в Y существует такое σ -дискретное семейство $\mathcal{F}$, что $f^{-1}(\mathcal{F})$ является сетью в X А.В.Архангельский доказал [4] , что топологическое пространство, допускающее слабое

уплотнение, является паракомпактным σ-пространством и что каждое паракомпактное σ-пространство допускает слабое уплотнение на метрическое пространство. В § I мы вводим понятие жесткого спектра (определение I), которое является, по существу, спектральным аналогом слабого уплотнения, и доказываем, что паракомпактные σ-пространства - это в точности обратные пределы жестких спектров из метрических пространств (теорема I). В этом параграфе также приводится пример жесткого спектра из полных метрических пространств, предел которого неметризуем.

Слабые уплотнения на метрические пространства не характеризуют размерность паракомпактных σ-пространств. По теореме Хилгероа [5] любое сепарабельное метрическое пространство мощности континуум является образом при уплотнении некоторого n-мерного сепарабельного метрического пространства для каждого $n>0$. Но каждое уплотнение в классе сепарабельных метрических пространств является слабым. Таким образом, при слабых уплотнениях размерность (ind, Ind и $\dim$) может как повышаться, так и понижаться. Для характеристики размерности $\dim$ паракомпактных σ-пространств мы применяем жесткие спектры. Центральным результатом статьи является теорема 2, утверждающая, что X является паракомпактным σ-пространством размерности $\dim X \leq n$ тогда и только тогда, когда X гомеоморфно пределу жесткого спектра из метрических пространств размерности $\dim$ не более n. В § 2 построен также пример жесткого спектра из конечномерных сепарабельных метрических пространств, являющегося обратной последовательностью, предел которого $\Im$-сильно бесконечномерен. В § 3 теорема 2 применяется для доказательства факторизационной теоремы по весу и размерности для слабых уплотнений. Нам неизвестно, верна ли общая факторизационная теорема по весу и размерности для паракомпактных σ-пространств.

Отметим определенный параллелизм значительной части наших результатов с фактами хорошо развитой теории перистых паракомпактов. Так, перистые паракомпакты могут быть охарактеризованы как пределы обратных спектров из ме.ри-

ческих пространств с совершенными проекциями [6]. С помощью такого же обратных спектров может быть оценена и размерность $\dim$ перистых паракомпактов: по теореме Клюшина-Пасынкова, пространство X является перистым паракомпактом размерности $\dim X \leq n$ тогда и только тогда, когда X гомеоморфно пределу обратного спектра с совершенными проекциями из метрических пространств размерности $\dim$ не более n ([6], [7]).

Основные результаты данной статьи были сформулированы в [8], [9], [10]. Материал статьи составляет часть кандидатской диссертации автора. Пользуясь случаем, автор выражается искреннюю благодарность своим научным руководителям профессору Ю.М.Смирнову и доценту А.П.Шостаку за постоянную помощь и поддержку.

Вся терминология статьи по общей топологии соответствует монографиям [11], [12], терминология по теории размерности - [13], по теории обратных спектров - [14]. N обозначает дискретное пространство натуральных чисел, R - вещественная прямая, Q - подпространство рациональных чисел (вещественной прямой). $[A]_X$ обозначает замыкание множества A в пространстве X, $|A|$ - его мощность, $w(X)$ - вес пространства X. Если $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ - семейство отображений пространства X, то $\Delta\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ обозначает диагональное произведение этого семейства. Если все пространства X_α суть экземпляры некоторого множества X, то $\Delta\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ обозначает диагональ в произведении $\prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Пусть $f : X \to Y$ - отображение и $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{F}$ - семейства множеств в X и Y соответственно. Тогда $f(\mathfrak{K})$ и $f^{-1}(\mathfrak{F})$ обозначают семейства $\{f(K) : K \in \mathfrak{K}\}$ и $\{f^{-1}(F) : F \in \mathfrak{F}\}$ соответственно. Мы также не будем различать понятия метрического и метризуемого пространства. Мы неоднократно будем пользоваться следующим специальным видом факторизационной теоремы Б.А.Пасынкова для метрических пространств [13, с.388]: если $f : X \to Y$ - уплотнение нормального пространства X на метрическое пространство Y, то существует такое метрическое пространство Z и такие уплотнения $g : X \to Z$ и $h : Z \to Y$, что $f = h\,g$, $\dim Z \leq \dim X$ и $w(Z) \leq w(Y)$.

§ I. Паракомпактные σ-пространства и жесткие спектры

Определение I. Обратный спектр $\{X_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in A\}$ назовем жестким спектром, если все пространства X_α - паракомпакты, все проекции π_β^α - уплотнения, $\mathcal{F}_\alpha$ - σ-дискретная сеть в X_α и $\pi_\beta^\alpha(\mathcal{F}_\alpha) = \mathcal{F}_\beta$ для всех $\beta \in \alpha$

Это понятие можно сформулировать также на категорном языке. Рассмотрим категорию $\mathcal{C}$, объектами которой являются пары $(X, \mathcal{F})$, где X - паракомпакт, $\mathcal{F}$ - σ-дискретная сеть в X, а морфизмами являются такие уплотнения $f:(X,\mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{H})$, что $f(\mathcal{F}) = \mathcal{H}$. Тогда жесткие спектры - это обратные спектры в категории $\mathcal{C}$. Следующее предложение утверждает фактически, что предел жесткого спектра в категории $\mathcal{C}$ всегда существует.

Предложение I. Предел жесткого спектра есть паракомпактное σ-пространство.

Доказательство. Пусть пространство X является пределом жесткого спектра $\{X_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in A\}$ и $\pi_\alpha: X \to X_\alpha$ - предельные проекции. Зафиксируем произвольное $\alpha \in A$. Ясно, что π_α - уплотнение и $\mathcal{F} = \pi_\alpha^{-1}(\mathcal{F}_\alpha)$ является σ-дискретным семейством в X. Покажем, что семейство $\mathcal{F}$ является сетью в пространстве X. Пусть $x \in X$ и V - произвольная базовая окрестность точки x, т.е. $V = \pi_\beta^{-1}(U)$ и U - некоторое открытое множество в X_β, $\beta \in A$. Пусть $x_\beta = \pi_\beta(x)$. Поскольку множество A направлено, то существует такое $\gamma \in A$, что $\alpha < \gamma$ и $\beta < \gamma$. Семейство $\mathcal{F}_\beta$ является сетью в X_β, поэтому найдется множество $C \in \mathcal{F}_\beta$ такое, что $x_\beta \in C \subset U$. Нетрудно заметить, что $(\pi_\beta^\gamma)^{-1}(C) \in \mathcal{F}_\gamma$ и $x \in \pi_\beta^{-1}(C) \subset \pi_\beta^{-1}(U)$. Поскольку $\alpha < \gamma$, то по определению жесткого спектра существует такое множество $D \in \mathcal{F}_\alpha$, что $(\pi_\alpha^\gamma)^{-1}(D) = (\pi_\beta^\gamma)^{-1}(C)$ и тогда $\pi_\alpha^{-1}(D) = (\pi_\alpha^\gamma \circ \pi_\gamma)^{-1}(D) = \pi_\gamma^{-1}((\pi_\alpha^\gamma)^{-1}(D)) = \pi_\beta^{-1}(C)$, $\pi_\alpha^{-1}(D) \in \mathcal{F}$ и $x \in \pi_\alpha^{-1}(D) \subseteq V$. Таким образом, $\mathcal{F}$ является σ-дискретной сетью в X, а отображение π_α - слабое уплотнение. Тогда по теореме А.В.Архангельского [4] X является паракомпактным σ-пространством.

Предложение 2. Пусть X - паракомпактное σ-пространст-

вс и $\mathcal{F}$ - σ -дискретная сеть в нем. Тогда X является пределом такого жесткого спектра $\{X_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in A\}$, что все пространства X_α метризуемы, $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{F})$ для любого $\alpha \in A$ и $|A| \leq w(X)$.

<u>Доказательство.</u> Существует такое слабое уплотнение f пространства X на метризуемое пространство Z, что $f(\mathcal{F})$ является σ -дискретной сетью пространства Z. Пусть $\mathcal{B}$ - база топологии в пространстве X мощности $w(X)$. Для каждого множества $V \in \mathcal{B}$ зафиксируем такое непрерывное отображение $g_V : X \longrightarrow [0;1]$, что $g_V^{-1}([0;1[) = V$. Пусть $\mathcal{F}_V = f \Delta g_V : X \longrightarrow X_V \subset Z \times [0;1]$. Поскольку f является уплотнением, то и $\mathcal{F}_V$ - уплотнение. Легко заметить также, что семейство $\mathcal{F}_V = \mathcal{F}_V(\mathcal{F})$ является σ -дискретной сетью в метризуемом пространстве X_V.

В качестве индексного множества A возьмем множество всех конечных подмножеств множества $\mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{I} = \{V_1, \ldots, V_k\} \in A$. Тогда положим $X_\mathcal{I} = X_{V_1} \Delta \ldots \Delta X_{V_k}$, $\mathcal{F}_\mathcal{I} = p_{V_1}^{-1}(\mathcal{F}_{V_1}) = p_{V_2}^{-1}(\mathcal{F}_{V_2}) = \ldots = p_{V_k}^{-1}(\mathcal{F}_{V_k})$, где p_{V_i} - проекция диагонали $X_{V_1} \Delta X_{V_2} \Delta \ldots \Delta X_{V_k}$ на координату X_{V_k}. Если $\mathcal{J} < \mathcal{I}$, то $\mathcal{J} \in \mathcal{I}$ и в качестве уплотнения $\mathcal{F}_\mathcal{J}^\mathcal{I}$ возьмем проекцию $p_\mathcal{J} : \Delta\{X_V : V \in \mathcal{I}\} \longrightarrow \Delta\{X_V : V \in \mathcal{J}\}$. Очевидно, что проекции $\mathcal{F}_\mathcal{J}^\mathcal{I}$ удовлетворяют условию транзитивности и $\mathcal{F}_\mathcal{J}^\mathcal{I}(\mathcal{F}_\mathcal{I}) = \mathcal{F}_\mathcal{J}$. Таким образом, обратный спектр $\{X_\mathcal{I}, \mathcal{F}_\mathcal{I}, \mathcal{F}_\mathcal{J}^\mathcal{I}, \mathcal{I}, \mathcal{J} \in A\}$ является жестким. Нетрудно также заметить, что пространство X будет пределом этого спектра. Предельными проекциями будут отображения $\mathcal{F}_\mathcal{I} = \pi_{V_1} \Delta \ldots \Delta \mathcal{F}_{V_k}$. Поэтому для каждого $\mathcal{I} \in A$ имеет место соотношение $\mathcal{F}_\mathcal{I}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_\mathcal{I}$.

<u>Замечание 1.</u> Из доказательства видно, что в утверждении предложения 2 можно дополнительно считать, что каждый элемент индексного множества A жесткого спектра имеет конечное число предшественников.

<u>Замечание 2.</u> Если $\mathcal{F}$ - σ -дискретная сеть в пространстве X, состоящая из замкнутых множеств, то в формулировке предложения 2 можно дополнительно потребовать, чтобы все $\mathcal{F}_\alpha$ являлись замкнутыми семействами.

Из утверждений предложения 1 и предложения 2 вытекает

<u>Теорема I.</u> Предел жесткого спектра является паракомпактным σ-пространством. Обратно, каждое паракомпактное σ-пространство гомеоморфно пределу жесткого спектра из метрических пространств.

<u>Следствие I.</u> Пространство со счетной сетью гомеоморфно пределу жесткого спектра из сепарабельных метрических пространств.

Естественно возникает вопрос, будет ли метризуем предел жесткого спектра из полных метрических пространств. Следующий пример дает отрицательный ответ на него.

<u>Пример I.</u> Существует жесткий спектр из полных сепарабельных метрических пространств, предел которого неметризуем.

Пусть $X_0 = \bigcup\{I_n : n \in N\}$ - "ежик" Ковальского веса $\aleph_0$, содержащий $\aleph_0$ "иголок" $I_n = I \times \{n\} (n \in N)$ и начальные точки $(0, n)$ "иголок", I_n которого отождествлены в одну точку 0^* [II]. Пусть $\mathfrak{B}_n$ - произвольная счетная база в отрезке $I_n \setminus \{0^*\}$ $(n \in N)$. Тогда семейство $\mathfrak{S}_0 = \bigcup\{\mathfrak{B}_n : n \in N\} \cup \{0^*\}$ является счетной сетью в пространстве X_0. Пусть $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ - произвольная точка множества $N^{\aleph_0}$. Определим множество $U_\alpha = \{x = (x, k) \in X_0 : x < \frac{1}{n_k}, k \in N\}$. Определим теперь метрику ρ_α на множестве X_0. Пусть $\bar{x} = (x, m)$, $\bar{y} = (y, l)$. Если $m = l$ и $\bar{x}, \bar{y} \in U_\alpha$, либо $\bar{x}, \bar{y} \notin U_\alpha$, то положим $\rho_\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = |x - y|$. Если же $m = l$ и либо $\bar{x} \in U_\alpha$, $\bar{y} \notin U_\alpha$, либо $\bar{x} \notin U_\alpha$, $\bar{y} \in U_\alpha$, то пусть $\rho_\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = |x - y| + 1$. Если же $m \neq l$, то положим $\rho_\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \rho_\alpha(\bar{x}, 0^*) + \rho_\alpha(\bar{y}, 0^*)$. Обозначим через X_α множество X_0 с метрикой ρ_α. Нетрудно заметить, что в метрическом пространстве X_α множество U_α открыто. Пространство X_α является полным. Легко видеть, что семейство $\mathfrak{S}_0$ является сетью в пространстве X_α, и мы эту сеть будем обозначать $\mathfrak{S}_\alpha$. Частично упорядочим множество $N^{\aleph_0}$. Пусть $\alpha = (n_1, \dots, n_k, \dots)$, $\beta = (m_1, \dots, m_k, \dots)$. Положим $\alpha \geqslant \beta$, если $n_k \geqslant m_k$ для всех $k \in N$. Таким образом $N^{\aleph_0}$ становится направленным множеством. Если $\alpha \geqslant \beta$, то пусть $\pi_\beta^\alpha : X_\alpha \to X_\beta$ - естественное отображение, порожденное тождественным отображением множества X_0. В этом случае

$U_\alpha \subset U_\beta$ и, как легко заметить, $\mathcal{T}_\beta^\alpha$ является уплотнением. Очевидно также, что $\mathcal{T}_\beta^\alpha(\mathcal{T}_\alpha) = \mathcal{T}_\beta$ для любых $\beta \leq \alpha$. Таким образом, $S = \{X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in N^{\aleph_0}\}$ является жестким спектром из полных сепарабельных метрических пространств. Пусть $Y = \varprojlim S$. Пространство Y как множество совпадает с X_0^-, и семейство $\{U_\alpha : \alpha \in N^{\aleph_0}\}$ является базой окрестностей в точке 0^*, из которой нельзя выделить счетную базу. Следовательно, пространство Y неметризуемо. Заметим, что пространство Y является "веером" Фреше-Урысона и не обладает первой аксиомой счетности.

§ 2. Жесткие спектры и размерность паракомпактных σ-пространств

Предложение 3. Каждое паракомпактное σ-пространство X размерности $\dim X \leq n$ гомеоморфно пределу такого жесткого спектра $\{X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in A\}$ что X_α метризуемо и $\dim Y_\alpha \leq n$ для каждого $\alpha \in A$

Доказательство. В силу предложения 2 и замечания I пространство X гомеоморфно пределу жесткого спектра $\{Y_\alpha, \mathcal{H}_\alpha, \mathcal{W}_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in A\}$ из метризуемых пространств, причем каждый элемент индексного множества A имеет конечное число предшественников. Пусть $\mathcal{W}_\alpha$ - предельные проекции ($\alpha \in A$) и $\mathcal{F}$ - такая σ-дискретная сеть в X, что $\mathcal{F} = \mathcal{W}_\alpha^{-1}(\mathcal{H}_\alpha)$ для каждого $\alpha \in A$. Представим множество A в виде $A = \bigcup\{A_m \quad m = 0, 1, 2, \ldots\}$, где A_m - множество всех элементов из A, имеющих ровно m предшественников. Искомый спектр построим по индукции. Пусть $m = 0$ и α - произвольный элемент множества A_0. По факторизационной теореме Б.А.Пасынкова для метрических пространств. существует такое метрическое пространство X_0 и такие уплотнения $\mathcal{T}_\alpha$ и g_α, что $\dim X_\alpha \leq n$, $\mathcal{T}_\alpha : X \to X_\alpha$, $g_\alpha : X_\alpha \longmapsto Y_\alpha$, $\mathcal{W}_\alpha = g_\alpha \circ \mathcal{T}_\alpha$. Нетрудно заметить, что семейство $\mathcal{F}_\alpha = g_\alpha^{-1}(\mathcal{H}_\alpha)$ - σ-дискретная сеть в X_α. Предположим, что для всех номеров $k < m$ и каждого $\alpha \in A_k$ построены метризуемое пространство X_α размерности $\dim X_\alpha \leq n$ и уплотнения $\mathcal{T}_\alpha$ и $\tilde{g}_\alpha$ такие, что $\mathcal{T}_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$, $\tilde{g}_\alpha : X_\alpha \longmapsto Y_\alpha \Delta (\Delta\{X_\beta : \beta < \alpha, \beta \in A_{k-1}\})$, причем $\mathcal{W}_\alpha = g_\alpha \circ \mathcal{T}_\alpha$, где $g_\alpha = p_\alpha \circ \tilde{g}_\alpha$ (p_α прое[illegible] на

координату Y_α в произведении $Y_\alpha \times \Pi\{X_\beta : \beta<\alpha, \beta \in A_{k-1}\}$. Проекциями $\mathcal{T}_\beta^\alpha$ будут естественные уплотнения $\mathcal{T}_\beta^\alpha = p_\beta \circ g_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X_\beta$

Пусть теперь α - произвольный элемент множества A_m. Тогда по факторизационной теореме для метрических пространств существует метризуемое пространство X_α размерности $\dim X_\alpha \leq n$ и уплотнения $\mathcal{T}_\alpha$ и $\mathcal{J}_\alpha$ такие, что $\mathcal{T}_\alpha : X \to X_\alpha$ $\mathcal{J}_\alpha : X_\alpha \mapsto Y_\alpha \Delta \{\Delta\{X_\beta \ \beta<\alpha, \beta \in A_{m-1}\}$, причем $\omega_\alpha = g_\alpha \circ \mathcal{T}_\alpha$, где $g_\alpha = p_\alpha \circ \mathcal{J}_\alpha$. Заметим, что семейство $\mathcal{G}_\alpha = g_\alpha^{-1}(\mathcal{F}_\alpha)$ является σ-дискретной сетью в X_α и $\mathcal{G} = \mathcal{T}_\alpha^{-1}(\mathcal{G}_\alpha)$. Продолжая индукцию, получим искомый жесткий спектр $\{X_\alpha, \mathcal{G}_\alpha, \mathcal{T}_\beta^\alpha, \alpha,\beta \in A\}$. Нетрудно заметить, что его предел гомеоморфен X.

Для доказательства предложения 4, обратного предложению 3, нам потребуется следующий результат Е.А.Пасынкова ([15, предложение 10]).

Лемма 1. Пусть дан обратный спектр $\{X_\alpha, \mathcal{T}_\beta^\alpha, \alpha,\beta \in A\}$ из метрических пространств размерности $\dim X_\alpha \leq n$, $\alpha \in A$ и такие непрерывные отображения $f_\alpha : X \to X_\alpha$, $\alpha \in A$, пространства X, что $f_\beta = \mathcal{T}_\beta^\alpha \circ f_\alpha$ при $\beta<\alpha$. Если для открытого покрытия ω пространства X существует такое множество $A_\omega \subset A$ и такие открытые в X_α множества V_α, $\alpha \in A_\omega$, что система $\omega' = \{O_\alpha = f_\alpha^{-1}(V_\alpha) : \alpha \in A_\omega\}$ является σ-локально конечным и вписанным в ω покрытием пространства X, то X обладает ω-отображением на метрическое пространство Z_ω размерности $\dim Z_\omega \leq n$.

Предложение 4. Пусть пространство X гомеоморфно пределу такого жесткого спектра $\{X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}_\beta^\alpha, \alpha,\beta \in A\}$, что пространство X_α метризуемо и $\dim X_\alpha \leq n$ для всякого $\alpha \in A$. Тогда $\dim X \leq n$.

Доказательство. Покажем, что для произвольного конечного открытого покрытия ω пространства X существует ω-отображение пространства X на метрическое пространство Z_ω размерности $\dim Z_\omega \leq n$. Пусть $\mathcal{T}_\alpha$ - предельные проекции и пусть $\mathcal{B}$ - стандартная база в X, состоящая из множеств вида $U = \mathcal{T}_\alpha^{-1}(O_\alpha)$, где O_α открыто в X_α. Пусть теперь $\mathcal{U}$ - максимальное подсемейство базы $\mathcal{B}$, вписан-

ное в покрытие ω. Семейство $\mathcal{H}=\pi_\alpha^{-1}(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha\in A}$ является σ-дискретной сетью пространства X. Пусть $\mathcal{F}$ - максимальное подсемейство $\mathcal{H}$, вписанное в $\mathcal{U}$. Нетрудно заметить, что $\mathcal{U}$ будет базой, а $\mathcal{F}$ - σ-дискретной сетью в пространстве X. Поскольку система $\mathcal{F}$ - σ-дискретна, то для каждого $F\in\mathcal{F}$ можно зафиксировать открытое множество $O(F)\in\mathcal{U}$ и элемент $\alpha(F)\in A$ таким образом, что $F\subset O(F)$, семейство $\omega=\{O(F): F\in\mathcal{F}\}$ - σ-дискретно и $O(F)=\pi_{\alpha(F)}^{-1}(V)$ для некоторого открытого множества V в $X_{\alpha(F)}$ ($F\in\mathcal{F}$). Применим теперь лемму I, полагая $f_\alpha=\pi_\alpha$ и $A_\omega=\{\alpha(F):F\in\mathcal{F}\}$. Тогда существует ω-отображение φ пространства X на метрическое пространство Z_ω. В силу произвольности покрытия ω отсюда сразу следует, что $\dim X\leq n$

<u>Предложение 5.</u> Предел жесткого спектра из пространств размерности $\dim$ не более n также имеет размерность $\dim$ не более n

<u>Доказательство.</u> Пусть $\{X_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \alpha,\beta\in A\}$ - данный жесткий спектр и паракомпактное σ-пространство X есть предел этого спектра. Без ограничения общности можно предполагать, что каждый элемент индексного множества A имеет конечное число предшественников (для этого достаточно перейти к множеству конечных подмножеств множества A, имеющих относительно индуцированного из A порядка наибольший элемент). Пусть $A=\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k$, где A_k - множество всех элементов из A, имеющих ровно k предшественников. В силу предложения 3 каждое пространство X_α является пределом такого жесткого спектра $\{Y_{(\alpha,\gamma)}, \mathcal{H}_{(\alpha,\gamma)}, p_{(\alpha,\delta)}^{(\alpha,\gamma)}, \gamma,\delta\in C_\alpha\}$ с предельными проекциями $p_{(\alpha,\gamma)}$, что для любых $\alpha\in A$ и $\gamma\in C_\alpha$ $p_{(\alpha,\gamma)}(\mathcal{F}_\alpha)=\mathcal{H}_{(\alpha,\gamma)}$, $\dim Y_{(\alpha,\gamma)}\leq n$, $Y_{(\alpha,\gamma)}$ метризуемо и $C_\alpha=\bigcup\{C_\alpha^k: k=0,1,\ldots\}$, где C_α^k - множество всех элементов из C_α, имеющих ровно k предшественников. Пусть $B=\bigcup\{\{\alpha\}\times C_\alpha:\alpha\in A\}$. Частично упорядочим множество B, считая $(\alpha,\gamma)<(\beta,\delta)$, если $\alpha<\beta$, $\gamma\in C_\alpha^k$, $\delta\in C_\beta^l$ и $k<l$. В смысле введенного порядка B является направленным множеством, каждый элемент которого имеет конечное число предшественников. Используя факторизационную теорему Б.А.Пасынкова для метрических пространств по индукции

аналогично доказательству предложения 3 можно построить такой жесткий спектр $S=\{X_{(\alpha,\beta)}, \mathcal{F}_{(\alpha,\beta)}, \mathcal{F}^{(\alpha,\beta)}_{(\gamma,\delta)}, (\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\in B\}$, что: 1) $\varprojlim S = X$; 2) для каждого $(\alpha,\beta)\in B$ пространство $X_{(\alpha,\beta)}$ метризуемо, $\dim X_{(\alpha,\beta)} \leq n$, $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta)}(\mathcal{F}_\alpha)=\mathcal{F}_{(\alpha,\beta)}$, где $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta)}$ - предельные проекции; 3) для каждого $(\alpha,\beta)\in B$ существует такое уплотнение $\mathcal{W}_{(\alpha,\beta)}: X_\alpha \to X_{(\alpha,\beta)}$, что $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta)}=\mathcal{W}_{(\alpha,\beta)}\circ\mathcal{F}_\alpha$; 4) топология $X_{(\alpha,\beta)}$ сильнее топологии $Y_{(\alpha,\beta)}$ при любом $(\alpha,\beta)\in B$. Таким образом, пространство X является пределом жесткого спектра S из метрических пространств размерности $\dim$ не более n. Поэтому в силу предложения 4 $\dim X \leq n$

Из теоремы I и предложений 3 и 5 непосредственно следует

<u>Теорема 2.</u> Для топологического пространства X следующие условия эквивалентны:

I) X - паракомпактное σ-пространство и $\dim X \leq n$;

2) X гомеоморфно пределу жесткого спектра из пространств размерности $\dim$ не более n ;

3) X гомеоморфно пределу жесткого спектра из метризуемых пространств размерности $\dim$ не более n

<u>Замечание 3.</u> При переходе к пределу в жестком спектре размерность может понижаться. Пусть $Q=\{q_k : k\in N\}$ - множество рациональных чисел, пространство X_k - действительная прямая, у которой точки q_j при $j<k$ изолированы, $\mathcal{H}$ - произвольная σ-дискретная замкнутая сеть в подпространстве иррациональных чисел, $\mathcal{F}^i_k$ - тождественное отображение пространства X_i на X_k Обратная последовательность $\{X_k, \mathcal{H}\cup Q, \mathcal{F}^i_k, k,i\in N\}$ является жестким спектром из одномерных пространств, но обратным пределом этой последовательности будет дискретная сумма пространств рациональных и иррациональных чисел, т.е. нульмерное пространство.

Одним из обобщений конечномерных в смысле $\dim$ пространств является понятие S-слабо бесконечномерного, введенное Ю.М.Смирновым [13, с.528] Напомним, что пространство X называется S-слабо бесконечномерным, если для любой счетной (бесконечной) системы дизъюнктных пар замкнутых множеств $\{(A_i,B_i): i\in N\}$ найдутся такие перегородки C_i между A_i и B_i ($i\in N$) и такой номер N , что $\bigcap\{C_i : 1\leq i\leq N\}=\emptyset$

Если пространство X не является S -слабо бесконечномерным, то говорят, что X S -сильно бесконечномерно.

Естественно возникает вопрос о перенесении теоремы 2 на S -слабо бесконечномерные пространства. Следующий пример показывает, что такое перенесение невозможно: предел жесткого спектра из S -слабо бесконечномерных метрических пространств может быть S -сильно бесконечным. Пример 2 показывает также, что аналог теоремы Нагаки о сохранении n -мерности при переходе к пределу обратной последовательности из метрических пространств в классе S -слабо бесконечномерных пространств не верен.

Пример 2. Существует обратная последовательность из конечномерных (следовательно, и S -слабо бесконечномерных) сепарабельных метрических пространств, образующая жесткий спектр, предел которой S -сильно бесконечномерен.

Пусть Y - произвольное сепарабельное метрическое пространство размерности $\dim Y = 0$ и мощности континуум. По теореме Хилгерса [5, с.311], для любого натурального числа n существует сепарабельное метрическое пространство Z_n и уплотнение $f_n: Z_n \to Y$. Уплотнение f_n является слабым, поскольку Z_n и Y - сепарабельные метрические пространства.

Построим жесткий спектр $\{X_i, \mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j^i, i, j \in N, j \le i\}$. Для $n \in N$ пространство X_n определим как дискретную сумму равенством $X_n = \oplus\{H_k^n : k \in N\}$, где $H_k^n = Z_k$ при $k \le n$ и $H_k^n = Y$ при $k > n$. Легко заметить, что X_n является сепарабельным метрическим пространством. Поскольку X_n является объединением счетного семейства своих открыто-замкнутых подпространств размерности не более n, то $\dim X_n \le n$. Пространство X_n содержит замкнутое подпространство Z_n^n размерности n. Размерности ind, Ind и $\dim$ в сепарабельных метрических пространствах совпадают, поэтому $\dim X_n = \operatorname{ind} X_n = \operatorname{Ind} X_n = n$. Таким образом, при каждом $n \in N$ пространство X_n n-мерно.

В каждом сепарабельном метрическом пространстве Z_n зафиксируем некоторую счетную базу топологии $\mathcal{B}_n$ и положим $\mathcal{H}_N = f_n(\mathcal{B}_n)$. Легко заметить, что семейство $\mathcal{H}_n$ будет

счетной сетью в пространстве У. Пусть $\mathcal{F}_n^k = \mathcal{D}_k$ при $k<n$ и $\mathcal{F}_n^k = \mathcal{K}_k$ при $k>n$ ($k,n\in N$). Тогда семейство $\mathcal{F}_n^k$ является счетной сетью в подпространстве H_k^n. Определим теперь счетную сеть $\mathcal{F}_n$ в пространстве X_n, положив $\mathcal{F}_n = \cup\{\mathcal{F}_n^k : k\in N\}$. Для каждого $n\in N$ определим спектральную проекцию $\mathcal{F}_n^{n+1} : X_{n+1} \longrightarrow X_n$ равенством

$$\mathcal{F}_n^{n+1}(x) = \begin{cases} Id_{H_k^{n+1}}(x) & \text{при } x\notin H_{n+1}^{n+1} \\ f_{n+1}(x) & \text{при } x\in H_{n+1}^{n+1} \end{cases}, \text{ где}$$

$Id_{H_k^{n+1}}$ - тождественное отображение пространства H_k^{n+1}. Это определение корректно, так как при $k\neq n+1$ пространства H_k^{n+1} и H_k^n совпадают. Нетрудно заметить, что отображение $\mathcal{F}_n^{n+1}$ является уплотнением. Имеет место также равенство $\mathcal{F}_n^{n+1}(\mathcal{F}_{n+1}) = \mathcal{F}_n$, поскольку при $k\neq n+1$ $\mathcal{F}_n^{n+1}(\mathcal{F}_{n+1}^k) = Id_{H_k^{n+1}}(\mathcal{F}_{n+1}^k) = \mathcal{F}_n^k$ и при $k=n+1$ $\mathcal{F}_n^{n+1}(\mathcal{F}_{n+1}^{n+1}) = f_{n+1}(\mathcal{D}_{n+1}) = \mathcal{K}_{n+1} = \mathcal{F}_n^{n+1}$. Остальные спектральные проекции $\mathcal{F}_i^{n+1}$ ($i<n$) легко определяются из условия транзитивности $\mathcal{F}_i^{n+1} = \mathcal{F}_i^n \circ \mathcal{F}_n^{n+1}$. Таким образом, жесткий спектр $\{X_n, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_i^n, i,n\in N\}$ определен. Нетрудно заметить, что обратным пределом этого спектра будет сепарабельное метрическое пространство, которое равно дискретной сумме $X = \oplus\{Z_n : n\in N\}$. Пространство X S -сильно бесконечномерно как дискретная сумма замкнутых в X множеств ($n\in N$) размерности $\dim Z_n \geq n$ (см. [13, с.537]).

§ 3. Факторизационная теорема для слабых уплотнений

Теорема 3. Для слабого уплотнения $f : X \longrightarrow Y$ существует паракомпактное σ -пространство Z и слабые уплотнения $g : X \longrightarrow Z$, $h : Z \longrightarrow Y$ такие, что $f = h\circ g$, $\dim Z \leq \dim X$ и $\omega(Z) \leq \omega(Y)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ - такая σ -дискретная сеть в пространстве X, что $\mathcal{F} = f(\mathcal{H})$ является σ -дискретной сетью в У. Пространства X и У - паракомпакты. В силу предложения 2, пространство У является пределом такого жесткого спектра $\{Y_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta^\alpha, \alpha,\beta\in A\}$, что все пространства Y_α метризуемы, каждый элемент индексного множества A имеет конечное число предшественников $|A| \leq \omega(Y)$ и, если $\mathcal{F}_\alpha$ - предельные проекции, то $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_\alpha$ для каждого $\alpha\in A$.

Обозначим через A_k множество всех элементов из A, имеющих ровно k предшественников ($k=0,1,2,\dots$) и пусть $B_k=\bigcup_{i=0}^{k} A_i$. Для каждого $\alpha\in A$ положим $f_\alpha=\mathfrak{F}_\alpha\circ f$, тогда $f_\alpha(\mathfrak{X})=\mathcal{G}_\alpha$, $f_\beta=\mathfrak{P}_\beta^\alpha\circ f_\alpha$ для любого $\beta<\alpha$

Построим по индукции жесткий спектр $S=\{Z_\alpha,\mathcal{G}_\alpha,p_\beta^\alpha,\alpha,\beta\in A\}$ и системы уплотнений $\{(g_\alpha:X\longrightarrow Z_\alpha):\alpha\in A\}$ и $\{(h_\alpha:Z_\alpha\longrightarrow Y_\alpha):\alpha\in A\}$, удовлетворяющие для каждого $\alpha\in A$ следующим свойствам: 1) Z_α – метризуемое пространство; 2) $\dim Z_\alpha\le\dim X$; 3) $\omega(Z_\alpha)\le\omega(Y)$; 4) $f_\alpha=h_\alpha\circ g_\alpha$; 5) $h_\alpha(\mathcal{G}_\alpha)=\mathfrak{F}_\alpha$; 6) $g_\alpha(\mathfrak{X})=\mathcal{G}_\alpha$; 7) $g_\beta=p_\beta^\alpha\circ g_\alpha$ для любого $\beta<\alpha$ 8) $p_\beta^\alpha\circ h_\beta=\mathfrak{P}_\beta\circ h_\alpha$ для любого $\beta<\alpha$.

Для каждого $\alpha\in A_0$ пространство Z_α и уплотнения g_α и h_α легко построить, используя факторизационную теорему Б.А.Пасынкова для метрических пространств. Предположим, что уже построены жесткий спектр $S_m=\{Z_\alpha,\mathcal{G}_\alpha,p_\beta^\alpha,\alpha,\beta\in B_m\}$ и системы уплотнений $\{(g_\alpha:X\longrightarrow Z_\alpha):\alpha\in B_m\}$ и $\{(h_\alpha:Z_\alpha\longrightarrow Y_\alpha):\alpha\in B_m\}$, удовлетворяющие свойствам 1) – 8). Построим жесткий спектр S_{m+1} и соответствующие уплотнения g_α и h_α, $\alpha\in A_{m+1}$.

Пусть $\alpha\in A_{m+1}$ и пусть $\tilde f_\alpha:X\longrightarrow Y_\alpha\times\prod\{Z_\beta:\beta<\alpha,\beta\in A_m\}$, где $\tilde f_\alpha=f_\alpha\Delta(\Delta\{g_\beta:\beta<\alpha,\ \beta\in A_m\}$ Тогда по факторизационной теореме Б.А.Пасынкова для метрических пространств существует метрическое пространство Z_α и уплотнения $\tilde h_\alpha:Z_\alpha\to Y_\alpha\times\prod\{Z_\beta:\beta<\alpha,\beta\in A_m\}$ и $g_\alpha:X\longrightarrow Z_\alpha$ такие, что $\tilde f_\alpha=\tilde h_\alpha\circ g_\alpha$, $\dim Z_\alpha\le\dim X$ и $\omega(Z_\alpha)\le$ $\le\omega(Y_\alpha\times\prod\{Z_\beta:\beta<\alpha,\ \beta\in A_m\})\le\omega(Y)$. Положим h_α равным композиции отображения $\tilde h_\alpha$ с проекцией множества $\tilde h_\alpha(Z_\alpha)$ на Y_α в произведении $Y_\alpha\times\prod\{Z_\beta:\beta<\alpha,\beta\in A_m\}$. Тогда имеем $f_\alpha=h_\alpha\circ g_\alpha$. Пусть $\mathcal{G}_\alpha=g_\alpha(\mathfrak{X})$. Нетрудно заметить, что семейство $\mathcal{G}_\alpha$ будет σ-дискретной сетью в пространстве Z_α Если $\beta<\alpha$ и $\beta\in A_m$, то в качестве p_β^α возьмем композицию уплотнения $\tilde h_\alpha$ с проекцией множества $\tilde h_\alpha(Z_\alpha)$ на координату Z_β в произведении $Y_\alpha\times\prod\{Z_\beta:\beta<\alpha,$ $\beta\in A_m\}$ Остальные проекции p_β^α легко достраиваются, исходя из условия транзитивности. Нетрудно заметить, что $h_\alpha(\mathcal{G}_\alpha)=\mathfrak{F}_\alpha$, $g_\alpha(\mathfrak{X})=\mathcal{G}_\alpha$ и $p_\beta^\alpha(\mathcal{G}_\alpha)=\mathcal{G}_\beta$ для

любого $\beta \leq \alpha$. Свойства 7) и 8) также проверяются непосредственно.

Проделав такую конструкцию для каждого элемента $\alpha \in A_{m+1}$, построим жесткий спектр S_{m+1}. Продолжая индукцию по всем $m \in N$, получим жесткие спектры $\{S_m : m \in N\}$, удовлетворяющие свойствам I) - 8) и такие, что $S_m \subset S_{m+1}$. Тогда жесткий спектр $S = \cup\{S_m : m \in N\}$ будет также удовлетворять свойствам I) - 8).

Определим пространство Z как обратный предел жесткого спектра S. Пусть $p_\alpha : Z \longrightarrow Z_\alpha$ - предельная проекция $\alpha \in A$. По теореме 2 пространство Z будет паракомпактным σ-пространством размерности $\dim Z \leq \dim X$. В силу свойства 3) и неравенства $|A| \leq \omega(Y)$ имеем $\omega(Z) \leq |A| \cdot \omega(Y) \leq \omega(Y)$. Система $\mathcal{L} = \mathcal{T}_\alpha^{-1}(\mathcal{L}_\alpha)$ $(\alpha \in A)$ будет σ-дискретной сетью в Z. Из свойства 7) и определения предела обратного спектра следует, что существует единственное уплотнение $g : X \longrightarrow Z$, порожденное системой $\{(g_\alpha : X \longrightarrow Z_\alpha) : \alpha \in A\}$ и такое, что $g_\alpha = p_\alpha \circ g$ для любого $\alpha \in A$. В силу свойства 8) система $\{(h_\alpha : Z_\alpha \longrightarrow Y_\alpha) : \alpha \in A\}$ является спектральным морфизмом в категории жестких спектров S в спектр $\{Y_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \mathcal{T}_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in A\}$. Поэтому существует такое уплотнение $h : Z \longrightarrow Y$, что $\mathcal{T}_\alpha \circ h = h_\alpha \circ p_\alpha$ для любого $\alpha \in A$, а следовательно, $h^{-1}(\mathcal{F}) = h^{-1}(\mathcal{T}_\alpha^{-1}(\mathcal{F}_\alpha)) = (\mathcal{T}_\alpha \circ h)^{-1}(\mathcal{F}_\alpha) = (h_\alpha \circ p_\alpha)^{-1}(\mathcal{F}_\alpha) = p_\alpha^{-1}(h_\alpha^{-1}(\mathcal{F}_\alpha)) = p_\alpha^{-1}(\mathcal{L}_\alpha) = \mathcal{L}$. Аналогично $g^{-1}(\mathcal{L}) = \mathcal{H}$. Таким образом, уплотнения h, g являются слабыми и $g(\mathcal{H}) = \mathcal{L}$ и $h(\mathcal{L}) = \mathcal{F}$. Непосредственно проверяется, что $f = h \circ g$

Литература

I. Архангельский А.В. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локальные бикомпактные пространства. - Матем.сборник. 1965, т.67, № I, с.55-85.

2. Ceder J.G. Some generalizations of metric spaces. - Pacific J. Math., 1961, vol. 11, N 1, p. 105-126.

3. Okuyama A. Some generalizations of metric spaces, their metrization theorems and product spaces. - Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daidaku, Sect. A9, 1967, p. 236-254.

4. Архангельский А.В. Классы топологических групп. - УМН, 1981, т.36, № 3, с.127-146.
5. Куратовский К. Топология. - М., 1966, т.I.
6. Клюшин В.Л. О совершенных отображениях паракомпактных пространств. - ДАН СССР, 1964, т.159, № 4, с.734-737.
7. Пасынков Б.А. О размерности произведений нормальных пространств. - ДАН СССР, 1973, т.209, № 4, с.792-794.
8. Bregman J.H. Paracompact σ-spaces: inverse systems and dimension. - In: Colloquium on topology, Eger, Hungary, 1983. p. 13.
9. Брегман Ю.Х. Спектральное представление некоторых классов паракомпактов, близких к метризуемым. - В кн.: Тезисы докладов конференции "Методы алгебры и анализа". Тарту, 1983, с.25.
10. Брегман Ю.Х. Паракомпактные σ-пространства: спектральное представление и размерность. - В кн.: VIII Школа по теории операторов в функциональных пространствах. Рига, 1983, ч.I, с.30-31.
11. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. - М., 1974.
12. Engelking R. General topology. - Warszawa, PWN, 1977.
13. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. - М., 1973.
14. Федорчук В.В. Произведения и спектры топологических пространств. - М., 1979, ч.I.
15. Пасынков Б.А. Факторизационные теоремы в теории размерности. - УМН, 1981, т.36, № 3, с.147-175.

Поступила 10 сентября 1984 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.83

О ДОМИНИРУЮЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ И УЗКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.И.Векслер
Ленинградский институт текстильной и легкой промышленности им.С.М.Кирова

§ I. Введение

Определение I. Последовательность $\{F_n\}$ замкнутых нигде не плотных (з.н.н.п.) множеств данного пространства X называется доминирующей последовательностью (ДП) (на X), если ее объединение $\bigcup F_n$ плотно в X и для любой другой последовательности $\{F'_n\}$ з.н.н.п. множеств такой, что $F'_n \cap F_n = \emptyset$ ($n \in \omega$) обязательно $\bigcup F'_n$ н.н.п. в X. Объединение элементов какой-либо ДП называется стержнем. Топологическое пространство, имеющее ДП, называется узким.

Определение 2. Стержень M, такой что любая последовательность з.н.н.п. множеств $F_n \uparrow M$ (это значит, что $F_n \subset F_{n+1}$, $\bigcup F_n = M$) является ДП называется твердым. Стержень M, для которого существуют последовательности $\{F_n\}$ и $\{F'_n\}$ з.н.н.п. множеств такие, что $F_n \uparrow M$, $F'_n \cap F_n = \emptyset$ ($n \in \omega$), но $\bigcup F'_n$ плотно в X, называется мягким.

Указанные понятия были введены и изучались в [I] (см. также [2], [3]). Хотя узкие пространства встречаются нечасто и "хорошие" пространства не являются узкими - существуют нетривиальные примеры узких пространств, например, узкое P-пространство, узкий линейно упорядоченный бикомпакт, узкий экстремально несвязный бикомпакт с условием Суслина, узкое однородное пространство, узкое нормальное счетное пространство (впервые такое пространство было построено с помощью CH В.И.Малыхиным [3]; в дальнейшем П.Симон построил более простой пример такого пространства, не требующий никаких теоретико-множественных предположений). Из известных пространств узким является бикомпактное пространство $\omega\omega_1$ всех равномерных ультрафильтров в ω_1.

Здесь продолжается изучение ДП. Сначала договоримся об обозначениях. Буква Φ (с индексами) будет употребляться для обозначения замкнутого множества, буква F - для обозначения з.н.н.п. множества, буква G - для обозначения открытого множества. Запись „$A d B$" будет употребляться вместо более длинной „$A \cap B = \phi$", а запись „$\cup E_n$" - вместо „$\cup\{E_n : n \in \omega\}$". X всюду будет обозначать топологическое пространство, а замыкание $E \subset X$ будет обозначаться $cl\, E$ или $cl_X E$. В остальном будет использована терминология монографий [4] и [5]

В § 2 устанавливаются некоторые характеристические свойства ДП с помощью тех или иных последовательностей замкнутых или з.н.н.п. множеств. В частности, доказывается совпадение классов доминирующих и вполне неправильных последовательностей ([6] , [7]) в не слишком плохих пространствах (теор.2 и предл.3). В теореме 8 устанавливается, что свойство доминируемости для монотонно возрастающей $\{F_n\}$ (напомним, что любая ДП мажорируется возрастающей ДП) равносильно отсутствию мажорирующей возрастающей последовательности з.н.н.п. множеств, след которой на каком-либо к.э. множестве разложим (по определению $\{\Phi_n\}$ разложима, если все множества $\Phi_{n+1} \setminus \Phi_n$ замкнуты). В § 3 даны некоторые способы построения узких пространств, а затем приведены абстрактные характеризации твердых стенней. Приведена также одна конструкция построения узких пространств, с помощью которой, в частности, строится узкое однородное пространство.

§ 2 Доминирующие и вполне неправильные последовательности

Определение 3. Последовательность $\{F_n\}$ з.н.н.п. множеств называется вполне неправильной (ВНП), если для любых замкнутых $\Phi_n d F_n$ и для любого открытого $G \neq \phi$ существуют непустое (открытое) $G' \subset G$ и $p \in \omega$ такие, что $\cup\{\Phi_n : n \geq p\}\, d\, G'$.

Близкое понятие было введено для случая экстремально несвязного бикомпакта в [6] и для произвольного бикомпакта в [7]. Нам будет удобно пользоваться другим характеристическим свойством ВНП. Будем называть последовательность

$\{E_n\}$ произвольных множеств существенно плотной на данном $A \subset X$, если $\cup\{E_n \cap A : n \geq p\}$ плотно на A при любом $p \in \omega$. Последовательность, не являющаяся существенно плотной ни на каком открытом $G \neq \phi$ называется нигде не существенно плотной (н.н.с.п.). Следующее утверждение очевидно.

Предложение I. Последовательность $\{F_n\}$ з.н.н.п. множеств является ВНП тогда и только тогда, когда всякая последовательность $\{\Phi_n\}$ (замкнутых множеств), где $\Phi_n \, d \, F_n$, является н.н.с.п.

Оказывается, ВНП имеют свойства, аналогичные свойствам ДП. Как показывает следующая теорема, это обстоятельство отнюдь не является случайным.

Теорема 2. Для того, чтобы последовательность $\{F_n\}$ з.н.н.п. множеств была ДП необходимо и достаточно, чтобы она была ВНП с плотным объединением.

Доказательство. Достаточность сразу следует из того, что произвольная последовательность $\{F'_n\}$ з.н.н.п. множеств существенно плотна на G тогда и только тогда, когда $\cup F'_n$ плотно на G

Необходимость. Пусть $\{F_n\}$ - ДП. Допустим, что она не является ВНП. Тогда существуют замкнутые $\Phi_n \, d \, F_n$ такие, что $\{\Phi_n\}$ существенно плотна на некотором $G \neq \phi$, а значит, и на канонически замкнутом (к.з.) $W = cl\, G$ Так как след ДП на к.з. множестве есть ДП [I], то можно, не умаляя общности, считать, что $W = X$.

Положим $G_n = int\, \Phi_n$ Так как $\Phi_n \setminus G_n$ - з.н.н.п., а $\{F_n\}$ - ДП, то $\cup(\Phi_n \setminus G_n)$ тоже з.н.н.п. Значит, $\{G_n\}$ существенно плотна на X.

Пусть $F'_n = \Phi_n \setminus [(G_{n+1} \cup G_{n+2} \cup \ldots) \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_n)]$
Тогда F'_n з.н.н.п. и $F'_n \, d \, F_n$ Значит $\cup F'_n$ н.н.п. Покажем, что это невозможно. Положим $E = (\cup F_n) \cap (\cup G_n)$
Так как $\cup G_n$ открыто и плотно, то E плотно в X. Проверим, что $\cup F'_n \supset E$ Возьмем $x \in E$ Мыслимы две возможности. а) x содержится в конечном числе множеств G_n Пусть G_k последнее из них. Тогда $x \in F'_k$ б) x содержится в бесконечном числе G_n Так как $F_n \, d \, G_n$, то найдутся $l < k$ такие, что $x \in F_l$ и $x \in G_k \subset \Phi_l$ Отсюда $x \in F'_k$.

Итак, $E \subset \cup F'_n$, т.е. $\cup F'_n$ плотно в X, вопреки ранее установленному. Противоречие завершает доказательство.

В связи с теоремой 2, определенный интерес представляет следующее, нехитрое утверждение.

Предложение 3. Пусть в пространстве X всякое непустое открытое G содержит F_σ -множество A, не являющееся н.н.п. Тогда всякая ВНП $\{F_n\}$ в X имеет плотное объединение (и, следовательно, классы ДП и ВНП в X совпадают).

Доказательство. Допустим, что $\cup F_n \not\subset G \neq \emptyset$. Пусть A - F_σ -множество из условия предложения, $A = \cup \Phi'_n$. Существует непустое $G' \subset G$ такое, что A плотно на G'. Возможны два варианта.

а) Существует Φ'_{n_0}, не являющееся н.н.п. Тогда, полагая $\Phi_n = \Phi'_{n_0}$ $(n \in \omega)$, получаем последовательность $\{\Phi_n\}$, существенно плотную на $int\, \Phi'_{n_0} \neq \emptyset$. Это противоречит предложению I.

б) Все Φ'_n н.н.п. Но тогда $\Phi'_n \not\subset F_n$, а $\{\Phi'_n\}$ существенно плотна на G'. Это противоречит тому, что $\{F_n\}$ - ВНП.

Итак, действительно, в пространствах достаточно общего вида классы ДП и ВНП совпадают. В произвольных пространствах это не так.

Установим сейчас по одной характеризации монотонно возрастающих ДП и ВНП.

Предложение 4. А) Для того, чтобы монотонно возрастающая последовательность $\{F_n\}$ была ВНП, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: если $\{\Phi_n\}$ существенно плотна на некотором $G \neq \emptyset$, то множества $\Gamma_n = \{m : \Phi_m \cap F_n \neq \emptyset\}$ бесконечны, начиная с некоторого n_0.

Б) Для того, чтобы монотонно возрастающая $\{F_n\}$ с плотным объединением была ДП, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: если $\cup F'_n$ плотно на $G \neq \emptyset$, то множества $\Delta_n = \{m : F'_m \cap F_n \neq \emptyset\}$ бесконечны, начиная с некоторого n_0.

Доказательство. А) Прежде всего заметим, что множества Γ_n монотонно возрастают.

Необходимость. Пусть $\{F_n\}$ - ВНП, но все множества

конечны. Можно считать, что $F_1 = \phi$ Положим $\Phi'_n =$ $= \cup\{\Phi_m : \Phi_m \parallel F_n = \phi,\ \Phi_m \cap F_{n+1} \neq \phi\}$ $(n \in \omega)$. Очевидно, объединения в последнем равенстве берутся по конечным множествам индексов m, т.е. все Φ'_n замкнуты. По построению $\Phi'_n \, d \, F_n$. В силу предложения I, $\{\Phi_n\}$ н.н.с.п. в X. Далее положим $\omega^{(0)} = \omega \setminus \cup \Gamma_n$. Имеем $\cup\{\Phi_n : n \in \omega^{(0)}\} d \cup\{F_n : n \in \omega\}$. Потому и $\{\Phi_n (n \in \omega^{(0)})\}$ н.н.с.п. в X. Отсюда $L = \{\Phi'_n\} \cup \{\Phi_n (n \in \omega^{(0)})\}$ тоже н.н.с.п. в X. Но любой член исходной последовательности $\{\Phi_n\}$ мажорируется каким-нибудь членом из L Следовательно, $\{\Phi_n\}$ не может быть существенно плотной на $G \neq \phi$

Достаточность. Пусть $\Phi_n \, d \, F_n$ Тогда $F_n \, d (\Phi_n \cup \Phi_{n+1} \cup \ldots)$. Значит Γ_n конечно. По условию это означает, что $\{\Phi_n\}$ н.н.с.п. Поэтому $\{F_n\}$ - ВНП.

Б) Очевидно, условие, рассматриваемое в Б), слабее соответствующего условия из А). Отсюда, необходимость в Б) вытекает из необходимости в А) (и теоремы 2). Достаточность же в Б) доказывается таким же рассуждением, как и достаточность в А).

Накладывая не очень обременительные условия на X, можно получить и другие характеризации ДП. Напомним, что <u>нигде не плотно нормальным</u> (<u>н.н.п. нормальным</u>) называется такое регулярное пространство, в котором любые два з.н.н.п. непересекающихся множества можно отделить открытыми.

<u>Предложение 5.</u> Пусть X - н.н.п. нормальное пространство. Для того, чтобы последовательность $\{F_n\}$ з.н.н.п. множеств была ДП необходимо и достаточно, чтобы всякая последовательность к.з.множеств $\{W_n\}$, где $W_n \, d \, F_n$, была н.н.с.п.

<u>Доказательство.</u> Необходимость вытекает из предложения I и теоремы 2.

Достаточность. Если $\{F_n\}$ не есть ДП, то найдутся з.н.н.п. $F'_n \, d \, F_n$ такие, что $\cup F'_n$ плотно на некотором $G \neq \phi$ и, следовательно, плотно на к.з. $W = cl\, G$ Так как, очевидно, W тоже является н.н.п. нормальным, то можно считать, не умаляя общности, что $W = X$ Таким образом, можно считать, что $\cup F'_n$ плотно на X. Пользуясь н.н.п. нор-

мальностью X подберем к.з. $W_n \supset F'_n$, $W_n \, d \, F_n$. Очевидно, $\{W_n\}$ существенно плотна на X. Это завершает доказательство.

Замечания. I) Именно условие, рассматриваемое в предложении 5, было использовано в [7] для определения ВНП в бикомпакте.

2) Если $\{F_n\}$ - ДП в пространстве с π-базой к.з. множеств и $\cup(F'_n \cap F_n)$ - н.н.п., то и $\cup F'_n$ - н.н.п. ([I], теор.5.2)). Отсюда следует, что предложение 5 остается в силе для X, отличающегося от н.н.п. нормального пространства на н.н.п. множество (например, оно верно для локального бикомпакта X). Аналогичное замечание можно сделать и для последующих результатов работы.

Предложение 6. Пусть X - н.н.п. нормальное пространство, $\{F_n\}$ - монотонно возрастающая последовательность з.н.н.п. множеств. Для того, чтобы $\{F_n\}$ была ДП необходимо и достаточно, чтобы не существовало к.з. множества $W \neq \emptyset$ и такой $\{F'_n\}$, мажорирующей $\{F_n\}$, для которых $cl(F_{n+1} \setminus F_n) \cap W \, d \, F'_n$ $(n \in \omega)$.

Доказательство. Необходимость. Если $\{F_n\}$ - ДП, то полагая $F'_n = cl(F_{n+1} \setminus F_n) \cap W$, имеем $F'_n \, d \, F_n$, но $\cup F'_n \supset (\cup F_n) \cap W$, т.е. плотно на W.

Достаточность. Пусть $\{F_n\}$ не есть ДП. В силу предложения 5 найдутся к.з. $W_n \, d \, F_n$ и к.з. $W \neq \emptyset$ такие, что $\{W_n\}$ существенно плотна на W. Так как множества $W'_n = cl \, int(W_n \cap W)$ - к.з. подмножества в W (в относительной топологии на W), то так же, как и при доказательстве достаточности в предложении 5, можно считать, что $W = X$.

Пусть $V_n = cl(X \setminus W_n)$. Тогда V_n - к.з., $V_n \cup W_n = X$, $V_n \cap W_n = F_n W_n$. Для любого $n \in \omega$ рассмотрим множество $H_n = \cap\{V_l : l \geq n\}$. H_n замкнуто и является дополнением к $E = \cup\{int \, W_l \quad l \geq n\}$ Так как W_l - к.з., то из плотности $\cup\{W_l : l \geq n\}$ вытекает плотность множества E. Значит, H_n - н.н.п. Положим

$$F'_n = F_n \cup (F_{n+1} \cap V_n) \cup (F_{n+2} \cap V_n \cap V_{n+1}) \cup \ldots \cup (F_k \cap V_n \cap \ldots \cap V_{n-1}) \cup \ldots \cup H_n$$

и покажем, что множества F'_n - искомые.

Пусть $x \in F'_n$. Тогда $x \in H_n$. Поэтому $x \in V_k$ при некотором $k \geq n$. Отсюда $x \in X \setminus (V_n \cap \ldots \cap V_k) = G$

Но G пересекается лишь с конечным числом слагаемых из правой части в определении F_n. Вычтя их из G, мы получим открытое множество, содержащее x и не пересекающееся с F_n. Итак, F_n замкнуто.

Так как н.н.п. $H_n = \bigcap\{V_n \cap \ldots \cap V_l \quad l \geq n\}$, то в любом открытом $G' \neq \emptyset$ найдется $x' \in V_n \cap \ldots \cap V_{l_0}$. Но $G' \setminus (V_n \cap \ldots \cap V_{l_0})$ открыто. Отсюда F_n – н.н.п. Наконец, по построению $F_n = F_n \cap V_n$. Поэтому $F_{n+1} \setminus F_n \subset X \setminus V_n = \operatorname{int} W_n$, т.е. $cl(F_{n+1} \setminus F_n) \subset W_n$. Значит, $cl(F_{n+1} \setminus F_n) d F_n$. Предложение доказано.

Теперь перейдем к случаю строго нульмерного в смысле [8] пространства. Для этого случая два предыдущих предложения могут быть усилены в части достаточности. Будем говорить, что монотонно возрастающая $\{\Phi_n\}$ <u>разложима</u>, если все $\Phi_{n+1} \setminus \Phi_n$ замкнуты.

<u>Теорема 7.</u> Пусть X – строго нульмерное нормальное пространство. Справедливы следующие утверждения А) и Б).

А) Для того, чтобы $\{F_n\}$ была ДП необходимо и достаточно, чтобы всякая последовательность $\{X_n\}$ открыто-замкнутых (о.з.) множеств, такая, что $X_n d F_n$, была н.н.с.п.

Б) Для того, чтобы монотонно возрастающая $\{F_n\}$ была ДП необходимо и достаточно, чтобы не существовало о.з. множества X_0 и такой $\{F_n\}$, мажорирующей $\{F_n\}$, след которой на X_0 – разложимая последовательность.

<u>Доказательство.</u> А) вытекает из предложения 5 и того факта, что если к.з. $W_n d F_n$, то в силу нормальности и строгой нульмерности X, существует о.з. $X_n \supset W_n$, $X_n d F_n$

Б) Необходимость вытекает из предложения 6.

Достаточность. Пусть о.з. $X_n d F_n$, X_0 – о.з. и $\{X_n\}$ существенно плотна на X_0. Не умаляя общности, можно считать, что $X = X_0$.

Положим $A_n = X_n \cup X_{n+1} \cup \ldots$ Тогда A_n – плотное открытое F_σ-множество и $A_n d F_n$. Пусть $\bar{F}_n = X \setminus A_n$. Очевидно, $\bar{F}_n \subset F_n$, $\bar{F}_n$ – з.н.н.п. и $\{\bar{F}_n\}$ монотонно возрастает. Кроме того, $\bar{F}_{n+1} \setminus \bar{F}_n = X \setminus A_{n+1}$ – з.н.н.п. G_δ-множество.

<u>Замечания.</u> I) Отметим, что множества $\bar{F}_{n+1} \setminus \bar{F}_n$, построенные при доказательстве Б), являются Θ-множествами,

(т.е. н.н.п. нуль-множествами).

2) Очевидно, А) не переносится в части достаточности на случай пространства, не являющегося строго нульмерным. А.В.Колдунов доказал то же самое для Б), построив на квадрате монотонно возрастающую $\{F_n\}$, удовлетворяющую условию из Б) (напомним, что в метрическом пространстве не существует ДП [3]).

§ 3. Узкие пространства и стержни

Сейчас мы укажем некоторые способы построения новых узких пространств, исходя из данных.

Теорема 8. Пусть X - узкое пространство с ДП $\{F_n\}$. Имеют место следующие утверждения А) - В).

А) Если У - бикомпакт, то $Z = X \times Y$ - узкое пространство с ДП $\{F_n \times Y\}$.

Б) Если X плотное подпространство в н.н.п. нормальном У, то У узкое пространство с ДП $\{cl_Y F_n\}$

В) Любая бикомпактификация узкого пространства - узкое пространство.

Доказательство. А) Положим $F_n = F_n \times Y \subset Z$. Пусть $\Phi_n \, d \, F_n$. Возьмем $G = G_1 \times G_2 \neq \phi$. Ввиду бикомпактности У операция P_{1X} замкнута. Поэтому множество $\Phi'_n = P_{1X}\Phi_n$ замкнуто. Так как $F_n = F_n \times Y$ то $\Phi'_n \, d \, F_n$ Так как $\{F_n\}$ - ВНП, то существуют непустое $G'_1 \subset G_1$ и $p \in \omega$ такие, что $\cup\{\Phi'_n : n \geq p\} \, d \, G'_1$. Но тогда $\cup\{\Phi_n : n \geq p\} \, d \, (G'_1 \times G_2)$. Значит, $\{F_n\}$ - ВНП в Z Так как $\cup F_n$ плотно в Z, то $\{F_n\}$ - ДП.

Б) Положим $F_n = cl_Y F_n$. Если $\{F_n\}$ не ДП в У, то, воспользовавшись теоремой 2 и предложением 5, найдем к.з. $W_n \, d \, F_n$ и $G \neq \phi$ такие, что $\{W_n\}$ существенно плотна на G, а значит, и на к.з. $W = cl G$. Так как множества $cl_W \, int_W (W_n \cap W)$ - к.з. подмножества в W в относительной топологии, то так же, как и в предыдущих доказательствах, достаточно ограничиться случаем $W = Y$

При любом $p \in \omega$ $\cup\{W_n : n \geq p\}$ плотно в У. Так как W_n - .з. в У, а X плотно в У, то $\cup\{W_n \cap X : n \geq p\}$ плотно в X. Но это противоречит тому, что $(W_n \cap X) \, d \, F_n$,

а $\{F_n\}$ - ДП.

В) есть очевидное следствие Б).

Замечания. I) В силу Б) всякий стержень $M \subset X$ может быть погружен в некоторый стержень $\bar{M} = \bigcup cl_Y F_n$ в У. Но варьируя ДП, $F_n \uparrow M$, можно тем самым варьировать и свойства $\bar{M}$. Можно, например, построить $M \subset X$, бикомпакт У и такие $F_n' \uparrow M$, $F_n'' \uparrow M$, что $\bigcup cl_Y F_n'$ - твердый стержень, а $\bigcup cl_Y F_n''$ - мягкий стержень в У.

2) Мы не знаем, является ли стержень $\bigcup(F_n \times Y_c)$ условиях А) твердым, если стержень $\bigcup F_n$ твердый. Отметим в связи с этим, что, к примеру, если X - узкий бикомпакт с твердым стержнем $\bigcup F_n$, а У -пространство рациональных чисел, то $\bigcup(F_n \times Y)$ - мягкий стержень в $Z = X \times Y$ и, вообще, все стержни в Z мягкие.

Пример I. Пусть У - бесконечный бикомпакт, Y^ω декартово произведение ω экземпляров У в ящичной топологии (т.е. открытая база в Y^ω есть совокупность всех множеств вида $G_1 \times \ldots \times G_n \times \ldots$). Зафиксируем неизолированную точку $y_0 \in Y$ и пусть $X = \{x = \{x(n)\ (n \in \omega)\} \in Y^\omega : card\{n \quad x(n) \neq y_0\} < \omega\}$

Можно показать, что У - узкое пространство с ДП $\{F_n\}$ бикомпактных множеств, где $F_n = \{x \in X : x(k) = y_0$ при $k > n\}$, $X = \bigcup F_n$ стержень в себе и в любой своей бикомпактификации. Если У - обычная окружность, то в качестве X получаем узкое однородное пространство. Если $Y = \{1/n\ (n \in \omega)\} \cup \{0\}$ в обычной топологии и $y_0 = 0$, то в качестве X получаем счетное узкое нормальное пространство П.Симона.

В заключение приведем абстрактные топологические характеризации твердого стержня в бикомпакте. Напомним, что замкнутое множество Φ называется P'-множеством, если $\Phi \subset cl\, int\, A$ для любого G_δ-множества $A \supset \Phi$.

Лемма 9. Пусть Φ замкнуто в X, H плотно в X и $\Phi \subset H$. Если Φ - P'-множество в X, то Φ - P'-подмножество в H. Обратно, если X нормально и Φ - P'-подмножество в H, то Φ - P'-множество в X.

Теорема 10. Для топологического пространства H равносильны следующие утверждения: I) H - σ-бикомпактное пространство I категории в себе и объединение всех биком-

пактных P'-множеств плотно в H ; 2) H гомеоморфно твердому стержню в некотором бикомпакте X ; 3) H является твердым стержнем в любой своей бикомпактификации.

Доказательство. 3) $\Longrightarrow$ 2). Тривиально.

2) $\Longrightarrow$ I). Пусть H - стержень в бикомпакте X. Тогда $H = \cup F_n$, где F_n - в.н.н.п. в X. Значит H - σ-бикомпактен и имеет I категорию в себе. По теореме I2 из [I] $\cup P'(F_n)$ плотно в H (здесь $P'(F_n)$ - наибольшее P'-множество, содержащееся в F_n). Но в силу леммы 9, $P'(F_n)$ - P'-подмножество в H .

I) $\Longrightarrow$ 3). Пусть H погружено в качестве плотного подмножества в бикомпакт X. В силу I) H есть F_σ-множество I категории в X. Всякое бикомпактное P'-подмножество $F \subset H$ (все они н.н.п.) является P'-множеством в X в силу леммы 9. Таким образом, по I) совокупность всех P'-множеств из X, содержащихся в H, плотна в H . В силу другой части теоремы I2 из [I], H - твердый стержень.

Чтобы построить пространство H такое, как в теореме I0, достаточно в примере I взять в качестве φ любую недискретную P'-точку (т.е. одноточечное P'-множество).

Приведем без доказательства еще один результат.

Теорема II. Пусть X - бикомпакт с ДП $F_n \uparrow M$. Для того, чтобы стержень M был твердым, необходимо и достаточно, чтобы $\{F_n \times Q\}$ была ДП в пространстве $X \times Q$.

Литература

I. Векслер А.И. Доминирующие последовательности и узкие топологические пространства. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981, с.159-174.

2. Векслер А.И. Доминирующие последовательности и узкие пространства. - УМН, 1982, т. 37, № I, с. I43-I44.

3. Мальцев В.И. Об узких пространствах. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983, с. 70-76.

4. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. - М., 1977.
5. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. - М., 1974.
6. Диканова З.Т. Об условиях ограниченности множеств в расширенном К-пространстве. - Сиб. мат. журнал, 1968, т. 9, № 4, с. 804-815.
7. Векслер А.И., Колдунов А.В. Решение одной топологической задачи. - В кн.: IУ Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. Кишинев, 1979, с.22-23.
8. Engelking R. General Topology. Warszawa, 1977.

Поступила 18 января 198' года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.83

О ПРОСТРАНСТВАХ КОМПАКТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ НУЛЬ-МЕРНЫХ ПОЛЬСКИХ ПРОСТРАНСТВ

А.Н.Выборнов
МГУ им.М.В.Ломоносова

Напомним, что польским называется метризуемое полной метрикой сепарабельное топологическое пространство. Класс всех непустых нульмерных польских пространств мы будем обозначать через $\mathfrak{N}$.

Обозначения. I) Пусть X - топологическое пространство, $A \subset X$, тогда $[A]$ - замыкание множества A в пространстве X 2) $IS(X)$ - множество изолированных точек топологического пространства X , $LC(X)$ - множество точек локальной бикомпактности пространства X , $NLC(X)=X\setminus LC(X)$. 3) N - натуральный ряд (счетное дискретное пространство), C - канторов дисконтинуум, P - пространство иррациональных точек вещественной прямой R , $S=C\times N$ Известно, что N , C , P , $S\in\mathfrak{N}$ и что C и P можно полностью определить некоторыми наборами их топологических свойств, а именно:

Предложение I. I) Если $X\in\mathfrak{N}$, X - бикомпакт и $IS(X)=\emptyset$, то $X\approx C$. 2) Если $X\in\mathfrak{N}$ и $LC(X)=\emptyset$, то $X\approx P$. Нетрудно показать также 3) Если $X\in\mathfrak{N}$, $LC(X)=X$, $IS(X)=\emptyset$ и X - небикомпакт, то $X\approx S$.

Экспонентой топологического пространства X мы будем называть пространство $\exp X$ непустых бикомпактных его подмножеств, наделенное топологией Вьеториса. Пусть $A_1,\dots,A_k$ - подмножества X , тогда $\langle A_1,\dots,A_k\rangle=\{\mathcal{F}\subset X: \mathcal{F}$ - бикомпакт и $\mathcal{F}\subset\bigcup\{A_i: i=1,\dots,k\};\ \mathcal{F}\cap A_j\neq\emptyset,\ j=1,\dots,k\}$. Топология Вьеториса - это топология на множестве подбикомпактов X , базой открытых множеств которой служат всевозможные множества вида $\langle\mathcal{U}_1,\dots,\mathcal{U}_k\rangle$, где все $\mathcal{U}_i$ открыты в X (см. [I] стр.168).

Ниже мы будем часто использовать следующее предложение (см. [I] стр.I69).

Предложение 2. Пусть $A_1, \ldots, A_k$ - подмножества топологического пространства X, тогда $[\langle A_1, \ldots, A_k \rangle]_{\exp X} = \langle [A_1], [A_2], \ldots, [A_k] \rangle$.

Если пространство X метризуемо, то на $\exp X$ может быть определена метрика, индуцирующая топологию Вьеториса. Имеется в виду метрика Хаусдорфа: $d_H(F_1, F_2) = \max(\sup_{x_1 \in F_1} \rho(x_1, F_2), \sup_{x_2 \in F_2} \rho(x_2, F_1))$, где ρ - метрика на X. Если на множестве непустых бикомпактных подмножеств ввести более слабую топологию с базой вида: $\{\langle \mathcal{U} \rangle$ $\mathcal{U}$ - открыто в $X\}$, то два T_1-пространства будут гомеоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны их экспоненты с такой топологией (см. [2]). Однако, как впервые показал Пелчинский [3], отвечая на вопрос В.И.Пономарева [2], это неверно для топологии Вьеториса. Таким образом, различные пространства могут иметь одну и ту же экспоненту. Это дает основание предположить возможность полного перечисления экспонент некоторых классов топологических пространств.

Пусть $\mathcal{L}$ - некоторый класс топологических пространств, положим: $\exp \mathcal{L} = \{\exp X : X \in \mathcal{L}\}$. В настоящей работе рассматриваются экспоненты некоторых естественно определяемых подклассов класса $\mathcal{K}$. Каждый из классов будет мощным (мощности континуума или $\aleph_1$), тогда как мощность его экспоненты будет "маленькой" ($\leq \aleph_0$).

I. Обозначим через $\mathcal{K}_1$ - класс не более чем счетных компактов из $\mathcal{K}$, и пусть $\mathcal{K}_1^* = \{X \in \mathcal{K}_1 : X$ - бесконечно$\}$

Теорема I. (Пелчинский [3]). $|\exp \mathcal{K}_1| = \aleph_0$, $|\exp \mathcal{K}_1^*| = 1$.

2. Пусть $\mathcal{K}_2$ - класс всех компактов из $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_2^* = \{X \in \mathcal{K}_2 : IS(X) = \emptyset$ или $|IS(X)| = \aleph_0\}$.

Теорема 2 (Марьянович [4]). $|\exp \mathcal{K}_2| = \aleph_0$, $|\exp \mathcal{K}_2^*| = 1$.

3. Пусть $\mathcal{K}_3$ - класс всех локально-компактных $X \in \mathcal{K}$, $\mathcal{K}_3^* = \{X \in \mathcal{K}_3 : IS(X) = \emptyset$ или $|IS(X)| = \aleph_0\}$.

Теорема 3 (Выборнов [5]). $|\exp \mathcal{K}_3| = \aleph_0$, $|\exp \mathcal{K}_3^*| = 21$.

4. Пусть $\mathcal{K}_4$ - класс всех таких $X \in \mathcal{K}$, что $[IS(X)] = X$,

$\mathfrak{X}_4^* = \{ X \in \mathfrak{X}_4 : X$ - бесконечно $\}$

Теорема 4 (Выборнов [6]). $|\exp \mathfrak{X}_4| = \aleph_0$, $|\exp \mathfrak{X}_4^*| = 7$

5. Пусть $\mathfrak{X}_5$ - класс всех разреженных $X \in \mathfrak{X}$.

Теорема 5 (Выборнов [6]). $\exp \mathfrak{X}_5 = \exp \mathfrak{X}_4$.

6. Пусть $\mathfrak{X}_6$ - класс всех совершенных $(IS(X) = \phi)$ $X \in \mathfrak{X}$, таких, что $[LC(X)] = X$.

Теорема 6. $|\exp \mathfrak{X}_6| = 3$

7. Пусть $\mathfrak{X}_7$ - класс всех совершенных приводимых ([7] стр.233) $X \in \mathfrak{X}$.

Теорема 7. $\exp \mathfrak{X}_7 = \exp \mathfrak{X}_6$

8. Пусть $\mathfrak{X}_8$ - класс всех совершенных $X \in \mathfrak{X}$, для которых $[LC(X)]$ - локально-компактное пространство.

Теорема 8. $|\exp \mathfrak{X}_8| = 7$

9. Пусть $\mathfrak{X}_9$ - класс всех совершенных $X \in \mathfrak{X}$, для которых $LC([LC(X)]) = LC(X)$.

Теорема 9. $|\exp \mathfrak{X}_9| = 11$

10. Пусть $\mathfrak{X}_{10}$ - класс всех таких $X \in \mathfrak{X}$, что $IS(X) = LC(X)$ и $[IS(X)]$ - локально компактно, $\mathfrak{X}_{10}^* = \{X \in \mathfrak{X}_{10} : IS(X) = \phi$ или $|IS(X)| \geq \aleph_0\}$

Теорема 10. $|\exp \mathfrak{X}_{10}| = \aleph_0$, $|\exp \mathfrak{X}_{10}^*| = 5$.

11. Пусть $\mathfrak{X}_{11}$ - класс всех таких $X \in \mathfrak{X}$, что $IS(X) = LC(X)$ и $LC([LC(X)]) = LC(X)$, $\mathfrak{X}_{11}^* = \{X \in \mathfrak{X}_{11} : IS(X) = \phi$ или $|IS(X)| \geq \aleph_0\}$

Теорема 11. $|\exp \mathfrak{X}_{11}| = \aleph_0$, $|\exp \mathfrak{X}_{11}^*| = 9$.

На самом деле можно сформулировать соответствующие теоремы i' ($i = 1,2,\ldots,11$), в которых классы $\exp \mathfrak{X}_i$ полностью описываются, т.е. указываются все возможные экспоненты, а также необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять пространство X , чтобы $\exp X$ было гомеоморфно одному из перечисленных пространств. Это мы и сделаем для теорем 6-11, являющихся новыми. А для теорем 1-5 соответствующие описания см. в работах [3] [4] , [5] , [6]

Предложение 3. (1) X - бикомпакт $\Longleftrightarrow$ $\exp X$ - бикомпакт. (2) X - нульмерно $\Longleftrightarrow$ $\exp X$ - нульмерно. (3) X -сепарабельно $\Longleftrightarrow$ $\exp X$ - сепарабельно. (4) X - метризуемо $\Longleftrightarrow$ $\exp X$ - метризуемо. (5) X - полно

по Чеху $\Longleftrightarrow$ $\exp X$ - полно по Чеху [8] .

Пункты I,2,3 легко доказываются на основании определения топологии в $\exp X$. Для доказательства 4 используется метрика Хаусдорфа. Чтобы доказать 5, достаточно разложить X в спектр из локально-бикомпактных пространств с натуральным рядом в качестве направленного множества и использовать перестановочность функтора $\exp$ с операцией взятия предела обратного спектра (см. для бикомпактов [9]), а также следствие 2 (см. ниже).

<u>Следствие I.</u> $X \in \mathfrak{X} \Longleftrightarrow \exp X \in \mathfrak{Y}$

<u>Лемма I.</u> Пусть X - T_1 -пространство, тогда $IS(\exp X) = \langle IS(X) \rangle$.

<u>Лемма 2.</u> Пусть X - T_2-пространство, тогда $LC(\exp X) = \langle LC(X) \rangle$.

Лемму I доказать легко. Лемма 2. Пусть $\mathcal{F} = LC(\exp X)$, тогда существует окрестность $\mathcal{F}$ вида $\langle \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k \rangle$, с бикомпактным замыканием: $\langle [\mathcal{U}_1], \ldots, [\mathcal{U}_k] \rangle$ (Предложение I). Докажем, что $[\mathcal{U}_i]$ - бикомпакт для каждого $i = 1, \ldots, k$. Пусть $\{V_\alpha\}$ - любое открытое покрытие $[\mathcal{U}_i]$ Рассмотрим систему подмножеств $\exp X$ следующего вида: $[\langle X \setminus [\mathcal{U}_i], V_{j_1}, V_{j_2}, \ldots, V_{j_n} \rangle] \cup \{\langle V_{j_1}, \ldots, V_{j_n} \rangle\}$, $\{j_1, \ldots, j_n\}$ пробегает все конечные наборы индексов из $\Lambda = \{\alpha\}$ Нетрудно убедиться, что это покрытие X Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие множества $\langle [\mathcal{U}_1], \ldots, [\mathcal{U}_k] \rangle$ $[X \setminus [\mathcal{U}_i], V_1^l, \ldots, V_{k_l}^l]_{l=1}^{l=m} \cup \{V_1^l, \ldots, V_{k_l}^l\}_{l=1}^{l=p}$. Тогда $[V_i^l : l = 1, \ldots, p ; i = 1, \ldots, k_l]$ - конечное подпокрытие для множества $[\mathcal{U}_i]$. Отсюда следует, что $\mathcal{F} \subset \langle LC(X) \rangle$. Пусть теперь $G \in \langle LC(X) \rangle$, тогда для каждой точки $x \in G$ выберем окрестность O_x такую, что $[O_x]$ - бикомпакт. Из покрытия $\{O_x\}_{x \in G}$ множества G выберем конечное подпокрытие и обозначим объединение его элементов через O , тогда $G \in \langle O \rangle$ и $[\langle O \rangle]_{\exp X} = \langle [O]_X \rangle = \exp([O])$ - бикомпакт.

<u>Следствие 2.</u> X - локально бикомпактно $\Longleftrightarrow$ $\exp X$ - локально бикомпактно.

Используя предложения I и 3, леммы I и 2, получим:

<u>Следствие 3.</u> I) $\exp N \approx N$ 2) $\exp C \approx C$ 3) $\exp S \approx S$, 4) $\exp P \approx P$

Существенную роль в доказательстве теорем будет играть

нижеследующая "теорема о продолжении гомеоморфизмов", обобщающая предложение работы Пелчинского [3], леммы 2.7.I и 2.7.2 из работы автора [5], а также лемму I из работы [I0] Островского. Нульмерное пространство мы называем h-однородным, если любое непустое открыто-замкнутое его подмножество гомеоморфно всему пространству.

Лемма 3 ("Теорема о продолжении гомеоморфизмов"). Пусть $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$ - нульмерные сепарабельные метрические пространства, компактные или некомпактные одновременно, K_1 и K_2 - замкнутые нигде не плотные множества, соответственно, в $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$. Пусть $\mathcal{Y}_1 \setminus K_1 \approx \mathcal{Y}_2 \setminus K_2$, причем каждое из этих пространств имеет базу из попарно гомеоморфных h-однородных множеств. Пусть g - любой гомеоморфизм, отображающий K_1 на K_2 и удовлетворяющий следующему условию: g переводит множество $K_1 \cap LC(\mathcal{Y}_1)$ на множество $K_2 \cap LC(\mathcal{Y}_2)$. Тогда g может быть продолжен до гомеоморфизма, отображающего $\mathcal{Y}_1$ на $\mathcal{Y}_2$.

Доказательство. Искомый гомеоморфизм G $\mathcal{Y}_1 \xrightarrow{на} \mathcal{Y}_2$, продолжающий g $K_1 \longrightarrow K_2$ будем определять на специально выбираемых открыто-замкнутых частях пространств $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$, которые в конце концов заполнят все $\mathcal{Y}_1 \setminus K_1$ и, соответственно, $\mathcal{Y}_2 \setminus K_2$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим покрытие $\{\mathcal{U}_i\}$ пространства $\mathcal{Y}_1$ дизъюнктными открыто-замкнутыми множествами диаметра $< \varepsilon$. Пусть система $\{\mathcal{U}_j\}$ содержит все те $\mathcal{U}_i$, для которых $\mathcal{U}_i \cap K_1 \neq \emptyset$. Положим $V_j^1 = \mathcal{U}_j \cap K_1$, $V_j^2 = g(V_j^1)$ для всех j. Пусть открытые в $\mathcal{Y}_2$ множества O_j^2 выбраны таким образом, чтобы $O_j^2 \cap K_2 = V_j^2$ для всех j. В покрытие $\mathcal{Y}_2$ множествами $\{O_j^2\}$ и $\mathcal{Y}_2 \setminus K_2$ впишем покрытие дизъюнктными открыто-замкнутыми множествами диаметра $< \varepsilon$, которое обозначим через $\{W_k^2\}$. Пусть $\{W_k^2\}$ включает в себя все те множества из W_k^2, для которых $W_k^2 \cap K_2 \neq \emptyset$. Обозначим через M_2 объединение всех W_k^2, не вошедших в $\{W_k^2\}$. Открытое в $\mathcal{Y}_1$ множество O_ℓ^1 выберем для каждого ℓ таким образом, чтобы $K_1 \cap O_\ell^1 = g^{-1}(W_\ell^2 \cap K_2)$ и, кроме того, чтобы $O_\ell^1 \subset \mathcal{U}_j$ для некоторого j. В покрытие пространства $\mathcal{Y}_1$ множествами $\{O_\ell^1\}$ и $\mathcal{Y}_1 \setminus K_1$ впишем покрытие дизъюнктными открыто-замкнутыми множествами $\{R_m\}$. Положим $W_\ell^1 = \bigcup\{R_m : R_m \cap (O_\ell^1 \cap K_1) \neq \emptyset\}$

и пусть $M_1 = \bigcup \{ R_m : R_m \not\subset W_2^1$ для всех $\ell \}$. Нетрудно убедиться в том, что все множества M_1, W_ℓ^1 M_2, W_ℓ^2 открыто-замкнуты, соответственно, в $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$, кроме того, диаметр всех W_ℓ^1 и W_ℓ^2 меньше ε и $g(W_\ell^1 \cap K_1) = W_\ell^2 \cap K_2$. Можно добиться того, чтобы W_ℓ^1 и W_ℓ^2 были компактными одновременно. Для этого нужно, используя условия леммы, вычесть "лишнее" из некомпактного W_ℓ^i и добавить это к M_i (i = 1 или 2) для каждого ℓ.

Из условий леммы следует, что любое открыто-замкнутое подмножество множества $\mathcal{Y}_1 \setminus K_1$ можно представить в виде не более чем счетного объединения дизъюнктных открыто-замкнутых множеств, гомеоморфных некоторому h-однородному пространству T. То же верно для $\mathcal{Y}_2 \setminus K_2$. Поэтому $M_1 = \bigoplus_{i<\alpha} T_i$ и $M_2 = \bigoplus_{j<\beta} T_j$, где α, β - ординалы $\leq \omega_0$, и все T_i и T_j гомеоморфны T. Если $\bigoplus_{i<\alpha} T_i \approx \bigoplus_{j<\beta} T_j$, то определим ограничение G на M_1, как любой гомеоморфизм, переводящий M_1 на M_2. Если $\bigoplus_{i<\alpha} T_i \not\approx \bigoplus_{j<\beta} T_j$ (это, в частности, означает, что T - компакт), то несколько изменим множества M_1 и M_2. Пусть $\alpha < \beta < \omega_0$, тогда из любого W_ℓ^1 вычтем $(\beta - \alpha)$ штук открыто-замкнутых множеств гомеоморфных T, достаточно малого диаметра, чтобы не задеть K_1, и присоединим их к M_1. Если $\alpha < \omega_0 = \beta$, тогда, как можно доказать, $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ и $\mathcal{Y}_1 \setminus M_1$ не компактны. Отсюда следует, что в $(\mathcal{Y}_1 \setminus M_1) \setminus K_1$ можно выбрать последовательность без предельных точек. Раздуем каждую точку этой последовательности до открыто-замкнутого в $\mathcal{Y}_1$ множества, гомеоморфного T, так, чтобы оно не задело K_1 и чтобы объединение всех этих "раздутых точек" было открыто-замкнутым в $\mathcal{Y}_1$ множеством. Мы получим в $\mathcal{Y}_1 \setminus M_1$ открыто-замкнутое множество, гомеоморфное $T \times N$. Вычтем его из всех W_ℓ^1 и добавим к M_1. Аналогично поступаем, если $\beta < \alpha$. Теперь $M_1 \approx M_2$. Можно убедиться, что изменения M_i (i = 1,2) можно проводить так, чтобы не пострадало требование одновременной компактности множеств W_ℓ^1 и W_ℓ^2 для каждого ℓ. Определим $G|_{M_1}$ как любой гомеоморфизм $M_1 \xrightarrow{на} M_2$.

На следующем этапе возьмем $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, для каждой пары множеств W_ℓ^1 и W_ℓ^2 (она удовлетворяет условиям леммы для $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$, в качестве K_1 и K_2 выступают теперь $W_\ell^1 \cap K_1$ и

$W^2_{\ell} \cap K_2$) проделаем то же, что ранее делали для $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$. Мы определим здесь гомеоморфные открыто-замкнутые множества M_{1_ℓ} и M_{2_ℓ} для каждого ℓ, а также систему $\{W^1_{\ell\ell_1}\}$ и $\{W^2_{\ell\ell_1}\}$ дизъюнктных открыто-замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon_1$, таких, что $g(W^1_{\ell\ell_1} \cap K_1) = W^2_{\ell\ell_1} \cap K_2$ для всех $\ell\ell_1$. На каждом M_{1_ℓ} определим $G|_{M_{1_\ell}}$ как любой гомеоморфизм: $M_{1_\ell} \to M_{2_\ell}$, и т.д. На $n+1$ этапе (для $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2}$) получим пары гомеоморфных $M_{1\ell_1\ldots\ell_{n-1}}$ $M_{2\ell\ell_1\ldots\ell_{n-1}}$ и системы $\{W^1_{\ell\ell_1\ldots\ell_n}\}$ и $\{W^2_{\ell\ell_1\ldots\ell_n}\}$ таких, что $g(W^1_{\ell\ell_1\ldots\ell_n} \cap K_1 = W^2_{\ell\ell_1\ldots\ell_n} \cap K_2$. Определим G на $M_{1\ell\ldots\ell_{n-1}}$ как любой гомеоморфизм, отображающий его на $M_{2\ell\ldots\ell_{n-1}}$. Можно убедиться, что $\{M_{1\ell\ell_1\ldots\ell_n}\}_{n=1}^{\infty}$ покрывает $\mathcal{Y}_1 \setminus K_1$ и что полагая $G(x) = G|_{M_{1\ldots\ell_n}}(x)$, если $x \in M_{1\ldots\ell_n}$ и $G(x) = g(x)$, если $x \in K_1$, мы получим гомеоморфизм $G: \mathcal{Y}_1 \xrightarrow{на} \mathcal{Y}_2$, продолжающий g. Доказательство леммы 3 закончено.

<u>Определение.</u> Пусть X, $\mathcal{Y} \in K$, $\mathcal{Z}$ - замкнутое подмножество $\mathcal{Y}$. Определим пространство $\mathcal{A}_X(\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y})$ ("дождь из пространств X на подпространство $\mathcal{Z}$ в $\mathcal{Y}$") следующим образом. Пространства X и $\mathcal{Y}$ можно считать вложенными в любой отрезок. Построим $\mathcal{A}_X(\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y})$ как подпространство плоскости $\mathbb{R}^2$. Будем считать, что пространство $\mathcal{Y}$ вложено в ось абсцисс. Пусть $\{z_i\}$ - счетное всюду плотное подмножество $\mathcal{Z}$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ построим множество $M_i \subset \mathbb{R}^2$, $M_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, где $X_n \approx X$ для всех n, и X_n вложено в отрезок, параллельный оси абсцисс с центром в точке с координатами $(z_i, 1/i)$, причем диаметр каждого X_n меньше чем $\min(\frac{1}{i}, \frac{1}{3}\min_{1 \le k \le i} |z_k - z_i|)$. Тогда $\mathcal{A}_X(\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}) = \mathcal{Y} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. $\mathcal{A}_X(\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y})$ будем обозначать через $\mathcal{A}_X(\mathcal{Y})$. Нетрудно показать, что $\mathcal{A}_X(\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}) \in \mathcal{F}$.

<u>Доказательство теоремы 6.</u> Пусть $X \in \mathcal{F}_c$, $\mathcal{Y} = \exp X$. Тогда $LC(\mathcal{Y}) = \langle LC(X) \rangle$ (лемма 2) и $NLC(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y} \setminus LC(\mathcal{Y}) = \langle X \rangle \setminus \langle LC(X) \rangle = \langle X, NLC(X) \rangle$. Используя леммы 1 и 2, нетрудно доказать, что $\exp \mathcal{F}_c \subset \mathcal{F}_c$. Для всякого $X \in \mathcal{F}_c$ точка $x \in LC(X)$ имеет открыто-замкнутую окрестность, гомеоморфную C, поэтому это верно для $\mathcal{Y}$. Предположим теперь, что $NLC(X) \neq \emptyset$, тогда можно показать, что $NLC(\mathcal{Y}) \approx P$. Пространство $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{A}_c(P)$ удовлетворяют условиям леммы 3 (полагая $\mathcal{Y}$ вместо $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{A}_c(P)$ вместо

$\mathcal{Y}_2$, $NLC(\mathcal{Y})$ вместо K_1 $P \subset \mathfrak{A}_c(P)$ вместо K_2). Поэтому $\mathcal{Y} \approx \mathfrak{A}_c(P)$

Итак, доказана следующая теорема 6', а вместе с ней и теорема 6.

Теорема 6'. Пусть $X \in \mathfrak{X}_8$, тогда I) если $NLC(X) = \phi$ X - компакт, то $\exp X \approx X \approx C$, 2) если $NLC(X) = \phi$ и X - не компактно, то $\exp X \approx X \approx S$, 3) если $NLC(X) \neq \phi$, то $\exp X \approx \mathfrak{A}_c(P)$

Доказательство теоремы 7. Заметим, что $\mathfrak{X}_7 \subset \mathfrak{X}_8$,поэтому достаточно показать, что для каждого $\mathcal{Y} \in \exp \mathfrak{X}_8$ существует $X \in \mathfrak{X}_7$ такое, что $\exp X \approx \mathcal{Y}$ Теперь заметим, что C , S , $\mathfrak{A}_S(0)$, где 0 - одноточечное пространство, принадлежат $\mathfrak{X}_7$ и $\exp C \approx C$ $\exp S \approx S$ $\exp \mathfrak{A}_S(0) \approx \mathfrak{A}_S(P)$.

Доказательство теоремы 8. Пусть $X \in \mathfrak{X}_8$ и $\mathcal{Y} = \exp X$. Для любого топологического пространства $\mathcal{Z}$ обозначим $R(\mathcal{Z}) = [LC(\mathcal{Z})] \setminus LC(\mathcal{Z})$, $PP(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} \setminus [LC(\mathcal{Z})]$. Тогда $X = LC(X) \cup R(X) \cup PP(X)$ и $\mathcal{Y} = LC(\mathcal{Y}) \cup R(\mathcal{Y}) \cup PP(\mathcal{Y})$, причем $R(\mathcal{Y}) = \langle [LC(X)], R(X) \rangle$ Легко доказать, что для всякого $X \in \mathfrak{X}_8$ I) любая точка $\ell \in LC(X)$ имеет окрестность гомеоморфную C , 2) любая точка $p \in PP(X)$ имеет окрестность, гомеоморфную P , 3) $R(X)$ - локально-компактно, 4) $[PP(X)] \supset R(X) \subset [LC(X)]$ Пользуясь указанным выше равенством, можно доказать, что для $\mathcal{Y} \in \exp \mathfrak{X}_8$ $R(\mathcal{Y})$ совершенно. Отсюда следует, что $R(\mathcal{Y})$ либо φ , либо $\approx C$, либо $\approx S$; $LC(X)$ либо ϕ , либо $\approx C$, либо $\approx S$; $PP(\mathcal{Y})$ либо ϕ , либо $\approx P$. Теперь, используя лемму 3, получим доказательство теоремы 8' и теоремы 8.

Теорема 8'. Пусть $X \in \mathfrak{X}_8$, тогда I) если $LC(X) \approx C$ $PP(X) = \phi$, то $\exp X \approx C$, 2) если $LC(X) \approx S$ $PP(X) = \phi$, то $\exp X \approx S$, 3) если $LC(X) = \phi$, о $\exp X \approx P$, 4) если $LC(X) \approx C$, $R(X) = \phi$, $PP(X) \neq \phi$, то $\exp X \approx C \oplus P$, 5) если $LC(X) \approx S$, $R(X) = \phi$ $PP(X) \neq \phi$, то $\exp X \approx S \oplus P$, 6) если $R(X) \neq \phi$ и $[LC(X)]$ - компакт, то $\exp X \approx \mathfrak{A}_c(\mathcal{Z} \subset \mathfrak{A}_p(\mathcal{Z}))$, где $\mathcal{Z} \approx C$, 7) если $R(X) \neq \phi$ и $[LC(X)]$ - не компактно, то $\exp X \approx \mathfrak{A}_c(\mathcal{Z} \subset \mathfrak{A}_p(\mathcal{Z}))$, где $\mathcal{Z} \approx S$

Доказательство теоремы 9. Пусть $X \in \mathfrak{X}_9$ и $\mathcal{Y} = \exp X$.

Тогда, определив $R(\mathcal{Y})$ как в предыдущей теореме, можно доказать, что $LC(\mathcal{Y})$ или ϕ, или $\approx S$, или $\approx C$; $NLC(\mathcal{Y}) \approx P$ или ϕ; $R(\mathcal{Y}) \approx P$ или ϕ. Для любого топологического пространства $\mathcal{Z}$ обозначим через $B_0(\mathcal{Z}) = NLC(\mathcal{Z}) \setminus R(\mathcal{Z})$ (ранее $B_0(\mathcal{Z})$ обозначалось $PP(\mathcal{Z})$). Пусть далее $B_1(\mathcal{Z}) = NLC(\mathcal{Z}) \setminus [B_0(\mathcal{Z})]$, $B_2(\mathcal{Z}) = NLC(\mathcal{Z}) \setminus (B_0(\mathcal{Z}) \cup [B_1(\mathcal{Z})])$, ..., $B_n(\mathcal{Z}) = NLC(\mathcal{Z}) \setminus (B_0(\mathcal{Z}) \cup B_1(\mathcal{Z}) \cup \ldots \cup B_{n-2}(\mathcal{Z}) \cup [B_{n-1}(\mathcal{Z})])$ при $n = 3, 4, \ldots$. Для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$ нетрудно построить пространство $X \in \mathcal{S}_3$, для которого $B_k(X) \neq \phi$. В экспоненте ситуация улучшается:

<u>Предложение 4.</u> Пусть $\mathcal{Y} \approx \exp \mathcal{S}_3$, тогда 1) $B_3(\mathcal{Y}) = \phi$ 2) $\mathcal{Y} = LC(\mathcal{Y}) \cup B_0(\mathcal{Y}) \cup B_1(\mathcal{Y}) \cup B_2(\mathcal{Y}) \cup B_3(\mathcal{Y}) \cup B_4(\mathcal{Y}) \cup B_5(\mathcal{Y})$ 3) Каждое $B_i(\mathcal{Y})$ или ϕ, или $\approx P$.

<u>Определение.</u> Пусть X – замкнутое подпространство топологического пространства $\mathcal{Y}$. Положим $(\mathcal{Y})_0 = \mathcal{Y} \setminus X$, $(\mathcal{Y})_1 = \mathcal{Y} \setminus [(\mathcal{Y})_0]$, $(\mathcal{Y})_2 = \mathcal{Y} \setminus ((\mathcal{Y})_0 \cup [(\mathcal{Y})_1])$, $(\mathcal{Y})_n = \mathcal{Y} \setminus ((\mathcal{Y})_0 \cup (\mathcal{Y})_1 \cup \ldots \cup (\mathcal{Y})_{n-2} \cup [(\mathcal{Y})_{n-1}])$ $n = 3, 4, \ldots$. X назовем m-вложенным в $\mathcal{Y}$, если $(\mathcal{Y})_m \neq \phi$, а $(\mathcal{Y})_{m+1} = \phi$ (следовательно, $(\mathcal{Y})_i = \phi$, $i \geq m+1$).

Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ построим пространство $P_n \subset P$, такое, что 1) P_n – n-вложено в P, 2) положим $\mathcal{Y} = P$, $X = P_n$ и определим $(\mathcal{Y})_i$ как определено выше, тогда $(\mathcal{Y})_i \approx P$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1, n$. Нам нужно построить последовательность пар $(X_i \subset \mathcal{Y}_i)$ пространств и гомеоморфных P их вложений. Положим $X_1 = P = \mathcal{Y}_1$. Предположим, что уже построено $X_n \subset \mathcal{Y}_n$, тогда пусть $X_{n+1} = \mathcal{Y}_n$ и $\mathcal{Y}_{n+1} = \Phi_p(X_n \subset \mathcal{Y}_n)$. Вложение $X_{n+1} = \mathcal{Y}_n \subset \Phi_p(X_n \subset \mathcal{Y}_n) = \mathcal{Y}_{n+1}$ – естественное.

Теперь, многократно применяя лемму 3, можно доказать теоремы 9 и 9'.

<u>Теорема 9'.</u> Пусть $X \in \mathcal{S}_3$, тогда 1) если X гомеоморфно C, или S, или P, или $C \oplus P$, или $S \oplus P$, то $\exp X \approx X$, 2) если $B_0(X) = \phi$, а $B_1(X) \neq \phi$, то $\exp X \approx \Phi_c(P)$, 3) если $B_i(X) \neq \phi$, $i = 0, 1$, $B_j(X) = \phi$, $j \geq 2$, то $\exp X \approx \Phi_c(P) \oplus P$, 4) если $B_1(X) = \phi$, а $B_2(X) \neq \phi$, то $\exp X \approx \Phi_c(P_2 \subset P)$, 5) если $B_i(X) \neq \phi$, $i = 0, 1, 2$, а $B_3(X) = \phi$, то $\exp X \approx \Phi_c(P_1 \subset P)$

6) если $B_2(X)=\phi$, а $B_3(X)\neq\phi$, то $\exp X \approx \mathfrak{A}_c(P_3 \subset P)$,
7) в остальных случаях $\exp X \approx \mathfrak{A}_c(P_6 \subset P)$.

Аналогично теореме 8' доказывается теорема 10', и аналогично теореме 9' доказывается теорема 11'.

Теорема 10'. Пусть $X \in \mathfrak{X}_{10}$, тогда 1) если $NLC(X)=\phi$, то $\exp X = \langle IS(X)\rangle$, 2) если $LC(X)=\phi$, $NLC(X)\neq\phi$, то $\exp X \approx P$, 3) если $LC(X)\neq\phi$, $R(X)=\phi$ и $PP(X)\neq\phi$, то $\exp(X)=\langle IS(X)\rangle \oplus P$, 4) если $R(X)\neq\phi$ и $[LC(X)]$ - компакт, то $\exp X \approx \mathfrak{A}_0(\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{A}_p(\mathfrak{Z}))$, где $\mathfrak{Z} \approx C$, 5) если $R(X)\neq\phi$ и $[LC(X)]$ - некомпакт, то $\exp X \approx \mathfrak{A}_0(\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{A}_p(\mathfrak{Z}))$, где $\mathfrak{Z} \approx S$.

Теорема 11'. Пусть $X \in \mathfrak{X}_{11}$, тогда 1) если $X=IS(X)$ то $\exp X = \langle X\rangle$, 2) если $X \approx P$, то $\exp X \approx P$
3) если $X \approx IS(X) \oplus P$, то $\exp X \approx \langle IS(X)\rangle \oplus P$,
4) если $B_0(X)=\phi$, $B_1(X)\neq\phi$, то $\exp X \approx \mathfrak{A}_0(P)$,
5) если $B_i(X)\neq\phi$ $i=0,1$, $B_j(X)=\phi$, $j>2$, то $\exp X \approx \mathfrak{A}_0(P) \oplus P$, 6) если $B_1(X)=\phi$, а $B_2(X)\neq\phi$, то $\exp X \approx \mathfrak{A}_0(P_4 \subset P)$, 7) если $B_i(X)\neq\phi$, $i=0,1,2$, $B_3(X)\neq\phi$, то $\exp X \approx \mathfrak{A}_0(P_4 \subset P)$, 8) если $B_2(X)=\phi$, а $B_3(X)\neq\phi$, то $\exp X \approx \mathfrak{A}_0(P_3 \subset P)$
9) в остальных случаях $\exp X \approx \mathfrak{A}_0(P_6 \subset P)$.

Автор благодарит профессора В.И.Пономарева за постановку вопросов и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Куратовский К. Топология. - М., т.I, 1966; М., т.II, 1969.
2. Пономарев В.И. Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов. - Матем.сб., 1959, т.48, № 2, с.191-212.
3. Pelczynski A. A remark on spaces 2^X for zero-dimensional X, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math., 1965, v. 13, N 2, p. 85-89.
4. Marjanovic M.M. Exponentially complete spaces III, Acad. Serbe. Sci. Publ. Inst. Math., Nouv. ser., 1973, v. 14, p. 97-109.

5. Выборнов А.Н. Пространства компактных подмножеств локально-бикомпактных нуль-мерных сепарабельных метрических пространств. - В кн.: Отображения и функторы. М., 1984, с.17-23.
6. Выборнов А.Н. Пространства компактных подмножеств нуль-мерных польских пространств с всюду плотным множеством изолированных точек. - УМН, 1984, т.4, с.153-154.
7. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. - М., 1977.
8. Чобан М.М. Об экспоненциальной топологии. - ДАН СССР, 1969, т.186, с.272-274
9. Сирота С.О. О спектральном представлении пространства замкнутых подмножеств бикомпактов. - ДАН СССР, 1968, т. 181, с.1069-1072.
10. Островский А.В. Непрерывные образы произведения $C \times Q$ канторова совершенного множества C и рациональных чисел Q. - В кн.: Семинар по общей топологии. М., 1981, с.78-85.

Поступила 17 февраля 1984 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.83

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КОЛЛЕКТИВНО-НОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ, СВЯЗАННАЯ С РАСХОДЯЩИМИСЯ НАПРАВЛЕННОСТЯМИ

М.А.Гольдман, С.В.Павлова
ЛГУ им. П.Стучки

В работах [2], [3], [4] при помощи расходящихся направленностей были описаны функционально отделимые, тихоновские, компактные, нормальные компактные, вполне регулярные и нормальные пространства. В предлагаемой статье дается характеризация коллективно-нормальных пространств (определение см., например, [1], с.357) в тех же терминах. Формулировке и доказательству теоремы предпошлем некоторые определения.

Пусть S – топологическое пространство, $(S_i)_{i\in J}$ – семейство подмножеств S, $(S_\alpha)_{\alpha\in A}$ – направленность в S. В работе [4] были даны определения предельного и собственно-предельного множества для направленности (см. [4], с.13). Назовем семейство $(S_i)_{i\in J}$ предельным (собственно-предельным) для направленности $(S_\alpha)_{\alpha\in A}$, если предельным (собственно-предельным) для этой направленности является множество $\bigcup_{i\in J} S_i$. Сопоставим множеству J топологическое пространство $E(J)$, называемое его E. Ex $E(J)$ получается в результате склеивания топологического пространства $\coprod_{i\in J}[0,1]_i$ (топология на $[0,1]_i$ – обычная) по разбиению, все элементы которого, кроме элемента $\theta=\{(0,i): i\in J\}$, являются точками пространства $\coprod_{i\in J}[0,1]_i$ (по поводу терминов в последней фразе см., например, [5], с.11, 38, 40).

Пусть далее $(S_i)_{i\in J}$ – дискретное семейство множеств. Обозначим через $C(S; E(J))$ семейство всех непрерывных функций $x: S\longrightarrow E(J)$, таких, что $(\forall i\in J)(\forall s\in S)$ $[x(s)=(1,i)]$. Каждой функции $x: S\longrightarrow E(J)$ поставим в соответствие функцию $\tilde{x}: S\longrightarrow [0,1]$ следующим образом: $\tilde{x}(s)=pr_1\, x(s)$, $s\in S$. Будем говорить, что семейство

$(S_i)_{i\in J}$ строго подчинено $C(S;E(J))$, если какова бы ни была расходящаяся в S направленность $(S_\alpha)_{\alpha\in A}$, для которой семейство $(S_i)_{i\in J}$ является собственно предельным, существует функция $x\in C(S;E(J))$ такая, что направленность $(\tilde{x}(S_\alpha))_{\alpha\in A}$ расходится.

Теорема. Условие. $\mathfrak{T}_{cl_h}$ - класс коллективно-нормальных топологических пространств, $\mathfrak{T}_{(F_i)_{i\in J}}(C)$ - класс всевозможных топологических пространств S, в которых каждое дискретное семейство $(F_i)_{i\in J}$ замкнутых множеств строго подчинено $C(S;E(J))$.

Утверждение. $\mathfrak{T}_{cl_h}=\mathfrak{T}_{(F_i)_{i\in J}}(C)$.

Доказательство теоремы основано на следующем факте: для того чтобы топологическое пространство S было коллективно-нормальным необходимо и достаточно, чтобы для любого дискретного семейства $(F_i)_{i\in J}$ замкнутых в S множеств и для любой открытой окрестности $\mathcal{V}$ множества $\bigcup_{i\in J}F_i$ нашлась функция $x\in C(S;E(J))$, принимающая значение θ на множестве $S\setminus\mathcal{V}$ (достаточность очевидна, необходимость нетрудно доказать при помощи леммы Урысона).

Доказательство. Пусть $S\in\mathfrak{T}_{cl_h}$. Рассмотрим в S какое-либо дискретное семейство $(F_i)_{i\in J}$ замкнутых множеств и какую-либо расходящуюся направленность $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$, для которой это семейство является собственно предельным. Существует такая открытая окрестность $\mathcal{V}$ множества $\bigcup_{i\in J}F_i$, что множество $\{\alpha\in A: s_\alpha\in S\setminus\mathcal{V}\}$ конфинально с A (множество $\{\alpha\in A: s_\alpha\in\mathcal{U}\}$ конфинально с A для любой открытой окрестности $\mathcal{U}$ множества $\bigcup_{i\in J}F_i$). Согласно факту, сформулированному перед доказательством теоремы, найдется функция $x\in C(S,E(J))$, такая, что $\forall s\in S\setminus\mathcal{V}$ $x(s)=\theta$. Соответствующая ей функция $\tilde{x}$ преобразует направленность $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$ в расходящуюся (легко видеть, что 0 и 1 - предельные точки направленности $(\tilde{x}(s_\alpha))_{\alpha\in A}$). Это доказывает, что $S\in\mathfrak{T}_{(F_i)_{i\in J}}(C)$. Тем самым включение $\mathfrak{T}_{cl_h}\subset\mathfrak{T}_{(F_i)_{i\in J}}(C)$ установлено.

Предположим, что обратное включение не имеет места. Значит, существует такое топологическое пространство S, что $S\in\mathfrak{T}_{(F_i)_{i\in J}}(C)$ и $S\notin\mathfrak{T}_{cl_h}$. Убедимся, что та-

кая ситуация невозможна. Для этого докажем импликацию $S \notin \mathcal{T}_{cln} \Longrightarrow S \notin \mathcal{T}_{(F_i)_{i\in J}}(C)$. Пусть S пространство, не являющееся коллективно-нормальным. В силу необходимого и достаточного условия коллективной нормальности в S найдутся такое дискретное семейство $(F_i)_{i\in J}$ замкнутых множеств и такая открытая окрестность $\mathcal{V}$ множества $\bigcup_{i\in J} F_i$, что $\forall x \in C(S;E(\mathfrak{I}))$ $\exists s \in S\setminus\mathcal{V}$ $x(s) \neq \theta$. Введем в рассмотрение семейство $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ всех множеств вида $\{s\in S \mid 1-\mathfrak{E}(s)<\varepsilon\}$, где $x\in C(S;E(\mathfrak{I}))$ и $0<\varepsilon<1$. Заметим, что при любом $\alpha\in A$ $\mathcal{U}_\alpha \cap (S\setminus\mathcal{V}) \neq \emptyset$. Частично упорядочим A отношением $\alpha\le\alpha'$, означающим, что $\mathcal{U}_\alpha \supset \mathcal{U}_{\alpha'}$. Нетрудно убедиться, что A - направленное множество без максимального элемента. Обозначим через B направленное произведение $A\times A$. Множества $B_1=\{(\alpha,\alpha):\alpha\in A\}$ и $B_2=\{(\alpha_1,\alpha_2):\alpha_1,\alpha_2\in A \ \&\ \alpha_1\neq\alpha_2\}$ конфинальны с B ([2] , лемма 2). Зафиксировав некоторую точку $s_0\in\bigcup_{i\in J}F_i$ (будем для определенности считать, что $s_0\in F_j$ при некотором $j\in J$), построим в S направленность $(s_\beta)_{\beta\in B}$ следующим образом: если $\beta=(\alpha,\alpha)\in B_1$, то в качестве s_β возьмем некоторый элемент из $\mathcal{U}_\alpha\cap(S\setminus\mathcal{V})$; если $\beta\in B_2$, то положим $s_\beta=s_0$. Направленность $(s_\beta)_{\beta\in B}$ является расходящейся (ни одна из точек $\bigcup_{i\in J}F_i$ не может быть точкой сходимости этой направленности, так как $\bigcup_{i\in J}F_i\subset\mathcal{V}$ и $B_1=\{\beta\in B: s_\beta\in S\setminus\mathcal{V}\}$ не может направленность сходиться и ни к одной из точек множества $S\setminus\bigcup_{i\in J}F_i$, так как $S\setminus\bigcup_{i\in J}F_i\subset S\setminus F_j$ и $B_2=\{\beta\in B: s_\beta\in S\setminus(S\setminus F_j)\}$. Семейство $(F_i)_{i\in J}$ является предельным для направленности $(s_\beta)_{\beta\in B}$ (так как $B_2\subset\{\beta\in B: s_\beta\in\mathcal{U}\}$, если $\mathcal{U}$ - открытая окрестность множества $\bigcup_{i\in J}F_i$). Более того, оно является собственно-предельным для этой направленности (так как $\{\beta\in B: s_\beta\in S\setminus\mathcal{V}\}=B_1$). При этом какую бы мы ни рассмотрели функцию $x\in C(S;E(\mathfrak{I}))$, направленность $(\mathfrak{E}(s_\beta))_{\beta\in B}$ будет сходиться к 1 (доказательство проводится аналогично тому как это было проделано в теореме 2 работы [2]).

Литература

1. Архангельский А.В. Добавление. - В кн.: Келли Дж.Л. Общая топология. - М., 1981, с.356-409.
2. Гольдман М.А. Характеристика функционально отделимых и тихоновских пространств при помощи расходящихся сетей. - ДАН СССР, 1969, т.188, № 6, с.1217-1220.
3. Гольдман М.А. Об одном признаке компактности топологических пространств. - Латвийский математический ежегодник, №8, 1970, с. 39-41
4. Гольдман М.А. Характеризация некоторых классов топологических пространств, связанная с расходящимися сетями. - В кн.: Топологические пространства и отображения в них. - Рига, 1975, с.3-14.
5. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. - М.,1977.

Поступила 27 марта 1984 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 510.644,513.83

О НЕЧЕТКИХ ПРЕДИКАТАХ НА НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВАХ (НА ПРИМЕРЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА)

З.Б.Дискин
ЛГУ им.П.Стучки

I. Постановка задачи, мотивация, обозначения

I.I. Пусть имеется множество X с определенной на нем математической структурой (в смысле Бурбаки [I]), для которой представляет интерес рассмотрение предикатов на подмножествах множества X, т.е. отображений

$$\theta: \mathfrak{B}(X) \longrightarrow 2, \quad 2 = \{0,1\}, \tag{I.I}$$

где $\mathfrak{B}(X) = 2^X$ есть система всех подмножеств (булеан) X

Введем систему нечетких подмножеств X (нечеткий булеан)

$$\tilde{\mathfrak{B}}(X) = [0,1]^X, \quad [0,1] \subset R,$$

с операциями пересечения, объединения и дополнения:

$$\alpha, \beta \in \tilde{\mathfrak{B}}(X) \quad \alpha \wedge \beta = \min(\alpha, \beta); \quad \alpha \vee \beta = \max(\alpha, \beta); \quad \alpha^c = 1 - \alpha, \tag{I.2}$$
$$\bigwedge_{i \in I} \alpha_i = \inf_i \alpha_i; \quad \bigvee_{i \in I} \alpha_i = \sup_i \alpha_i.$$

Примем следующие обозначения. Точки из X будут обозначаться $x, y, \ldots$; элементы $\mathfrak{B}(X)$ - $A, B, \ldots$ и называться четкими множествами; элементы $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$ - $\alpha, \beta, \ldots$ и называться нечеткими множествами; предикаты на $\mathfrak{B}(X)$, как правило, - $\Theta, \Omega, \ldots$ Для нечетких множеств - как функций - аргумент будет записываться слева от символа функции без скобок - $x\alpha, x\beta, \ldots$

Представим интуитивно элементы $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$ как "размытые" множества, о которых мы не имеем полной информации. Тогда, если для любого четкого множества $A \subset X$, некоторый предикат Θ либо верен, либо неверен, то для нечеткого тот же предикат верен лишь в некоторой степени $\Theta(\alpha) \in [0,1]$ т.е. нечеткость множества индуцирует нечеткость предиката на нем. Таким образом, приходим к задаче расширения четких

предикатов (I.I) на $\mathfrak{B}(X)$ до нечетких предикатов на $\widetilde{\mathfrak{B}}(X)$

$$\Theta : \widetilde{\mathfrak{B}}(X) \to [0,1], \quad \Theta \restriction \mathfrak{B}(X) = \Theta . \qquad (\widetilde{I.I})$$

Рассмотрим пример. Естественно обратиться к топологическим пространствам как классическим структурам, изобилующими предикатами на $\mathfrak{B}(X)$

Пусть $(X, \mathfrak{T})$ - топологическое пространство. Предикат "точка $x \in X$ есть предельная для множества $A \subset X$" будем записывать в виде $\Pi(x, A)$, а оператор замыкания - как отображение $A \to A^{\pi} = A^{\pi} \cup A$, где $A^{\pi} = \{x \in X : \Pi(x, A) = 1\}$ Представляется естественным определить соответствующий нечеткий предикат на $X \times \widetilde{\mathfrak{B}}(X)$ следующим образом:

$$\widetilde{\Pi}(x, \alpha) \overset{\text{def}}{=} \inf_{G \in \mathfrak{T}x} \sup_{y \in G \setminus \{x\}} y_{\alpha}, \qquad (\widetilde{I.3})$$

где $\mathfrak{T}x$ - система открытых окрестностей точки x В $(\widetilde{I.3})$ $\sup\{y_{\alpha} : y \in G \setminus \{x\}\}$ есть степень непустоты "пересечения" α, понимаемого как "размытое" множество, с $G \setminus \{x\}$, а $\inf$ по $G \in \mathfrak{T}x$ "выбирает наихудшую" в этом смысле окрестность x

Теперь вводим оператор замыкания на $\widetilde{\mathfrak{B}}(X)$

$$\alpha \to \alpha^{\pi} = \alpha^{\pi} \vee \alpha, \text{ где } x\alpha^{\pi} \overset{\text{def}}{=} \widetilde{\Pi}(x, \alpha) . \qquad (\widetilde{I.4})$$

Далее, множество $A \subset X$ замкнуто ($A \in \mathfrak{T}^{\pi}$) тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки, т.е. для любой $x \in X$ либо $x \notin A^{\pi}$, либо $x \in A$ Соответствующий нечеткий предикат, т.е. степень замкнутости нечеткого множества, естественно тогда определить как

$$\widetilde{\mathfrak{T}}_{\pi}^{\pi}(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \inf_{x} (x\alpha^{\pi c} \vee x\alpha) ; \qquad (\widetilde{I.5})$$

здесь $(x\alpha^{\pi c} \vee x\alpha)$ есть степень того, что либо x не предельная точка для α, либо "$x \in \omega$".

Сразу же отметим, что можно ввести степень замкнутости чуть иначе:

$$\widetilde{\mathfrak{T}}_{\pi}^{*}(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \inf_{x} (x\alpha^{\pi c} \vee x\alpha) \qquad (\widetilde{I.6})$$

Для четких множеств $(\widetilde{I.5})$ и $(\widetilde{I.6})$ совпадают и равны, а для нечетких множеств это не так, как явствует из простейшего примера В качестве $(X, \mathfrak{T})$ возьмем R и рассмотрим нечеткое "одноточечное" множество α $\alpha \restriction R \setminus \{x_0\} = 0$, $x_0\alpha = a \in (0,1)$, для которого $\alpha^{\pi} = 0$, а α^{π} в x_0 отлично от нуля: $x_0\alpha^{\pi} = x_0\alpha = a$. Тогда степень замкнутости $(\widetilde{I.5})$ $\widetilde{\mathfrak{T}}_{\pi}^{\pi}(\alpha) = 1$, а $(\widetilde{I.6})$ дает $\widetilde{\mathfrak{T}}_{\pi}^{*}(\alpha) = a \vee (1-a)$

и для $\alpha\in(0,1)$ $\tilde{\sigma}^*_{\mathfrak{A}}(\alpha)\neq\tilde{\sigma}^*_{\mathfrak{B}}(\alpha)$

Какому определению - ($\widetilde{I.5}$) или ($\widetilde{I.6}$) - отдать предпочтение? При построении нечетких предикатов ($\widetilde{I.I}$) хотелось бы требовать, чтобы имеющиеся между четкими предикатами логические связи сохранялись бы - в определенном смысле - и в нечеткой ситуации. Так, если для некоторых предикатов на $\mathfrak{B}(X)$ Θ и Ω и для любого $A\subset X$ справедлива импликация $\Theta(A)\Longrightarrow\Omega(A)$, то в нечетком случае естественно желать выполнения неравенства $\tilde{\Theta}(\alpha)\leq\tilde{\Omega}(\alpha)$ для $\forall\alpha\in\tilde{\mathfrak{B}}(X)$ (Далее будет видно, что ($\widetilde{I.6}$) в этом смысле предпочтительнее).

I.2. Нетривиальность поставленной задачи обусловлена следующими обстоятельствами.

Математическую структуру с предикатами на $\mathfrak{B}(X)$ будем рассматривать как модель соответствующего языка третьего порядка. (Так, предикат предельной точки для множества в топологических пространствах есть интерпретация такой формулы языка:

$\Pi(x,A)\leftrightarrow\forall G(G\in\sigma\ \&\ x\in G\rightarrow\exists y(y\in G\ \&\ y\neq x\ \&\ y\in A))$ (*)).

Введем вместо булевой алгебры (б.а.) $2=\{0,1\}$ значений истинности этой модели алгебру $[0,1]$ с операциями ($\widetilde{I.2}$), получим нечеткую модель того же самого языка, в которой все предикаты нечеткие, в частности, само нечеткое множество есть результат интерпретации символа $\in$ как предиката на $X\times\mathfrak{B}(X)$ со значениями в $[0,1]$

Алгебра $[0,1]$ не является булевой - в ней справедливы все пары двойственных аксиом б.а., кроме пары аксиом дополнения: для $\alpha\in\tilde{\mathfrak{B}}\setminus\mathfrak{B}$ $\alpha\vee\alpha^c\neq1$, $\alpha\wedge\alpha^c\neq0$ Отсюда сразу же следует несправедливость для $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$ modus ponens

$\alpha\wedge(\alpha\rightarrow\beta)\leq\beta$ - общем случае ($\alpha\rightarrow\beta$ есть, как обычно, сокращение для $\alpha^c\vee\beta$). (Кроме того, вместо полной дистрибутивности на $\mathfrak{B}(X)$ в $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$ имеет место лишь $(\lambda,1)$ -дистрибутивность для любой мощности λ ([3]):

$|I|=\lambda,\ \beta\vee(\bigwedge_{i\in I}\alpha_i)=\bigwedge_{i\in I}(\beta\vee\alpha_i);\ \beta\wedge(\bigvee_{i\in I}\alpha_i)=\bigvee_{i\in I}(\beta\wedge\alpha_i)$).

Поэтому имеющийся в четкой ситуации вывод из посылки $\Theta(A)$ заключения $\Omega(A)$ вовсе не обязан обеспечивать

в $[0,1]$ - модельной интерпретации справедливость неравенства $\tilde{\Theta}(\tilde{A}) < \tilde{\Omega}(\tilde{A})$

Тем не менее, как будет видно из нижеследующих результатов, поставленная в п.I задача может решаться следующим образом.

Рассматривается модель с двумя множествами значений истинности - обычной б.а. 2 для всех исходных, непосредственно заданных в языке предикатов, кроме предиката принадлежности $x \in A$, часть (I) вхождений которого в формулы языка интерпретируется нечетко, т.е. как отображение в $[0,1]$ (подразумевается, что $2 \subset [0,1]$). Тогда и все производные предикаты, содержащие нечеткие вхождения $\in$, также становятся нечеткими. (Так, в рассмотренном выше примере, предикат (I.3) $\tilde{\Pi}(x,A)$ получен такой интерпретацией формулы (*), в которой лишь вхождение $\in$ в подформулу "$y \in A$" трактуется "нечетко", все прочие вхождения $\in$ интерпретируются, по-прежнему, как отображения в 2). Как следует из приведенных ниже результатов, в таких "четко-нечетких" моделях достаточно широкий ряд интересных логических связей между предикатами в четкой ситуации допускает обобщение на нечеткий случай.

I.3. Как уже отмечалось, классическим примером математической структуры, рассматривающей предикаты на $\mathcal{B}(X)$, является топологическое пространство. Поставленная в п.I задача будет решаться ниже для топологического пространства. Будут построены нечеткие расширения предикатов предельной и внутренней точек множества его замкнутости и открытости, бикомпактности в их различных формулировках и указаны логические связи, сохраняющиеся при таком расширении.

Рассмотрение всюду не теоретико-модельное, а в духе "обычной" математики, т.е. работаем непосредственно с моделью без привлечения синтаксических понятий (логические формулы используются лишь для наглядности, чисто символически).

Доказательства теорем - технически громоздкие - опущены.

В заключение будет указан ряд возможностей непосредственного аксиоматического задания нечеткой топологии (п.3)

2. Индуцированная нечеткая топология

Приступим к решению поставленной в п.I.I задачи применительно к структуре топологического пространства $(X,\mathfrak{T})$

2.I. Нечеткие предикаты предельной и внутренней точек множества

2.I.I. Запишем указанные предикаты, обозначив их Π и O соответственно, в обычной логической символике в виде

$$\left.\begin{array}{ll} \Pi(x,A) \leftrightarrow \forall G\in\mathfrak{T}_x & \exists y(y\in G\setminus\{x\}\ \&\ y\in A), \\ O(x,A) \Leftrightarrow \exists G\in\mathfrak{T}_x & \forall y(y\in G\setminus\{x\}\to y\in A), \end{array}\right\}, \quad (2.I)$$

где $\mathfrak{T}_x=\{G\in\mathfrak{T} \quad x\in G\}$

(Здесь подразумевается, что точка может быть внутренней для множества и не принадлежа ему).

Обозначив $A^{\pi}=\{x: \Pi(x,A)\}$, $A^{o}=\{x: O(x,A)\}$

введем операторы замыкания и взятия внутренности в виде

$$Z\ A\to A^{z}\overset{\text{def}}{=}A\cup A^{\pi};\ V: A\to A^{v}\overset{\text{def}}{=}A\cap A^{c}. \quad (2.2)$$

Построим соответствующие нечеткие предикаты, полагая по определению

$$\tilde{\Pi}(x,\mu)\overset{\text{def}}{=}\inf_{G\in\mathfrak{T}_x}\sup_{y\in G\setminus\{x\}}\mu_y;\quad \tilde{O}(x,\mu)\overset{\text{def}}{=}\sup_{G\in\mathfrak{T}_x}\inf_{y\in G\setminus\{x\}}\mu_y \quad (2.I)$$

Интуитивная мотивировка для $\tilde{\Pi}$ уже приводилась выше, для $\tilde{O}$ она аналогична.

Снова обозначая $\mu^{\pi}: x\to\tilde{\Pi}(x,\mu)$, $\mu^{o}: x\longmapsto\tilde{O}(x,\mu)$, вводим операторы замыкания и взятия внутренности на $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$

$$\tilde{Z}:\mu\to\mu^{z}\overset{\text{def}}{=}\mu\vee\mu^{\pi};\quad \tilde{V}:\mu\longmapsto\mu^{v}\overset{\text{def}}{=}\mu\wedge\mu^{o} \quad (\widetilde{2.2})$$

Поскольку в $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$ справедлив принцип двойственности, то

$$\mu^{\pi}=\mu^{co};\ \mu^{zc}=\mu^{cv},\ \mu^{oc}=\mu^{c\pi},\ \mu^{vc}=\mu^{cz}, \quad (\widetilde{2.3})$$

и в дальнейшем достаточно работать, например, с $\tilde{\Pi}$ и $\tilde{Z}$

Отметим, что направляя систему окрестностей $\mathfrak{T}_x$ включением, можно μ^{z} и μ^{v} представить в виде:

$$x\mu^{z}=\inf_{G\in\mathfrak{T}_x}\sup_{y\in G}\mu_y=\lim_{G\in\mathfrak{T}_x}\sup_{y\in G}\mu_y;\ x\mu^{v}=\sup_{G\in\mathfrak{T}_x}\inf_{y\in G}\mu_y=\lim_{G\in\mathfrak{T}_x}\inf_{y\in G}\mu_y, \quad (\widetilde{2.4})$$

откуда видно, что $\tilde{Z}$ и $\tilde{V}$ есть известные операторы перехода к верхнему и нижнему пределам R -значной функции, заданной на топологическом пространстве [2].

Отсюда справедлива теорема:

$$\text{для } \forall \alpha \in \tilde{\mathfrak{B}}(X) \quad \left.\begin{array}{l} \text{(i) если } \alpha = \text{const}, \text{ то } \alpha^{\tilde{z}} = \alpha \\ \text{(ii), (iii) } \alpha^{\tilde{z}\tilde{z}} = \alpha^{\tilde{z}}, \ \alpha < \alpha^{\tilde{z}} \\ \text{(iv) } (\alpha \vee \beta)^{\tilde{z}} = \alpha^{\tilde{z}} \vee \beta^{\tilde{z}} \end{array}\right\}, \qquad (\widetilde{2.5})$$

утверждения которой можно рассматривать как нечеткие аналоги аксиом Куратовского для обычного топологического оператора замыкания.

2.I.2. В четкой ситуации замыкание множества можно равносильно определить таким образом:

$$A^{\tilde{z}} = \bigcap \mathfrak{T}^*_A, \quad \mathfrak{T}^*_A = \{F \in \mathfrak{T}^* : A \subset F\} \qquad (2.6)$$

(Здесь и далее $\mathfrak{T}^* = \{F \subset X : F^c \in \mathfrak{T}\}$ - замкнутая топология).

Что мы имеем в нечетком случае?

Ключевым моментом здесь является введение на $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$, наряду с отношением $\subset$, бинарного отношения нечеткого включения $\tilde{\subset}$: $\tilde{\mathfrak{B}}(X) \times \tilde{\mathfrak{B}}(X) \to [0,1]$

$$(\alpha \tilde{\subset} \beta) \overset{\text{def}}{=} \inf_x x(\alpha \to \beta), \qquad (\widetilde{2.7})$$

расширяющего на $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$ отношение включения четких множеств

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \ (x \in A \to x \in B) \qquad (2.7)$$

(Напомним, что $\alpha \to \beta \overset{\text{def}}{=} \alpha^c \vee \beta$).

Точно также введем на $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$ наряду с обычным равенством функций бинарное отношение нечеткого равенства

$$\tilde{=} : \tilde{\mathfrak{B}} \times \tilde{\mathfrak{B}} \to [0,1]$$

$$\alpha \tilde{=} \beta \overset{\text{def}}{=} (\alpha \tilde{\subset} \beta) \wedge (\beta \tilde{\subset} \alpha), \qquad (\widetilde{2.8})$$

расширяющее на $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$ отношение равенства четких множеств

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \& (B \subset A). \qquad (2.8)$$

$(\widetilde{2.7})$, $(\widetilde{2.8})$ трактуются как степень того, что " $\alpha \subset \beta$ " и степень того, что " $\alpha = \beta$ ", при понимании α и β как "множеств", а не как функций.

Отметим, что если $\alpha \in \tilde{\mathfrak{B}} \setminus \mathfrak{B}$, то $(\alpha \tilde{\subset} \alpha) < 1$, $(\alpha \tilde{=} \alpha) < 1$

И, наконец, расширим определение $(\widetilde{I.2})$ пересечения и объединения семейства нечетких множеств (α_i), $i \in I$ на случай нечеткого семейства $I : \tilde{\mathfrak{B}}(X) \to [0,1]$

$$\mathrm{t}(\wedge\bar{I}) \overset{\text{def}}{=} \inf_{\alpha\in\mathfrak{Z}} (\alpha\bar{I} \to \mathrm{t}\alpha); \quad \mathrm{t}(\vee\bar{I}) \overset{\text{def}}{=} \sup_{\alpha\in\mathfrak{Z}} (\alpha\bar{I} \wedge \mathrm{t}\alpha). \qquad (\widetilde{2.9})$$

Вернемся к (2.6). Для фиксированного α введем нечеткую систему четких замкнутых множеств $\widetilde{\mathfrak{T}}^*_\alpha$, которая есть отображение $\mathfrak{T}^*$ в $[0,1]$ $F \to (\alpha \overset{\sim}{\subset} \chi_F)$, ($F \in \mathfrak{T}^*$ χ_F его характеристическая функция) и рассмотрим ее пересечение ($\widetilde{2.9}$):

$$\mathrm{t}(\wedge\widetilde{\mathfrak{T}}^*_\alpha) = \inf_{F\in\mathfrak{T}^*} (F\widetilde{\mathfrak{T}}^*_\alpha \to \mathrm{t}\chi_F) = \inf_{F\in\mathfrak{T}^*} \{1-(\alpha \overset{\sim}{\subset} \chi_F)\} = \inf_{\alpha\in\mathfrak{Z}} \sup_{y\in\alpha} \psi\alpha$$

Сопоставляя с ($\widetilde{2.3}$), убеждаемся, что имеет место

<u>Теорема.</u> $\alpha^* = \wedge\widetilde{\mathfrak{T}}^*_\alpha$; где $\widetilde{\mathfrak{T}}^*_\alpha : \mathfrak{S}' \to [0,1], F\widetilde{\mathfrak{T}}^*_\alpha = (\alpha \overset{\sim}{\subset} F)$ ($\widetilde{2.6}$)

2.1.3. В четкой топологии понятие предельной точки можно определить в терминах направленностей, что в логической символике запишется в виде

$$\Pi_3(x,A) \leftrightarrow \exists S(\forall n \in D(S_n \in A\setminus\{x\}) \& x = \lim_{n\in D} S_n), \qquad (2.10)$$

где D есть направленное множество, $S : D \to X$

Тогда соответствующий нечеткий предикат естественно определить как

$$\widetilde{\Pi}_3(x,\alpha) \overset{\text{def}}{=} \sup_{S} \inf_{\substack{n\in D \\ \lim S_n = x}} S_n(\alpha\setminus\{x\}) \qquad (\widetilde{2.10})$$

где $\quad S_n(\alpha\setminus\{x\}) = \begin{cases} y\alpha, \text{ если } y \neq x \\ 0, \text{ если } y = x \end{cases}$.

В ($\widetilde{2.10}$) $\inf\{S_n(\alpha\setminus\{x\}) : n \in D\}$ есть степень того, что направленность S "лежит в $(\alpha\setminus\{x\}$ ", а $\sup$ "выбирает" среди всех направленностей, сходящихся к x "наиболее лежащую в $(\alpha\setminus\{x\})$ ".

В четкой топологии предикаты (2.1) и (2.10) равносильны, это же имеет место и для их нечетких аналогов.

<u>Теорема.</u> $\widetilde{\Pi}(x,\alpha) = \widetilde{\Pi}_3(x,\alpha)$ для любых x и α ($\widetilde{2.11}$)

Доказательство этой и других подобных теорем заключается в построении цепочек неравенств (аналогов цепочек вывода в логике) в ту и другую сторону. Вследствие несправедливости в $\mathfrak{B}(X)$ пары аксиом дополнения и modus ponens, такое построение четрив:льно.

2.2. Нечеткие предикаты замкнутости и открытости нечеткого множества

2.2.1. Будем исходить из формулировки четкого преди-

ката замкнутости (открытости) множества в терминах точек прикосновения (внутренних точек):

$$A \in \mathcal{T}^* \Leftrightarrow \forall x (x \in A^2 \to x \in A); \quad A \in \mathcal{T}_* \Leftrightarrow \forall x (x \in A \to x \in A^*). \qquad (2.12)$$

Определим соответствующие нечеткие предикаты

$$\widetilde{\mathcal{T}}^*(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \inf_x x(\alpha^2 \to \alpha); \quad \widetilde{\mathcal{T}}(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \inf_x x(\alpha \to \alpha^*). \qquad (\widetilde{2.12})$$

Из $(\widetilde{2.3})$ легко видеть, что эти определения двойственны:

<u>Теорема.</u> $\widetilde{\mathcal{T}}^*(\alpha) = \widetilde{\mathcal{T}}(\alpha^c)$ $\qquad (\widetilde{2.13})$

Поэтому далее достаточно работать с нечеткой замкнутостью.

В четкой топологии $A \in \mathcal{T}^* \Leftrightarrow A = A^2$ – это почти то же самое, что (2.12). В нечетком случае – с введением определения $(\widetilde{2.8})$ – справедлива аналогичная

<u>Теорема.</u> $\widetilde{\mathcal{T}}^*(\alpha) = (\alpha \simeq \alpha^2)$ $\qquad (\widetilde{2.14})$

Поэтому если $\alpha \in \widetilde{\mathfrak{B}} \setminus \mathfrak{B}$, то несмотря на $\alpha = \alpha^2$, $\widetilde{\mathcal{T}}^*(\alpha) < 1$

Отметим ещё, что справедливо неравенство

$$\widetilde{\mathcal{T}}^*(\alpha) \leq \widetilde{\mathcal{T}}^*(\alpha^2), \qquad (\widetilde{2.15})$$

однако даже и для $\alpha \neq \alpha^2$ здесь возможно равенство (соответствующий пример легко строится уже в $(X, \mathcal{T}) = \mathbb{R}$). Для введенной в (1.5) степени замкнутости $\widetilde{\mathcal{T}}^*_\tau$ в пространствах, не удовлетворяющих первой аксиоме отделимости, $(\widetilde{2.15})$ не справедливо в общем случае.

2.2.2. В четкой ситуации имеем импликации:

$$\Sigma \subset \mathcal{T}^* \to \bigcap \Sigma \in \mathcal{T}^*; \quad A, B \in \mathcal{T}^* \to (A \cup B) \in \mathcal{T}^*. \qquad (2.16)$$

Для определенной в $(\widetilde{2.12})$ $\widetilde{\mathcal{T}}^*$ (и $\widetilde{\mathcal{T}}^*_\tau$) верна аналогичная

<u>Теорема.</u> Для любой четкой системы нечетких множеств

$$\left.\begin{array}{l} (i) \ \inf_{\alpha \in \Sigma} \widetilde{\mathcal{T}}^*(\alpha) \leq \widetilde{\mathcal{T}}^*(\wedge \Sigma), \\ \qquad\qquad \text{и для любых нечетких множеств } \alpha, \beta \\ (ii) \ \widetilde{\mathcal{T}}^*(\alpha) \wedge \widetilde{\mathcal{T}}^*(\beta) \leq \widetilde{\mathcal{T}}^*(\alpha \vee \beta). \end{array}\right\} \quad (2.16$$

(Левую часть (i) можно также записать как $(\Sigma \simeq \widetilde{\mathcal{T}}^*)$).

2.2.3. Отображение $f: X \to Y$ индуцирует отображения $\widetilde{f}: \mathfrak{B}(X) \to \mathfrak{B}(Y)$ и $\widetilde{f}^{-1}: \mathfrak{B}(Y) \to \mathfrak{B}(X)$ по правилам:

$$\alpha \in \mathfrak{B}(X), \beta \in \mathfrak{B}(Y) \quad x(\beta \widetilde{f}^{-1}) = (xf)\beta; \quad y(\alpha \widetilde{f}^{1}) = \sup_{x \in y f^{-1}} \alpha \qquad (2.17)$$

Очевидно, что ограничения $\widetilde{f}^{-1}$ и $\widetilde{f}^{1}$ на четких булеанах совпадают с обычными отображениями образа и прообраза множества.

Для определенных выше нечетких предикатов верна теорема, обобщающая свойства непрерывных отображений топологических пространств на нечеткую ситуацию.

<u>Теорема.</u> Пусть $f:(X,\mathfrak{T})\to(Y,\Sigma)$ – непрерывно. Тогда для любых $\alpha\in\tilde{\mathfrak{B}}(X)$, $\beta\in\mathfrak{B}(Y)$ справедливы неравенства: $\alpha^{\tilde{z}}f^{1}\leq(\alpha f^{-1})^{\tilde{z}}$; $(\beta f^{-1})^{\tilde{z}}\leq\beta^{\tilde{z}}f^{-1}$; $\tilde{\mathfrak{T}}^{\tilde{z}}(\beta f^{-1})\geq\tilde{\Sigma}^{\tilde{z}}(\beta)$; $\tilde{\mathfrak{T}}(\beta f^{-1})\geq\tilde{\Sigma}(\beta)$.

2.3. Нечеткая бикомпактность нечеткого множества

2.3.1. Предикат бикомпактности B в четком случае представим в виде

$$B(A)\Leftrightarrow\forall\Sigma\subset\mathfrak{T}(A\subset\cup\Sigma\to\exists\Sigma_p\subset\Sigma(X\subset\cup\Sigma_p)),\qquad(2.18)$$

где Σ_p есть конечная система множеств.

Определим нечеткую бикомпактность $\tilde{B}:\tilde{\mathfrak{B}}(X)\to[0,1]$

$$\tilde{B}(\alpha)\overset{\text{def}}{=}\inf_{\Sigma\subset\mathfrak{T}}[(\alpha\subset\cup\Sigma)\to\sup_{\Sigma_p\subset\Sigma}(\alpha\subset\cup\Sigma_p)]\qquad(\widetilde{2.18})$$

Интуитивный смысл этого определения очевиден.

Двойственным образом, в терминах центрированных систем замкнутых множеств, (2.18) запишется в виде

$$B(A)\Leftrightarrow\inf_{\Phi\subset\mathfrak{T}}[C(\Phi,A)\to(\cap\Phi)\cap A\neq\phi],\qquad(2.19)$$

где $C(\Phi,A)\Leftrightarrow\forall\Phi_p\subset\Phi((\cap\Phi_p)\cap A\neq\phi)$ есть предикат центрированности системы Φ относительно множества A (Φ_p – конечная система).

По двойственности в $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$ легко проследить, что $(\widetilde{2.18})$ также допускает равносильную формулировку

$$\tilde{B}(\alpha)=\inf_{\Phi\subset\mathfrak{T}}[\tilde{C}(\Phi,\alpha)\to\sup_{x\subset\cap\Phi}x\alpha],\qquad(\widetilde{2.19})$$

где $\tilde{C}(\Phi,\alpha)=\inf_{\Phi_p\subset\Phi}\sup_{x\subset\cap\Phi_p}x\alpha$

2.3.2. Четкая бикомпактность имеет равносильное определение в терминах направленностей:

$$B_2(A)\Leftrightarrow\forall S[S(D)\subset A\to\exists x(x\in A\,\&\,x=\lim_{\alpha\in D}S_\alpha)],\qquad(2.20)$$

где снова D – направленное множество, $S:D\to X$, соответствующий нечеткий предикат определим как

$$\tilde{B}_2(\alpha)\overset{\text{def}}{=}\inf_{S}[(S(D)\subset\alpha)\to\sup_{\substack{x\\ x=\lim S_\alpha}}x\alpha]\qquad(2.20)$$

Как и в четком случае, можно доказать равносильность

$(\widetilde{2.20})$ и $(\widetilde{2.18})$.

<u>Теорема.</u> $\forall \mu \in \tilde{\mathfrak{B}}(X) \quad \tilde{B}(\mu) = \tilde{B}_{\mathfrak{B}}(\mu)$

2.3.3. Венцом исследований введенных нечетких предикатов является следующий результат:

<u>Теорема.</u> (i) Если $(X, \mathfrak{T})$ хаусдорфово, то $\forall \mu \quad \tilde{B}(\mu) \in \tilde{\mathfrak{T}}^*(\mu)$

(ii) Если $(X, \mathfrak{T})$ бикомпактно, то $\forall \mu \quad \tilde{\mathfrak{T}}^*(\mu) \in \tilde{B}(\mu)$,

демонстрирующий "идеальное" обобщение логических связей четких предикатов на их индуцированные нечеткие аналоги.

Отметим, что для меры замкнутости $\tilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{T}}^*$ (I.5) эта теорема не верна.

2.3.4. Непрерывные отображения "сохраняют" также и нечеткую бикомпактность.

<u>Теорема.</u> Если $f: (X, \mathfrak{T}) \to (Y, \Sigma)$ непрерывно, то $\tilde{B}(\mu) \in \tilde{B}(\mu f^{-1})$

2.4. Приведенные результаты наводят на мысль, что должна быть справедлива следующая общая метатеорема T : если в четкой ситуации для предикатов Θ и Ω справедлива импликация $\Theta \Rightarrow \Omega$, то для их нечетких аналогов $\tilde{\Theta}$ и $\tilde{\Omega}$, индуцированных нечеткостью множеств, справедливо неравенство $\tilde{\Theta} \leq \tilde{\Omega}$. Чтобы говорить о такой метатеореме, нужна, разумеется, однозначная формальная процедура построения по предикату Θ его нечеткого аналога $\tilde{\Theta}$. Таким образом, мы естественно приходим к необходимости рассмотрения логических формул языка, которым мы "записываем" утверждения о рассматриваемой структуре, и трактовке нечетких предикатов как специальным образом устроенных интерпретаций таких формул (об этом уже говорилось в п.I.2.). Так, например, определения $(\widetilde{2.1})$, $(\widetilde{2.10})$, $(\widetilde{2.18})$, $(\widetilde{2.20})$ получались из соответствующих формул четкой интерпретацией предикатных символов, входящих в подформулы со связанными переменными для множеств, и нечеткой - для подформул со свободной переменной для множеств. Некоторая общая тенденция просматривается, однако необходимая строго формальная процедура построения $\tilde{\Theta}$ по Θ не могла быть выявлена, поскольку все рассмотрения были сугубо семантическими, а

логическая символика использовалась лишь для наглядности и облегчения изложения неформальных соображений.

В пределах строгого синтаксического подхода уже получены некоторые соображения, позволяющие надеяться на построение указанной формальной процедуры, для которой справедлива метатеорема T, однако их обсуждение выходит за рамки настоящей статьи.

3. Аксиоматические нечеткие топологии

3.I. В построениях п.2 исходной была обычная "четкая" математическая структура топологического пространства, а нечеткость предикатов на $\mathfrak{B}(X)$ индуцировалась нечеткостью множеств. Однако поскольку в этой структуре имеется непосредственно аксиоматически заданный, а не произвольный, предикат второго порядка - сама топология $\mathfrak{T}$, то появляется возможность рассмотреть структуру с непосредственно заданным нечетким предикатом $\tilde{\mathfrak{T}}: \mathfrak{B}(X) \to [0,1]$, подчинив его аксиомам, которые бы в четкой ситуации переходили в обычные аксиомы топологии:

$$\Sigma \subset \mathfrak{T} \Rightarrow \cup\Sigma \in \mathfrak{T}; \quad \Sigma_p \subset \mathfrak{T} \to \cap\Sigma_p \in \mathfrak{T} \qquad (3.I)$$

(Σ_p есть конечная система множеств).

Можно предложить ряд различных наборов аксиом нечеткости $\tilde{\mathfrak{T}}$, вырождающихся в (3.I) в четком случае, соответственно этому имеем несколько вариантов аксиоматических нечетких топологий.

3.2. Естественным представляется введение такой структуры - пара $(X, \tilde{\mathfrak{T}})$ $\tilde{\mathfrak{T}}: \mathfrak{B}(X) \to [0,1]$ и для $\tilde{\mathfrak{T}}$ справедливы аксиомы

$$(\Sigma \subseteq \tilde{\mathfrak{T}}) \leqslant (\vee\Sigma) \quad \text{или} \quad \inf_{\omega\in\Sigma} \tilde{\mathfrak{T}}(\omega) \leqslant \tilde{\mathfrak{T}}(\vee\Sigma) \qquad (3.2)$$

$$(\Sigma_p \subseteq \mathfrak{T}) \leqslant \tilde{\mathfrak{T}}(\wedge\Sigma_p) \quad \text{или} \quad \min_{\omega\in\Sigma_p} \tilde{\mathfrak{T}}(\omega) \leqslant \tilde{\mathfrak{T}}(\wedge\Sigma_p)$$

Здесь Σ, Σ_p - четкие системы нечетких множеств.

Именно таким условиям удовлетворяет индуцированная нечеткая топология п.2(теорема 2.I6).

Можно предложить и "более нечеткие" аксиомы для $\tilde{\mathfrak{T}}$, если рассматривать нечеткие системы $\tilde{\Sigma}$ нечетких множеств $\tilde{\Sigma}: \mathfrak{B}(X) \to [0,1]$, и понимать "конечность" $\tilde{\Sigma}_p$ как его отличие от 0 лишь на конечном подмножестве аргумен-

тов (объединение и пересечение нечетких систем нечетких множеств определены в (2.9)).

Интересным представляется также рассмотрение нечеткой топологии на четких множествах, т.е. структуры $(X,\tilde{\mathcal{T}})$, $\tilde{\mathcal{T}}: \mathfrak{B}(X) \longrightarrow [0,1]$, и $\tilde{\mathcal{T}}$ удовлетворяет, например, аксиомам (3.2), где Σ, Σ_F есть системы четких множеств.

Для всех указанных топологий мы можем для фиксированного $\alpha \in \mathfrak{B}(X)$ ввести

$$\tilde{\mathcal{T}}^*_\alpha: \mathfrak{B}(X) \longrightarrow [0,1],\ \tilde{\mathcal{T}}^*_\alpha(\beta) = \tilde{\mathcal{T}}^*(\beta) \wedge (\alpha \subset \beta).$$

(т.е. $\tilde{\mathcal{T}}^*_\alpha$ есть система замкнутых множеств, содержащих α), и положить по определению $\alpha^z = \bigwedge \tilde{\mathcal{T}}^*_\alpha$ - таким образом строится оператор замыкания $\alpha \to \alpha^z$.

Отметим, что и в случае нечеткой топологии на четких множествах, $\tilde{\mathcal{T}}^*_A$ есть нечеткая система множеств и $A^z = \bigwedge \tilde{\mathcal{T}}^*_A$ есть нечеткое множество. Поэтому мы не сможем ограничиться рассмотрением лишь $\mathfrak{B}(X)$ и придется доопределять $\tilde{\mathcal{T}}$ на $\mathfrak{B}(X)$

3.3. Еще один путь введения аксиоматической нечеткой топологии - задание на $\mathfrak{B}(X)$ оператора замыкания $\tilde{Z}$, удовлетворяющего "нечетким" условиям Куратовского (2.5), а далее введение замкнутой топологии на $\mathfrak{B}(X)$ соотношением $\tilde{\mathcal{T}}^*(\alpha) \overset{Def}{=} (\alpha \propto \tilde{Z}(\alpha))$

3.4. Отметим, наконец, что структура, введенная С.Чангом [4] - $(X,\mathcal{T})$, $\mathcal{T}: \mathfrak{B}(X) \to [0,1]$ и называемая в настоящее время нечеткой топологией, с развитой здесь точки зрения должна именоваться четкой топологией на нечетких множествах.

Литература

1. Н.Бурбаки. Теория множеств.-М., 1965.
2. Н.Бурбаки. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства.-М., 1969.
3. Р.Сикорский. Булевы алгебры.-М., 1969.
4. S.Chang. Fuzzy topological spaces. - J.Math. Anal. Appl. 1968, v.24, p.182-190.

Поступила 26 октября 1984 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.88

НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ ОПЕРАТОРЫ С БЕСКОНЕЧНОЙ (n, d) - ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Б.Ф.Иванов
ЛГУ им.П.Стучки

Пусть X и Y - банаховы пространства, A - линейный замкнутый оператор, действующий из X в Y т.е. $A: X \to Y$. Введем обозначения

$$n = \dim \operatorname{Ker} A \quad , \quad d = \dim \operatorname{Ker} A^*$$

Число d называется дефективным числом оператора A. Упорядоченную пару чисел (n, d) называют (n, d)-характеристикой оператора A. Если оба числа n и d конечные, то о (n, d)-характеристике оператора A говорят, что она конечна. Если только одно из чисел n или d конечно, то (n, d) характеристику оператора A зывают полубесконечной. И, наконец, если оба числа n и d бесконечны, то (n, d)-характеристику называют бесконечной.

Операторы с конечной или полубесконечной (n, d)-характеристикой обладают устойчивостью свойства нормальной разрешимости относительно любых малых (по норме операторов) возмущений, а также относительно всех вполне непрерывных возмущений (см. [1], [2]). Если же не делать предположения о конечности по крайней мере одного из чисел n и d т.е. считать оператор A только линейным и замкнутым, то можно утверждать, что замкнутость $R(A)$ (замкнутость $R(A)$ равносильна нормальной разрешимости оператора A) устойчива при возмущениях A произвольными непрерывными операторами конечного ранга [3]. Ясно, что в этом случае возмущающие операторы образуют весьма тонкий слой в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$ всех линейных ограниченных операторов, отображающих X в Y. М.А.Гольдман в [2] показал, что "если A - нормально разрешимый оператор с бесконечной (n, d)-характеристикой, то всегда возможно прибавлением к нему оператора сколь угодно малого по норме или вполне непрерывного

нарушить его нормальную разрешимость и даже бесконечность его (n, d)-характеристики". М.А.Гольдман и С.Н.Крачковский [3] рассмотрели промежуточный случай, когда n и d произвольны, но множество $\mathcal{K}er\, A$, с которым связана $n = \dim \mathcal{K}er\, A$, подчинено известным ограничениям, позволяющим выделить определенный класс возмущений, сохраняющих замкнутость области значений и некоторые другие свойства оператора A . Речь идет о следующих условиях, налагаемых на оператор A .

1°. Оператор A нормально разрешим.

2°. (n, d)-характеристика оператора A бесконечна.

3°. Существует непрерывный оператор проектирования на ядро данного оператора.

4°. $\dim(\mathcal{K}er\, A \setminus \mathcal{K}er\, A \prod_{m=1}^{\infty} R(A^m)) < \infty$.

Заметим, что $\prod_{m=1}^{\infty} R(A^m)$ называют ядром Рисса оператора A и обозначают $\mathfrak{R}(A)$. Условие 4° означает, что ядро оператора A образует на риссовом ядре не более чем конечномерный выступ.

Целью данной заметки является указать примеры операторов, удовлетворяющих условиям 1° и 2°. На то, что это не простой вопрос, указывает тот факт, что среди сингулярных интегральных операторов на простом контуре или среди одномерных операторов Теплица таковых не имеется. Построенные примеры должны послужить отправным пунктом для отыскания операторов, удовлетворяющих условиям 1°-4° и исследования их свойств.

I. Нормально разрешимые сингулярные интегральные операторы с бесконечной (n, d)-характеристикой

Пусть μ - конечное множество попарно дизъюнктных простых замкнутых кривых типа Ляпунова на комплексной плоскости. $\Gamma = \bigcup_{\mu \in \mu} \mu$

Кривая Γ определяет разбиение расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ на дизъюнктные открытые множества $\mathfrak{G}^+$ и $\mathfrak{G}^-$.

$$\mathbb{C} = \mathfrak{G}^+ \cup \mathfrak{G}^- \cup \Gamma, \quad \infty \in \mathfrak{G}^-$$

В пространстве $L^p(\Gamma)$ рассматривается ограниченный линейный оператор T , определяемый сингулярным уравнением

$(T\varphi)(t) = c(t)\varphi(t) + \frac{d(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \qquad (t \in \Gamma)$

с непрерывными коэффициентами c и d. Стандартным приемом оператор T представляют в виде $T = a\mathcal{P} + b\mathcal{Q}$, где $\mathcal{P} = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + S)$, $\mathcal{Q} = \frac{1}{2}(\mathcal{I} - S)$, S – оператор, определяемый равенством $(S\varphi)t = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \quad (t \in \Gamma)$

$a = a(t) = \frac{c(t) + d(t)}{2}$, $b = b(t) = \frac{c(t) - d(t)}{2}$.

Оператор $\mathcal{P}$ есть проектор, проектирующий $L^p(\Gamma)$ на множество тех функций из $L^p(\Gamma)$, для которых $S\varphi = \varphi$.

<u>Теорема I.</u> Пусть множество $\mathfrak{M}$ связно; $b(t) \neq 0$ всюду на Γ, $a(t) \neq 0$ всюду на Γ, исключая некоторое подмножество $\mathcal{N} \subset M$ и $a(t) = 0$ для всех $t \in \bigcup_{M \in \mathcal{N}} M$. Тогда оператор $T = a\mathcal{P} + b\mathcal{Q}$ будет нормально разрешим с бесконечной (n, d)-характеристикой.

Доказательство этой теоремы основано на ряде теорем из [4]. В условиях теоремы I функции a и b будут нормальными, т.е. они на каждой кривой $M \in \mathcal{M}$ удовлетворяют условию: либо a и b отличны от нуля для всех $t \in M$, либо a и b суть тождественные нули на M. Отметим, что нормальность функций a и b является необходимым условием нормальной разрешимости оператора T, а для простого контура Γ и достаточным. Бесконечность (n, d)-характеристики вытекает из того, что в условиях теоремы оператор T будет нормально разрешимым, но ни Φ^+-, ни Φ-оператором не будет.

<u>2. Нормально разрешимые операторы Теплица с бесконечной (n, d)-характеристикой</u>

Пусть Γ – единичная окружность, $H_2(\Gamma)$ – пространство Харди функций на Γ, H_2 – замыкание по норме $L_2(\Gamma \times \Gamma)$ алгебраического тензорного произведения $H_2(\Gamma) \otimes H_2(\Gamma)$, P – ортопроектор из $L_2(\Gamma \times \Gamma)$ на H_2. Оператором Теплица T_a в пространстве H_2, отвечающим непрерывной на $\Gamma \times \Gamma$ функции $a(t_1, t_2)$ называется оператор, определяемый формулой

$$T_a(f) = P(af), \quad f \in H_2$$

Функцию $a(t_1, t_2)$ будем называть символом оператора T_a. Через $T(H_2)$ обозначим C^* – подалгебру алгебры всех линейных, ограниченных операторов, действующих в H^2, порожденную операторами Теплица. Через $C^{++}(\Gamma \times \Gamma)$ обозначим подалгеб-

ру алгебры $C(\Gamma\times\Gamma)$, непрерывных на $\Gamma\times\Gamma$ функций, состоящую из функций, допускающих аналитическое продолжение в соответствующую бицилиндрическую область

$$\mathcal{X}^{++}\{|t_1|\leq 1,\ t_2\geq 1\}$$

Топологическим индексом не обращающейся в нуль непрерывной на H_2 функции $a(t_1,t_2)$ будем называть пару целых чисел $(\varkappa,\mu)$, вычисляемых следующим образом: $\varkappa$ и μ являются числами вращения (порядками) кривых $a(t_1,1)$ и $a(1,t_2)$ соответственно, относительно начала координат.

Предложение I. Оператор T_a является Φ-оператором тогда и только тогда, когда его символ и топологический индекс удовлетворяют условиям

1) $a(t_1,t_2)\neq 0$ на $\Gamma\times\Gamma$,

2) $\operatorname{ind} a(t_1,1)=0$, $\operatorname{ind} a(1,t_2)=0$. [5]

Мы покажем теперь важность "топологического индекса" в случаях, когда он отличен от нуля.

Теорема 2 [6]. Рассмотрим множество теплицевых операторов в H_2, имеющих не обращающийся в нуль символ и топологический индекс $(\varkappa,\mu)$ для фиксированных целых чисел $\varkappa$ и μ.

Если $\varkappa,\mu\geq 0$ и $\varkappa+\mu>0$, то оператор T_a нормально разрешим, T_a имеет нулевое ядро и бесконечное коядро.

в) Если $\varkappa$, $\mu\leq 0$ и $\varkappa+\mu<0$, то область значений T_a замкнута, а нулевое коядро T_a бесконечномерно.

с) Если $\varkappa$ и μ имеют противоположные знаки, то подмножество операторов среди них, имеющих как бесконечномерное ядро, так и бесконечномерное коядро, содержит плотное подмножество.

Лемма I. Пусть функция $a(t_1,t_2)$ такова, что $\varkappa$ и μ имеют противоположные знаки, где $(\varkappa,\mu)$ - топологический индекс функции $a(t_1,t_2)$. Если оператор Теплица T_a, порожденный этой функцией, нормальноразрешим, то он имеет бесконечную (n,d)-характеристику.

Доказательство проведем, предполагая противное, т.е. полагаем, что T_a в условиях теоремы имеет по крайней мере полубесконечную (n,d)-характеристику. Это вступает в противоречие с плотностью операторов с бесконечной (n,d)-характеристикой (теорема 2,с)) и устойчивостью полубеско-

нечности характеристики.

Теорема 3. Пусть функция $a(t_1,t_2)\in C(\Gamma\times\Gamma)$ не обращается в нуль и допускает факторизацию вида

$$a(t_1,t_2)=a_{++}(t_1,t_2)a_{+-}(t_1,t_2)\cdot t_1^{\varkappa}\cdot t_2^{\mu}\, a_{-+}(t_1,t_2)a_{--}(t_1,t_2) \quad ,$$

где $a_{\pm\pm}^{\pm 1}(t_1,t_2)\in C^{\pm\pm}(\Gamma\times\Gamma)$, $\varkappa,\mu<0$.

Если $\varkappa<0$ ($\varkappa>0$) и функция $a_{+-}^{-1}(t_1,t_2)(a_{-+}^{-1}(t_1,t_2))$ является полиномом по одной из переменных t_1 , t_2 , то оператор T_a является нормально разрешимым и имеет бесконечную (n,d)-характеристику.

Доказательство. Нормальная разрешимость T_a доказана в [5] . Бесконечность (n,d)-характеристики вытекает из леммы I.

Литература

I. Аткинсон Ф.В. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах. - Матем. сб., 1951, т.28:I, с.3-14.

Гольдман М.А. Об устойчивости свойства нормальной разрешимости уравнений. - ДАН СССР, 1965, т.100, № 2.

3. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. О возмущении гомоморфизмом операторами конечного ранга. - ДАН СССР, 1967, т.174, № 4.

4. Лайтерер Ю. О нормальной разрешимости сингулярных интегральных уравнений на непростом контуре. - В кн.: Математические исследования, т. VI, вып.2(20). - Кишинев, 1971, с.105-112.

5. Сазонов Л.И. О нормальной разрешимости двумерных операторов Тепляца. - Математические заметки, 1981, т.30, № 2, с. 261-268.

6. Douglas R.G., Howe R., On the C-algebra of Toeplitz operators on the quarter-plane. Trans.Amer.Math.Soc., 1971, vol.158, p.203-218.

Поступила 1 октября 1984 г.

Топологические пространства и их отображения, Рига, 1985.

УДК 517.98

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ ВОГНУТОСТИ ПО М.А.КРАСНОСЕЛЬСКОМУ

М.Л.Катков
Уральский государственный университет

М.А.Красносельским было введено и изучено понятие монотонного вогнутого оператора. Это понятие было существенным образом обобщено В.И.Опойцевым, который рассматривал так называемые гетеротонные операторы. Введенное им понятие гетеротонности позволило распространить известные для монотонных вогнутых операторов результаты на некоторый специальный класс, вообще говоря, не монотонных операторов. В настоящей заметке дается определение оператора медленного роста. Это определение позволяет выделить классы монотонных операторов отличные от класса вогнутых, с такими же свойствами, что и вогнутых операторов.

§ I. Определение одной специальной метрики

Пусть X – банахово пространство, полуупорядоченное конусом K, R – множество действительных чисел с естественным порядком и расстоянием, M – некоторое подмножество пространства X, R^+ – множество неотрицательных действительных чисел.

Определение I. На произведении $R^+ \times M$ рассмотрим оператор $\mathcal{U}: R^+ \times M \longrightarrow M$. Относительно оператора $\mathcal{U}$ будем предполагать, что он удовлетворяет следующим условиям.

I. Оператор $\mathcal{U}$ непрерывен.

2. Монотонен по переменной x и монотонен либо антимонотонен по переменной t.

3. Для любого $x \in M$ равенство $\mathcal{U}(t,x) = x$ выполняется тогда и только тогда, когда $t = 0$

4. Для любых $t_1, t_2 \in R^+$ и для любого $x \in M$ выполняется равенство $\mathcal{U}(t_1 + t_2, x) = \mathcal{U}(t_1, \mathcal{U}(t_2, x))$.

Множество всех значений $\mathcal{U}(t,x)$ оператора $\mathcal{U}$, удовлетворяющего условиям I-4, при фиксированном $x \in M$ будем называть траекторией, а сам оператор $\mathcal{U}$ - оператором сдвига по траекториям множества M

Определение 2. Оператор сдвига по траекториям множества M будем называть нормальным, если он определен на множестве $R \times M$ и удовлетворяет условиям I-4 на всем этом множестве.

Оператор сдвига по траекториям множества M порождает на некоторых подмножествах M метрические пространства. Пусть x_0 произвольный элемент множества M. Составляющей множества M, порожденной элементом x_0 и оператором сдвига $\mathcal{U}$, будем называть множество таких элементов $y \in M$ для которых при некотором $t > 0$ выполняется система неравенств

$$x_0 \leq \mathcal{U}(t,y) \quad , \quad y \leq \mathcal{U}(t,x_0) \qquad (I)$$

либо система неравенств

$$\mathcal{U}(t,x_0) \leq y \quad , \quad \mathcal{U}(t,y) \leq x_0 \qquad (2)$$

Обозначать составляющую, порожденную элементом x_0 и оператором сдвига $\mathcal{U}$, будем символом $K(x_0,\mathcal{U})$. Очевидно, $y \in K(x,\mathcal{U})$ тогда и только тогда, когда $x \in K(y,\mathcal{U})$ Поэтому любые две составляющие совпадают или не пересекаются.

На множестве $K(x_0,\mathcal{U}) \times K(x_0,\mathcal{U})$ определим с помощью оператора сдвига $\mathcal{U}$ метрику. Для произвольных x и y из $K(x_0,\mathcal{U})$ величину $\rho(x,y)$ положим равной минимальному t, при котором выполняется система (I), если оператор $\mathcal{U}$ монотонен по переменной t, и положим эту величину равной минимальному t, при котором выполняется система (2), если оператор $\mathcal{U}$ антимонотонен по переменной t Выполнение аксиом метрики очевидно.

Пример I. Пусть M множество всех отличных от нуля элементов конуса K Оператор $\mathcal{U}$ определим равенством

$$\mathcal{U}(t,x) = e^{t} \cdot x \qquad (3)$$

Условия I-4 легко проверяются Составляющей, порожденной любым ненулевым элементом x_0 из K и данным оператором $\mathcal{U}$ является множество элементов, удовлетворяющих при некотором $t > 0$ неравенству $e^{-t}x_0 \leq x \leq e^{t}x_0$. Полученная в этом случае метрика хорошо известна (см. [2]).

Пример 2. Пусть множество M совпадает со всем пространством, u_0 - произвольный ненулевой элемент из конуса K. Оператор $\mathcal{U}$ определим равенством $\mathcal{U}(t,x) = x + tu_0$. Составляющей, порожденной элементом $x_0 \in X$ и оператором $\mathcal{U}$, является "сдвинутое" на x_0 пространство E_{u_0} (пространство u_0-измеримых элементов [1]). Метрика, которая получается в этом случае, рассматривалась в [4].

Рассмотрим один способ определения операторов сдвига. Пусть M некоторое подмножество пространства X, u_0 - произвольный ненулевой элемент из конуса K, Φ монотонный гомеоморфизм, определенный на множестве M, такой, что отображение Φ^{-1} также монотонно и выполняется одно из соотношений:

$$\forall t > 0 \quad \Phi(M) + tu_0 \subset \Phi(M) \tag{4}$$

$$\forall t > 0 \quad \Phi(M) - tu_0 \subset \Phi(M) \tag{5}$$

Оператор $\mathcal{U}$ при выполнении включения (4) определим равенством

$$\mathcal{U}(t,x) = \Phi^{-1}(\Phi(x) + tu_0), \tag{6}$$

а при выполнении соотношения (5) равенством

$$\mathcal{U}(t,x) = \Phi^{-1}(\Phi(x) - tu_0) \tag{7}$$

Операторы, определенные равенствами (6) и (7), являются операторами сдвига по траекториям множества M. Составляющей $K(x_0,\mathcal{U})$ в данном случае является множество всех $x \in M$, удовлетворяющих при некотором $t > 0$ неравенству

$$\Phi(x_0) - tu_0 \leq \Phi(x) \leq \Phi(x_0) + tu_0$$

Из последнего неравенства следует, что составляющая есть прообраз при отображении Φ пространства u_0-измеримых элементов, сдвинутого на $\Phi(x_0)$.

Замечание. Если $\forall t \in R$ выполняется соотношение $\Phi(M) + tu_0 \subset \Phi(M)$, то оператор $\mathcal{U}(t,x) = \Phi^{-1}(\Phi(x) + tu_0)$ ($x \in M$, $t \in R$) является нормальным оператором сдвига по траекториям множества M.

Известно, что если конус K нормален, то пространство E_{u_0} полно по u_0-норме и норма пространства X подчинена u_0-норме [1]. Так как Φ гомеоморфизм, то из способа определения метрики ρ следует, что в пространстве с нормальным конусом сходимость по метрике ρ влечет сходимость по норме пространства X, и, если множество $\Phi(M)$ замкну-

то в X, то метрическое пространство $(K(x_0,\mathcal{U}),\rho)$ полное.

Рассмотрим в пространстве $C_{[a;b]}$ непрерывных на $[a;b]$ функций, полуупорядоченном конусом неотрицательных функций, примеры конкретных операторов сдвига, определенных указанным выше способом. В этих примерах гомеоморфизм Φ определяется с помощью функции φ $R \to R$ равенством $\Phi x(s)=\varphi(x(s))$, где $x \in C_{[a;b]}$, $s \in [a;b]$

Пример 3. Пусть $\varphi(z)=z$ ($z \in R$), $u_0(s)\equiv 1$ ($s \in [a;b]$), множество M есть все пространство $C_{[a;b]}$ В этом случае для всех $x \in C_{[a;b]}$ $\mathcal{U}(t,x)=x+tu_0$, для любого $x_0 \in C$ составляющая $K(x_0,\mathcal{U})$ совпадает со всем пространством C, а метрика ρ определяется равенством $\rho(x,y)=\max\limits_{s\in[a;b]}|x(s)-y(s)|$, $(x,y \in C_{[a;b]})$.

Пример 4. Пусть $\varphi(z)=\ln z$, $u_0(s)\equiv 1$ ($s \in [a;b]$) множество M есть множество всех непрерывных функций, принимающих только положительные значения. В этом случае для всех $x \in M$ $\mathcal{U}(t,x)=e^t x$ составляющая $K(x_0,\mathcal{U})$ для любой функции $x_0 \in M$ совпадает с M, метрика ρ определяется равенством $\rho(x,y)=\max\limits_{s\in[a;b]}|\ln x(s)-\ln y(s)|$ ($x,y \in M$)

Пример 5. Пусть функция $\varphi(z)$ задана следующим образом

$$\varphi(z)=\begin{cases}\ln z & \text{если } 0<z\le 1\\ z-1 & \text{, если } 1\le z\end{cases}$$

множество M и элемент u_0 - такие же, как и в примере 4. В этом случае оператор сдвига определяется равенством

$$\mathcal{U}(t,x)(s)=\begin{cases}e^t x(s) & \text{, если } 0<x(s)\le e^{-t}\\ \ln x(s)+t+1 & \text{, если } e^{-t}<x(s)\le 1\\ x(s)+t & \text{, если } x(s)>1\end{cases}$$

Составляющая $K(x_0,\mathcal{U})$ для любого $x_0 \in M$ совпадает с M Для любых x и y из M $\rho(x,y)=\max\limits_{s\in[a;b]}|\varphi(x(s))-\varphi(y(s))|$

Пример 6. Пусть $\varphi(z)=z^m$, где $m \in]0;1[$ ($z\in[0;+\infty[$, $u_0(s)\equiv 1$ ($s\in[a;b]$)). Пусть множество M есть конус K Оператор сдвига $\mathcal{U}$ определим равенством (6). Составляющая $K(x_0,\mathcal{U})$, порожденная любым элементом x_0 в этом случае совпадает с конусом K.

Пример 7. Пусть $\varphi(z)=-z^k$, где $k\in]-\infty,0[$ ($z\in]0;+\infty[$), $u_0(s)\equiv 1$ ($s\in[a;b]$), множество M есть множество всех непрерывных функций, принимающих поло-

жительные значения. В этом примере оператор сдвига $\mathcal{U}$ определим равенством (7). Составляющая $K(x_0, \mathcal{U})$, порожденная любым элементом $x_0 \in M$ совпадает с множеством M

§ 2. Операторы медленного роста

Определение 3. Пусть M подмножество пространства X, $\mathcal{U}$ оператор сдвига по траекториям множества M. Монотонный оператор T, отображающий множество M в M, назовем оператором медленного роста относительно оператора сдвига $\mathcal{U}$, если для любых $t > 0$, $x \in M$ выполняется неравенство

$$T\mathcal{U}(t,x) \leq \mathcal{U}(t,Tx) \qquad (9а)$$

при условии, что оператор сдвига $\mathcal{U}$ монотонен по переменной t, либо выполняется неравенство

$$T\mathcal{U}(t,x) \geq \mathcal{U}(t,Tx), \qquad (9б)$$

если оператор сдвига $\mathcal{U}$ антимонотонен по переменной t

Лемма I. Пусть функция $\varphi(z)$ монотонно возрастает, дифференцируема на некотором интервале и такова, что для положительных t и всех z из этого интервала определена функция $\mathcal{U}(t,z) = \varphi^{-1}(\varphi(z)+t)$ Пусть фумкция $y = f(z)$ отображает указанный интервал в себя, монотонно возрастает и является дифференцируемой.

Тогда, для того чтобы функция $y = f(z)$ являлась оператором медленного роста относительно оператора сдвига $\mathcal{U}(t,z) = \varphi^{-1}(\varphi(z)+t)$, достаточно выполнения условия $f'(z) \leq \varphi'(z)/\varphi'(f(z))$.

Доказательство. Для того, чтобы получить утверждение леммы, достаточно применить теорему Лагранжа к функции $y = \varphi(f(\varphi^{-1}(\bar{z})))$, где $\bar{z} = \varphi(z)$.

Рассмотрим теперь определение оператора медленного роста для функций на числовой прямой. Пусть $X = R$, $M = [0; +\infty[$, φ одна из множества функций, определенных в примерах 3-7 Оператор сдвига по траекториям множества M определим равенством

$$\mathcal{U}(t,x) = \varphi^{-1}(\varphi(x)+t) \qquad (t>0,\ x>0), \qquad (10)$$

если φ принадлежит множеству функций, определенных в примерах 3-6, либо равенством

$$\mathcal{U}(t,x) = \varphi^{-1}(\varphi(x)-t) \quad (t>0;\ x>0), \qquad (11)$$

если φ из множества функций, определенных в примере 7.

Тогда для того, чтобы положительная дифференцируемая монотонная функция f являлась оператором медленного роста на множестве M, достаточно выполнения неравенства

$$f'(x) \leq \varphi'(x)/\varphi(f(x)) \qquad (0<x<+\infty) \qquad (12)$$

При $\varphi(k) = \ln k$ класс функций медленного роста относительно соответствующего оператора сдвига совпадает с классом вогнутых (в смысле определения [1]) функций.

Отметим также, что если при некотором k ($0 \leq k < +\infty$) положительная дифференцируемая монотонная функция f удовлетворяет условию

$$f'(x) \leq (f(x)/x)^k \qquad (0<x<+\infty), \qquad (13)$$

то эта функция является оператором медленного роста на множестве $]0;+\infty[$ относительно оператора $\mathcal{U}$, определенного равенством (10) либо равенством (11), где φ выбрана должным образом из множества функций, определенных в примерах 3,4,6,7.

<u>Замечание</u> к определению оператора медленного роста. Если оператор сдвига $\mathcal{U}$ является нормальным, то для любых $t<0$ и $x \in M$ из неравенства (9а) следует неравенство $T\mathcal{U}(t,x) \geq \mathcal{U}(t,Tx)$, а из неравенства (9б) следует справедливость неравенства $T\mathcal{U}(t,x) \leq \mathcal{U}(t,Tx)$

Рассмотрим уравнение

$$Tx = x \qquad (14)$$

с монотонным оператором T. Известны различные условия (см. [1]), при выполнении которых решение уравнения (14) может быть найдено методом последовательных приближений. Главная трудность в применении этого метода состоит в выборе начального приближения. Для операторов медленного роста эта задача значительно упрощается.

<u>Теорема 1.</u> Пусть $\mathcal{U}$ - оператор сдвига по траекториям множества M является нормальным. Пусть T есть оператор медленного роста на множестве M относительно оператора сдвига $\mathcal{U}$. Предположим, что оператор T имеет единственную неподвижную точку x^* и существует элемент $y_0 \in M$ такой, что для всех $x \in M$ $Tx \in K(y_0,\mathcal{U})$ и выполняется одно из условий:

а) конус K правилен, оператор T непрерывен;

б) конус K нормален, оператор T вполне непрерывен;

в) конус K нормален, единичный шар в X слабо компактен, оператор T слабо непрерывен.

Тогда для любого $x_0 \in M$ последовательные приближения $T^n x_0$ сходятся к точке x^* по норме пространства X

Доказательство проведем для оператора сдвига монотонного по переменной t. Покажем, что для любого $t>0$ конусный отрезок вида $\langle \mathcal{U}(-t,x^*); \mathcal{U}(t,x^*)\rangle$ является инвариантным для оператора T Действительно, для любого x из указанного отрезка имеем $Tx \leq T\mathcal{U}(t,x^*) \leq \mathcal{U}(t,x^*)$ с другой стороны $Tx \geq T\mathcal{U}(t,x^*) \geq \mathcal{U}(-t,x^*)$.

Так как $x^* \in K(y_0,\mathcal{U})$, то это значит, что при некотором положительном t_1 выполняется система неравенств $\mathcal{U}(-t_1,y_0) \leq x^* \leq \mathcal{U}(t_1,y_0)$. Для любого $x_0 \in M$ $Tx \in K(y_0,\mathcal{U})$ Поэтому существует положительное t_2, для которого справедливы неравенства $\mathcal{U}(-t_2,y_0) \leq Tx_0 \leq \mathcal{U}(t_2,y_0)$

Таким образом, $\mathcal{U}(-t,x^*) \leq Tx \leq \mathcal{U}(t,x^*)$, где $t=t_1+t_2$

Применение известного утверждения теории монотонных операторов (см. теорему 4.4 из [I]) завершает доказательство.

Замечание. Утверждение теоремы остается в силе, если монотонный по переменной t оператор сдвига $\mathcal{U}$ не является нормальным, но в M можно указать элемент x_0 такой, что для всех $x \in M$ $x_0 \leq x$ В частности, для оператора $\mathcal{U}$ и множества M, описанных в примере 6, $x_0=0$ В этом случае теорему 4.4 нужно применить к конусному отрезку вида $\langle 0; \mathcal{U}(t,x^*)\rangle$

Для того, чтобы привести пример интегрального оператора медленного роста, понадобится следующая лемма.

Лемма 2. Пусть функция $\varphi(z)$ монотонно возрастает на некотором интервале, дважды дифференцируема и такова, что для всех z из этого интервала и положительных t определена функция $\mathcal{U}(t,z)=\varphi^{-1}(\varphi(z)+t)$.

Тогда, если производная функции $1/\varphi(z)$ не возрастает, то для каждого положительного t функция $\mathcal{U}(t,z)$ вогнута по переменной z.

Доказательство. Достаточно проверить, что вторая производная функции $\mathcal{U}(t,z)$ по переменной z не положительна.

Пример 8. Рассмотрим интегральный оператор, заданный соотношением

$$Tx(t) = \int_a^b G(t,s,x(s))ds, \qquad (15)$$

где ядро $G(t,s,u)$ непрерывно, положительно, не убывает по переменной u. Тогда оператор (15) вполне непрерывен, положителен, монотонен на конусе K неотрицательных функций в пространстве $C_{[a;b]}$. Предположим, что длина отрезка $[a;b]$ равна единице, а функция $G(t,s,u)$ удовлетворяет условию

$$G'_u(t,s,u) \le \left(G(t,s,u)/u\right)^k \qquad (0 \le k < 1,\ t,s \in [a;b],\ u \in]0;+\infty[) \qquad (16)$$

В этом случае оператор (15) является оператором медленного роста на конусе K относительно оператора сдвига, порожденного функцией $\varphi(t) = t^{1-k}$ ($t > 0$).

Действительно, на основании леммы I имеем, что функция $G(t,s,u)$ является оператором медленного роста по переменной u; поэтому $G(t,s,\mathcal{U}(t,x(s))) \le$
$\le \mathcal{U}(t,G(t,s,x(s)))$ $(t,s \in [a;b],\ t > 0,\ x \in K)$

Функция $\varphi(t) = t^{1-k}$ удовлетворяет условиям леммы 2, поэтому функция $\mathcal{U}(t,t) = \varphi^{-1}(\varphi(t)+t)$ вогнута по переменной t. Воспользуемся неравенством Иенсена для вогнутой функции:

$$\int_a^b G(t,s,\mathcal{U}(t,x(s)))ds \le \int_a^b \mathcal{U}(t,G(t,s,x(s)))ds \le \mathcal{U}\left(t,\int_a^b G(t,s,x(s))ds\right)$$

Учитывая определение оператора T, получаем неравенство $T\mathcal{U}(t,x) \le \mathcal{U}(t,Tx)$. То есть, оператор T - медленного роста.

§ 3. Операторы u_0-медленного роста.

Определение 3. Пусть M подмножество пространства X, u_0 - фиксированный элемент из M, $\mathcal{U}$ - оператор сдвига по траекториям множества M. Монотонный оператор T, отображающий множество M в себя, будем называть оператором u_0-медленного роста относительно оператора $\mathcal{U}$, если он удовлетворяет двум условиям:

1) для любого x из M $Tx \in K(u_0,\mathcal{U})$;

2) для любых $x \in K(u_0,\mathcal{U})$ и $t > 0$ существует положительное $q(x,t) < 1$, при котором справедливо неравенство $T\mathcal{U}(t,x) \le \mathcal{U}(qt,Tx)$, если оператор сдвига $\mathcal{U}$ моно-

нек по переменной t либо справедливо неравенство $T\mathcal{U}(t,x) \geq \mathcal{U}(qt, Tx)$, если оператор сдвига $\mathcal{U}$ антимонотонен по переменной t

Заметим, что при соответствующем выборе множества M элемента u_0, оператора $\mathcal{U}$, определение 3 переходит в определение u_0-вогнутого оператора. Операторы из выделенного класса обладают рядом замечательных свойств, аналогичных свойствам u_0-вогнутых операторов.

Теорема 2. Пусть T оператор u_0-медленного роста на множестве M относительно оператора сдвига $\mathcal{U}$.

Тогда оператор T не может иметь на множестве M более одной неподвижной точки.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 неподвижные точки для оператора T. Пусть $t = \rho(x_1, x_2)$ Из условия 2 определения 3 получаем, что существует положительное $q < 1$, при котором выполняется неравенство $\rho(Tx_1, Tx_2) \leq q \cdot \rho(x_1, x_2)$ А это возможно лишь при $x_1 = x_2$ Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{U}$ нормальный оператор сдвига по траекториям множества M, T - оператор u_0-медленного роста на этом множестве относительно оператора сдвига $\mathcal{U}$ x^* - неподвижная точка оператора T

Тогда для любого $x_0 \in M$ последовательные приближения $T^n x_0$ сходятся по метрике ρ к x^*.

Доказательство. Для определенности будем считать, что оператор $\mathcal{U}$ монотонен по переменной t Покажем, что для любого $x_0 \in M$ Tx_0 принадлежит конусному отрезку вида $\langle \mathcal{U}(-t, x^*); \mathcal{U}(t, x^*) \rangle$ при некотором положительном t.

Действительно, $Tx_0 \in K(u_0, \mathcal{U})$, $x^* \in K(u_0, \mathcal{U})$ Поэтому для некоторых положительных t_1 и t_2 выполняются неравенства $\mathcal{U}(-t_1, u_0) \leq x^* \leq \mathcal{U}(t_1, u_0)$, $\mathcal{U}(-t_2, u_0) \leq Tx_0 \leq \mathcal{U}(t_2, u_0)$, из которых следует, что $\mathcal{U}(-t, x^*) \leq Tx_0 \leq \mathcal{U}(t, x^*)$, где $t = t_1 + t_2$

Конусный отрезок $\langle \mathcal{U}(-t, x^*); \mathcal{U}(t, x^*) \rangle$ инвариантен для оператора T. Обозначим $v_0 = \mathcal{U}(-t, x^*)$, $w_0 = \mathcal{U}(t, x^*)$ Рассмотрим две итерационные последовательности

$$v_n = T v_{n-1}, \quad w_n = T w_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Из монотонности оператора T следует справедливость неравенств $v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \ldots \leq x^* \leq \ldots \leq w_2 \leq w_1 \leq w_0$

Пусть $\alpha_n = \rho(x^*, \psi_n)$, а $\beta_n = \rho(x^*, \omega_n)$. Последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ не возрастают. Обозначим $t_n = \max\{\alpha_n, \beta_n\}$. Предположим, что $\lim_{n\to\infty} t_n = t \neq 0$. Тогда существуют положительные $q_1 < 1$ и $q_2 < 1$, для которых справедливы неравенства $T\mathcal{U}(t, x^*) \leq \mathcal{U}(q_1 t, x^*)$, $T\mathcal{U}(-t, x^*) \geq \mathcal{U}(-q_2 t, x^*)$. Учитывая эти неравенства, получаем $T\psi_n \geq T\mathcal{U}(-t_n, x^*) = T\mathcal{U}(t-t_n, \mathcal{U}(-t, x^*)) \geq \mathcal{U}(t-t_n-q_2 t, x^*)$, $T\omega_n \leq T\mathcal{U}(t_n, x^*) = T\mathcal{U}(t_n-t, \mathcal{U}(t, x^*)) \leq \mathcal{U}(t_n-t+q_1 t, x^*)$.

Так как $t_n \to t$ при $n \to \infty$ и $t > 0$, то найдутся такие q_0 ($0 < q_0 < 1$) и $t > 0$, что для всех $n \geq N$ справедливы неравенства $T\psi_n \geq \mathcal{U}(-q_0 t, x^*)$, $T\omega_n \leq \mathcal{U}(q_0 t, x^*)$.

Из определения метрики ρ следуют неравенства $\alpha_{n+1} = \rho(\psi_{n+1}, x^*) \leq q_0 t$, $\beta_{n+1} = \rho(\omega_{n+1}, x^*) \leq q_0 t$, противоречащие предположению. Сходимость последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ к x^* доказана. Сходимость последовательности $\{T^n x_0\}$ к неподвижной точке теперь очевидна.

Литература

1. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. - М., 1962.
2. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. - М., 1969.
3. Опойцев В.И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов. - Труды Моск. мат. о-ва, 1978, 36, с. 237-27.
4. Катков М.Л. Анализ одного класса монотонных операторов: - Дис. на соиск. канд. физ.-мат. наук, Свердловск.

Поступила 15 сентября 1984 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 517.98

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ОТОБРАЖЕНИЙ КАК ПРОБЛЕМА ОПТИМИЗАЦИИ

А.Х.Лиепиньш
ЛГУ им.П.Стучки

Пусть нашим миром в этой работе будет метрическое пространство X с расстоянием d на нем. Рассмотрим отображение $f: X \to X$

Обозначая множество всех вещественных неотрицательных чисел через R^+, определим отображение $t: X \to R^+$ для любого $x \in X$ равенством $t(x) := d(x, f(x))$

Положим $t_0 := \inf\{t(x) \mid x \in X\}$ (т.е. $t_0 := \inf t(X)$).

Будем исследовать проблему минимизации отображения t

Если проблема решение имеет, т.е. существует такое $x_0 \in X$, что $t(x_0) = t_0$, то в случае, когда $t_0 = 0$, x_0 является неподвижной точкой отображения f

I. Отметим некоторые из ситуаций, в которых $t_0 = 0$

Напомним, что:

1) f называется нерастягивающим, если $d(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$ для любых $x, y \in X$;

2) f называется асимптотически регулярным в $x \in X$, если $\lim_{n\to\infty} t(f^n(x)) = 0$

В случае, когда X - подмножество пространства Банаха (и $d(x,y) = \|x-y\|$ для любых $x, y \in X$), напомним, что:

1) X называется звездно выпуклым, если существует такое $x \in X$, что $\{sx + (1-s)y \mid y \in X \ \& \ s \in]0,1[\} \subset X$;

2) X называется линейно ограниченным, если $X \cap \{x + sy \mid s \in R^+\}$ ограничено для любых $x, y \in X$

Предложение I (ср. [5]). $t_0 = 0$, если f является нерастягивающим, а X - ограниченное замкнутое звездно выпуклое подмножество пространства Банаха.

Предложение 2 (ср. [4]). $t_0 = 0$, если f является нерастягивающим, а X - линейно ограниченное замкнутое вы-

пуклое подмножество рефлексивного пространства Банаха.

Предложение 3. $t_0 = 0$, если существует такое $x \in X$, что f асимптотически регулярно в x

2. Согласно теореме Вейерштрасса проблема минимизации отображения t заведомо имеет решение, если пространство X компактно и отображение f непрерывно. Таким образом, если f непрерывно (в частности, является нерастягивающим), представляют интерес теоремы, существование решения проблемы минимизации в которых утверждается без предположения компактности пространства X.

Теорема I (ср. [3], [I], [2]). Пусть X - выпуклое слабо компактное подмножество пространства Банаха. Предположим, что отображение f непрерывно.

Пусть для любых $x, y \in X$ существует такое $s \in]0,1[$ что $\| f(x) - f(y) \| \leq s\, t(x) + (1-s)\, t(y)$

Тогда проблема минимизации отображения t имеет решение. (При этом, если $t(x_0) = t_0$ и $t(y_0) = t_0$ для $x_0, y_0 \in X$, то $\| f(x_0) - f(y_0) \| \leq t_0$).

Доказательство. Через $\mathrm{co}\, A$ будем обозначать выпуклую оболочку множества $A \subset X$, через $\overline{\mathrm{co}}\, A$ - его замкнутую выпуклую оболочку.

Пусть $r \in R^+$. Положим $A_r = \{ x \in X \mid t(x) \leq r \}$

Установим, что $\overline{\mathrm{co}}\, f(A) \subset A$.

Отметим, что A замкнуто в силу непрерывности отображения t (непрерывно по условию отображение f). Таким образом, достаточно доказать, что $\mathrm{co}\, f(A) \subset A$

Пусть $x \in \mathrm{co}\, f(A)$ Тогда $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$, где $x_i \in A$ и $\alpha_i \in R^+$ ($i = 1, \ldots, n$), причем $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$
Так как $f(x_i) \in X$ ($i = 1, \ldots, n$) и X по условию выпукло, то $x \in X$ Тем самым отображение t определено в x
Имеем: $t(x) = \| x - f(x) \| = \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) - (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) f(x) \| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \| f(x_i) - f(x) \|$

Пусть $j \in \{1, \ldots, n\}$ фиксировано так, что $\| f(x_j) - f(x) \| = \max \{ \| f(x_i) - f(x) \| \mid i = 1, \ldots, n \}$. Существует такое $s \in]0,1[$ что $\| f(x_j) - f(x) \| \leq s\, t(x_j) + (1-s)\, t(x)$. Следовательно,

$$t(x) \leq s\, t(x_j) + (1-s)\, t(x) \quad \text{и} \quad t(x) \leq t(x_j) \leq r$$

т.е. $x \in A$.

Для каждого $n \in N$ положим $A_n := \overline{\mathrm{co}} \{ x \in X \mid t(x) \leq t_0 + \frac{1}{n} \}$
По построению $A_n \neq \emptyset$ и $A_n \supset A_{n+1}$ для любого $n \in N$

Следовательно, $\bigcap_{n\in N} A_n \neq \emptyset$, ибо X по условию слабо компактно. Пусть $x_0 \in \bigcap_{n\in N} A_n$. Согласно доказанному тогда $t(x_0) \leq t_0 + \frac{1}{n}$ для любого $n \in N$. Следовательно, $t(x_0) = t_0$

<u>Теорема 2.</u> Предположим, что пространство X полно и отображение t непрерывно.

Пусть существует такое отображение $\varphi : R^+ \times R^+ \to R^+$, что: I) $\lim_{(s_1,s_2)\to(0,0)} \varphi(s_1, s_2) = 0$;

2) $d(x, y) \leq \varphi(t(x), t(y))$ для любых $x, y \in X$

Тогда проблема минимизации отображения t имеет решение. (При этом единственное: если $t(x_0) = t_0$ и $t(y_0) = t_0$ для $y_0 \in X$, то $x_0 = y_0$.)

<u>Доказательство.</u> Существует такое отображение $\varphi : R^+ \times R^+ \to R^+$, что:

I) $\lim_{(s_1,s_2)\to(0,0)} \varphi(s_1, s_2) = 0$;

2) $d(x, y) \leq \varphi(t(x), t(y))$ для любых $x, y \in X$.

Вследствие первого условия тогда, обозначая $\sup\{\varphi(s_1, s_2) \mid s_1, s_2 \in R^+ \text{ и } \max\{|s_1 - t_0|, |s_2 - t_0|\} \leq \frac{1}{n}\}$ через t_n для любого $n \in N$, имеем: $\lim_{n\to+\infty} t_n = 0$.

Для каждого $n \in N$ положим $A_n = \{x \in X \mid t(x) \leq t_0 + \frac{1}{n}\}$.

Пусть $n \in N$. По построению $A_n \neq \emptyset$ и $A_n \supset A_{n+1}$. В силу непрерывности отображения t (непрерывно по условию отображение f) A_n замкнуто. Кроме того:

$$\operatorname{diam} A_n = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A_n\} \leq \sup\{\varphi(t(x), t(y)) \mid x, y \in A_n\} \leq$$
$$\sup\{\varphi(s_1, s_2) \mid s_1, s_2 \in R^+ \text{ и } \max\{|s_1 - t_0|, |s_2 - t_0|\} \leq \tfrac{1}{n}\} = t_n$$

Вследствие полноты пространства X заключаем, что $\bigcap_{n\in N} A_n \neq \emptyset$

Пусть $x_0 \in \bigcap_{n\in N} A_n$. Тогда $t(x_0) \leq t_0 + \frac{1}{n}$ для любого $n \in N$. Следовательно, $t(x_0) = t_0$

Если, кроме того, $t(y_0) = t_0$ для $y_0 \in X$, то $y_0 \in \bigcap_{n\in N} A_n$. Следовательно,

$d(y_0, x_0) \leq \lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam} A_n = 0$, т.е. $y_0 = x_0$.

3. Теоремы о неподвижных точках следуют согласно изложенному. Номер теоремы и предложения, обосновывающих теорему о неподвижных точках, указан в скобках после ее формулировки.

<u>Теорема 3</u> (ср. [2]). Пусть X - выпуклое слабокомпактное подмножество пространства Банаха. Предположим, что

отображение f является нерастягивающим.

Пусть для любых $x, y \in X$ существует такое $s \in]0,1[$, что $\| f(x) - f(y) \| \leq s \| x - f(x) \| + (1-s) \| y - f(y) \|$

Тогда f имеет единственную неподвижную точку (теорема I, предложение I).

Замечание, справедливость которого проверяется, ссылаясь на аксиому треугольника.

В рассматриваемой в работе ситуации такое отображение $\varphi_1 : R^+ \times R^+ \to R^+$, что:

I) $\lim_{(s_1,s_2)\to(0,0)} \varphi_1(s_1,s_2) = 0$;

2) $d(x, y) \leq \varphi_1(d(x, f(x)), d(y, f(y)))$ для любых $x, y \in X$;

существует тогда и только тогда, когда существует такое отображение $\varphi_2 \quad R^+ \times R^+ \to R^+$, что:

I) $\lim_{(s_1,s_2)\to(0,0)} \varphi_2(s_1,s_2) = 0$;

2) $d(f(x), f(y)) \leq \varphi_2(d(x, f(x)), d(y, f(y)))$ для любых $x, y \in X$.

Теорема 4. Пусть X - ограниченное замкнутое звездно выпуклое подмножество пространства Банаха. Предположим, что отображение f является нерастягивающим.

Пусть существует такое отображение $\varphi : R^+ \times R^+ \to R^+$ что: I) $\lim_{(s_1,s_2)\to(0,0)} \varphi(s_1,s_2) = 0$;

2) $\| f(x) - f(y) \| \leq \varphi(\| x - f(x) \|, \| y - f(y) \|)$ для любых $x, y \in X$.

Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку (теорема 2, предложение I).

Следствие, которое показывает, что теорема 4 обобщает теорему 3.

Пусть X - ограниченное замкнутое звездно-выпуклое подмножество пространства Банаха. Предположим, что отображение f является нерастягивающим и $\| f(x) - f(y) \| \leq \max \{ \| x - f(x) \|, \| y - f(y) \| \}$ для любых $x, y \in X$.

Тогда f имеет единственную неподвижную точку.

Теорема 5. Пусть X - линейно ограниченное замкнутое выпуклое подмножество рефлексивного пространства Банаха. Предположим, что отображение f является нерастягивающим.

Пусть существует такое отображение $\varphi \; R^+ \times R^+ \to R^+$ что: I) $\lim_{(s_1,s_2)\to(0,0)} \varphi(s_1,s_2) = 0$;

2) $\| f(x) - f(y) \| \leq \varphi(\| x - f(x) \|, \| y - f(y) \|)$ для любых $x, y \in X$

Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку (теорема 2, предложение 2).

Теорема, из которой, в частности, следует принцип Банаха.

Предположим, что пространство X полно и отображение непрерывно.

Пусть существует такое $x \in X$, что f асимптотически регулярно в x, и такое отображение φ $R^+ \times R^+ \to R^+$, что: I) $\lim_{(s,t)\to(0,0)} \varphi(s,t) = 0$;

2) $f($ $d(f(x), d(y, f(y)))$ для любых $x, y \in X$.

Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку (теорема 2, предложение 3).

Доказательство, которое, как оказывается, легко провести непосредственно, не ссылаясь на теорему 2 и предложение

Ограничимся доказательством существования.

Пусть $x_0 \in X$, f асимптотически регулярно в x_0, и отображение φ $R^+ \times R^+ \to R^+$ такое, что:

I) $\varphi(s,s) = 0$;

2) $d(f($ $\varphi(d(x, f(x)), d(y, f(y)))$ для любых $x, y \in X$

Пусть $\in N$ Имеем: $d(f^n(x_0), f^n(x_0)) \le d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) +$
$+ d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + d(f^n$ $) \le d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + \varphi(d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)), d(f^n($

Заключаем, что последовательность $(f^n(x_0))_{n\in N}$ фундаментальна и завершаем доказательство ссылкой на полноту пространства X и непрерывность отображения f

Литература

1. Лиепиньш А.Х. Колыбельная для маленького тигренка о неподвижных точках. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983, с.61-69.
2. Лиепиньш А.Х. Неподвижные точки отображений в слабокомпактном выпуклом множестве в пространстве Банаха. - В кн. Труды VIII Школы по теории операторов в функциональных пространствах. - Рига, 1983, т.2, с.15-16.
3. Kannan R. Fixed point theorems in reflexive Banach spaces.- Proc. Amer. Math. Soc., 1973, v. 38, p. 111-1
4. Reich S. The almost fixed point property for nonexpansi mappings.- Proc. Amer. Math. Soc., 1983, v.88, p. 44-4
5. Smart D.R. Fixed point theorems. Cambridge, 1974.

Поступила 27 июня 1984 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.831

О ПСЕВДОКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М.В.Матвеев
МГУ им.М.В.Ломоносова

Напомним, что топологическое пространство называется псевдокомпактным, если всякая непрерывная на нем функция ограничена. Все пространства в этой работе предполагаются вполне регулярными, символом βX, как обычно, обозначается расширение Стоуна-Чеха пространства X.

Значительно более узкий класс пространств, чем псевдокомпактные пространства, составляют так называемые счетно компактные пространства, т.е. пространства, в которых каждое бесконечное множество имеет хоть одну предельную точку. В работе [I] изучается вопрос, какие пространства представимы в виде пересечения некоторого семейства счетно компактных подпространств своего расширения Стоуна-Чеха. Получена

Теорема [I]. Если пространство X топологически полно, то существует множество $\{X_\alpha \ \alpha < 2^c\}$ счетно компактных подпространств из βX, удовлетворяющих равенству $X_\alpha \cap X_{\alpha'} = X$ для любых $\alpha < \alpha' < 2^c$.

С другой стороны, легко строятся примеры пространств, не представимых в таком виде. В связи с этим естественно поставить вопрос, какие пространства представимы в виде пересечения определенных семейств псевдокомпактных подпространств своего Стоун-Чаховского расширения. Нами будет доказана

Теорема I. Для каждого вполне регулярного пространства X существует такое семейство $\{X_\alpha \ \alpha < 2^c\}$ псевдокомпактных подпространств пространства βX, что $X_\alpha \cap X_{\alpha'} = X$ как только $\alpha < \alpha' < 2^c$.

Следствие. Каждое вполне регулярное пространство представимо в виде пересечения двух псевдокомпактных подпространств своего Стоун-Чаховского расширения.

Для доказательства теоремы I нам понадобится несколько простых вспомогательных утверждений. Напомним, что подпространство A топологического пространства X называется С-вложенным, если каждая непрерывная функция, заданная на A, имеет непрерывное продолжение на X. Счетные дискретные С-вложенные подпространства мы будем называть сильно расходящимися последовательностями. Множество всех сильно расходящихся последовательностей в пространстве X будем обозначать $\mathcal{A}(X)$. Следующие утверждения очевидны:

Лемма I. Пространство X псевдокомпактно тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}(X) = \varnothing$.

Лемма I'. Пусть X_0 - всюду плотное подпространство пространства X. Если пространство X не псевдокомпактно, то найдется последовательность $A \in \mathcal{A}(X)$ такая, что $A \subset X_0$.

Лемма 2. Пусть $A \in \mathcal{A}(X)$. Тогда существует гомеоморфизм пространства $[A]_{\beta X}$ на пространство βN, отображающий A на N.

Лемма 3. Пусть $A_1, A_2 \in \mathcal{A}(X)$, $|A_1 \cap A_2| < \aleph_0$. Тогда $[A_1]_{\beta X} \cap [A_2]_{\beta X} = A_1 \cap A_2$.

Лемма 4. Пусть $A_1, A_2 \in \mathcal{A}(X)$. Тогда $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}(X)$.

Напомним, что семейство множеств называется почти дизъюнктным, если пересечение любых двух его элементов конечно.

Лемма 5. Пусть $\mathcal{B}$ - максимальное (по включению) почти дизъюнктное подсемейство семейства множеств $\mathcal{A}(X)$ и пусть $X \subset Y \subset \beta X$. Тогда если для каждого $A \in \mathcal{B}$ подпространство $[A]_Y$ счетно компактно, то Y псевдокомпактно.

Следующая лемма является частным случаем теоремы из [I]:

Лемма 6. Существует такое семейство $\{N_\alpha \ \alpha < 2^c\}$ счетно компактных подпространств пространства βN, что $N_\alpha \cap N_{\alpha'} = N$, как только $\alpha < \alpha' < 2^c$.

Доказательство теоремы I. Выделим из $\mathcal{A}(X)$ максимальное почти дизъюнктное подсемейство $\mathcal{B}$. В силу леммы 2 и леммы 6 для каждого $B \in \mathcal{B}$ найдутся такие счетно компактные подпространства B_α, $\alpha < 2^c$ пространства $[B]_{\beta X}$, что $B_\alpha \cap B_{\alpha'} = B$ при $\alpha \neq \alpha'$. Для каждого $\alpha < 2^c$ по-

ложим $X_\alpha = \bigcup\{B_\alpha : B \in \mathfrak{B}\} \cup X$. Из леммы 5 вытекает, что пространства X_α псевдокомпактны. Покажем, что $X_\alpha \cap X_{\alpha'} = X$ при $\alpha \neq \alpha'$. Действительно, пусть $x \in X_\alpha \cap X_{\alpha'} \setminus X$. Тогда найдутся такие $B, B' \in \mathfrak{B}$ что $x \in B_\alpha \cap B'_{\alpha'} \setminus X$. Но тогда $B = B'$, иначе по лемме 2 мы имели бы $B_\alpha \cap B'_{\alpha'} \setminus X \subset [B]_{\beta X} \cap [B']_{\beta X} \setminus X = \emptyset$. Поэтому $x \in B_\alpha \cap B_{\alpha'} \setminus X$, откуда следовало бы $\alpha = \alpha'$.

Напомним, что цепью называется семейство множеств, линейно упорядоченное по включению. Аналогично теореме I доказывается

<u>Теорема 2.</u> Каждое вполне регулярное пространство X представимо в виде пересечения цепи псевдокомпактных подпространств пространства βX.

Теоремы I и 2 показывают, насколько различными могут быть псевдокомпактные расширения данного пространства X, лежащие в данном его бикомпактном расширении. Возникает задача классификации псевдокомпактных расширений, в частности, отыскания среди них минимальных и максимальных (в некотором смысле).

Псевдокомпактное расширение пространства X будем называть строгим, если каждое замкнутое псевдокомпактное подпространство пространства X замкнуто и в расширении.

<u>Теорема 3.</u> Для каждого вполне регулярного пространства X и для каждого его бикомпактного расширения bX существует строгое псевдокомпактное расширение $\sigma_b X \subset bX$.

<u>Доказательство.</u> Мы построим псевдокомпактное расширение, удовлетворяющее следующему более сильному условию, чем требование строгости: каждое замкнутое ограниченное множество в X замкнуто и в $\sigma_b X$. Пусть $\mathcal{F} = \{F \subset X : F$ замкнуто и ограничено в $X\}$. Положим $\sigma_b X = X \cup (bX \setminus \bigcup\{[F]_{bX} : F \in \mathcal{F}\})$. Покажем, что пространство $\sigma_b X$ псевдокомпактно. Пусть $A \subset bX \setminus \sigma_b X$ - замкнутое G_δ-множество в bX. Можно считать, что $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} O_i$, где O_i открыто в bX и $[O_{i+1}] \subset O_i$ для каждого $i \in N$. Так как $bX \setminus \sigma_b X = \bigcup\{[F] : F \in \sigma\}$, то найдется множество $F^* \in \sigma$ такое, что $A \cap [F^*]_{bX} \neq \emptyset$. Можно построить функции $f_i : bX \longrightarrow [0,1]$, принимающие значение 1 на $[O_{i+1}]$ и 0 на $bX \setminus O_i$. Функция

$\xi \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ определена и непрерывна на $\delta X \setminus A$. Но тогда $\xi|_X$ – непрерывная функция на X, неограниченная на F. Полученное противоречие доказывает, что $\delta X \setminus \pi_\delta X$ не содержит непустых замкнутых G_δ-множеств, т.е. пространство $\pi_\delta X$ псевдокомпактно (см. [2]). Строгость расширения π_δ следует непосредственно из его построения.

Предложение I. Расширение $\pi_\beta X$, построенное в предыдущей теореме, обладает следующим свойством типа максимальности: всякое строгое псевдокомпактное расширение пространства X является подпространством его непрерывного образа.

В работе [3] строится псевдокомпактное расширение $\pi X = X \cup (\beta X \setminus \upsilon X)$, где υX – Хьюиттовское расширение пространства X [2].

Предложение 2. Для всякого тихоновского пространства X имеет место включение $\pi X \subset \pi_\beta X$ (и следовательно, расширение πX является строгим псевдокомпактным расширением).

Предложение 3. Если существует несчетный измеримый кардинал m, то $\pi X \neq \pi_\beta X$ для некоторого пространства X.

Доказательство. Возьмем в качестве X дискретное пространство мощности m. Тогда X не будет вещественно компактным [2], и следовательно $\upsilon X \neq X$. Но тогда $\pi X \neq \beta X$, в то время как $\pi_\beta X = \beta X$, поскольку в X нет бесконечных ограниченных множеств.

Теорема 3 не имеет аналога для строгих счетно компактных расширений (счетно компактное расширение ρX пространства X называется строгим, если в нем замкнуто каждое замкнутое счетно компактное подпространство пространства X). Известны примеры нормальных пространств, не имеющих строгих счетно-компактных расширений [4], [5]. Однако для нормальных пространств теорема 3 имеет аналог в некотором классе пространств, промежуточном между счетно-компактными и псевдокомпактными.

Пространство X называется слабо счетно-компактным [6], [7], если у него есть всюду плотное подпространство, каждое бесконечное подмножество которого имеет предельную точку во всем пространстве. Строгим слабо счетно-компактным расширением пространства будем называть всякое пространство, содержащее X в качестве всюду плотного подпространства,

для которого выполнены следующие два условия: I) каждое бесконечное подмножество пространства X имеет предельную точку в расширении, 2) каждое замкнутое слабо счетно-компактное подмножество пространства X замкнуто и в расширении.

Теорема 4. Каждое нормальное пространство имеет строгое слабо счетно-компактное расширение.

Доказательство. Обозначим $Y = X \cup \bigcup\{[A]_X : A \in \mathcal{A}(X)\}$. По лемме 5 Y будет псевдокомпактным расширением пространства X, причем, как легко заметить, это псевдокомпактное расширение будет строгим. Тем более в Y окажутся замкнутыми все замкнутые слабо счетно-компактные подмножества пространства X.

Пусть Y – пространство. Рассмотрим следующее свойство

(H) Для каждого замкнутого $B \subset Y$ либо B слабо счетно-компактно, либо существует $A \subset B$ такое, что $A \in \mathcal{A}(Y)$.

Доказательство теоремы 4 распадается на две леммы.

Лемма 7. Если пространство X удовлетворяет свойству (H), то Y – строгое слабо счетно-компактное расширение X.

Доказательство. Покажем, что X счетно-компактно в Y. Пусть $B \subset X$ бесконечно. Если B слабо счетно-компактно, то B имеет предельную точку в X и, следовательно, в Y. В противном же случае в силу (H) найдется $A \subset B$ такое, что $A \in \mathcal{A}(X)$. Но тогда множество $[B]_Y \setminus B$ непусто, так как $[B]_Y \supset [A]_Y$ и $[A]_Y = [A]_{\beta X}$ – бесконечный бикомпакт. Строгость расширения Y следует из сделанного выше замечания.

Лемма 8. Каждое нормальное пространство обладает свойством (H).

Доказательство. Пусть $B \subset X$ – бесконечное замкнутое подпространство. Возможны два случая: (I) B псевдокомпактно. Тогда, как легко видеть, B слабо счетно компактно. (2) B не псевдокомпактно. Возьмем произвольное $A \in \mathcal{A}(B)$ (оно существует в силу леммы I). Тогда $A \in \mathcal{A}(X)$, так как A C-вложено в B, а B C-вложено в X как замкнутое подмножество нормального пространства. Лемма 8, а вместе с ней и теорема 4 доказаны.

Заметим, что не каждое пространство, обладающее свойством (H), нормально: примером может служить любое счетно-компактное пространство, не являющееся нормальным.

Перейдем к рассмотрению минимальных псевдокомпактных расширений (минимальность далее понимается в смысле включения).

Предложение 4. Пусть pX – минимальное псевдокомпактное расширение пространства X. Тогда к каждой точке из $pX \setminus X$ сходится хотя бы одна сильно расходящаяся в X последовательность.

Доказательство. Пусть $p \in pX \setminus X$. В силу минимальности расширения pX пространство $pX \setminus \{p\}$ не псевдокомпактно. По лемме I найдется последовательность $A \in \mathcal{J}(pX \setminus \{p\})$ такая, что $A \subset X$. Эта последовательность сходится к точке p. Действительно, в противном случае нашлась бы окрестность U точки p такая, что множество $B = A \setminus U$ бесконечно. Но тогда $B \in \mathcal{J}(pX)$, что противоречит псевдокомпактности pX.

Лемма 9. Пусть $A \in \mathcal{J}(Y)$, а B – последовательность в Y, сходящаяся к некоторой точке $p \in Y \setminus A$, причем $A \cap B = \emptyset$. Тогда множества A и B функционально отделимы в Y.

Доказательство. Так как Y вполне регулярно, а $p \in [A]$, то найдется непрерывная функция g на Y такая, что $g(A) = \{0\}$, а $g(p) = 2$. Функция h, задаваемая правилом

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } g(x) < 1, \\ 1, & \text{если } g(x) \geq 1, \end{cases}$$

также будет непрерывной на Y. Так как последовательность B сходится к точке p, а в некоторой окрестности точки p мы имеем $h(x) = 1$, то множество $C = \{x \in B : h(x) \neq 1\}$ конечно. Пусть $C = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Существуют окрестности $U_1, \ldots, U_n$ точек $x_1, \ldots, x_n$ соответственно, такие, что $[U_i] \cap [U_j] = \emptyset$ при $i \neq j$ и $([U_1] \cup \ldots \cup [U_n]) \cap (A \cup h^{-1}(1)) = \emptyset$. Найдется непрерывная на Y функция $\alpha(x)$ такая, что $\alpha(x_i) = 1$ при $i = 1, \ldots, n$ и $\alpha(Y \setminus (U_1 \cup \ldots \cup U_n)) = \{0\}$. Положим $f(x) = \alpha(x) + (1 - \alpha(x))\, h(x)$. Непосредственно проверяется, что функция