LATVIJAS UNIVERSITĀTES

ZINĀTNISKIE RAKSTI

ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

577

MATEMĀTIKA

DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

MATEMĀTIKA
DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI
Zinātniskie raksti

MATHEMATICS
DIFFERENTIAL EQUATIONS
Proceedings

МАТЕМАТИКА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Научные труды

577. sējums

Latvijas Universitāte
Rīga 1992

UDK 517.81(082)

MATEMĀTIKA. DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI

Matemātika. Diferenciālvienādojumi: zinātniskie raksti/ Atb. red. J.Klokova.- 577.sēj.ums.- Rīga: LU, 1992.- 138 lpp.

Rakstu krājums satur zinātniskos rakstus, kuri veltīti parasto diferenciālvienādojumu teorijai. Pētīti jautājumi par diferenciālvienādojumu atrisinājumu eksistenci un īpašībām. Daži raksti veltīti konkrēto problēmu izpētes metodēm.

Rakstu krājums paredzēts zinātniekiem, pasniedzējiem un studentiem, kuri nodarbojas ar parasto diferenciālvienādojumu un to atrisinājumu pētīšanu.

MATHEMATICS. DIFFERENTIAL EQUATIONS

The collection contains articles on the qualitative theory of ordinary differential equations. The problems of existence of solutions as well as their properties are investigated. Several articles are devoted to deve' ping of methodes of investigation of applied problems.

The collection is destined for researchers and students in the field.

МАТЕМАТИКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сборник содержит научные статьи по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуются вопросы существования решений, изучаются их свойства. Ряд статей посвящен разработке методов исследования конкретных практических задач.

Сборник предназначен для научных сотрудников, преподавателей и студентов, которые занимаются исследованиями в области обыкновенных дифференциальных уравнений.

SOLVABILITY OF THE INITIAL VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATION WITH SINGULARITIES

J.Cepitis

Summary. There are formulated sufficient conditions which ensure solvability of certain initial value problem for the n-th order differential equation having unsummable singularities.

1991 MSC 34A34

Consider differential equation

$$x^{(n)} = f(t,x,x', \ \dots \ ,x^{(n-1)}), \tag{1}$$

where $n \geq 2$, for some $\sigma \in (0,+\infty)$ and any $\delta \in (0,\sigma)$, function $f : [\delta,\sigma] \times F^n \to R$ satisfies Caratheodory's condition, but has, may be, unsummable singularities if $t = 0$.

Assume for $k = 1, \ \dots \ ,n-1$ existence of functions

$$\gamma_k : (0,\sigma] \to [0,+\infty)$$

having for all $\delta \in (0,\sigma)$ on $[\delta,\sigma]$ absolutely continuous derivatives of the order $n-k$ such that

$$\lim_{t \to 0+} \gamma_k(t) = +\infty , \tag{2}$$

$$\lim_{t \to 0+} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} \exp\Big(- \int_t^\sigma \gamma_k(\tau)d\tau\Big) < +\infty . \tag{3}$$

For fixed $l \in \{0,1, \ \dots \ ,n-2\}$ we introduce the initial conditions

$$\lim_{t \to 0+} x^{(i)}(t) = 0 \ , i = 0, \ \dots \ ,l, \tag{4_l}$$

$$\lim_{t \to 0+} \exp\Big(\int_t^\sigma \gamma_{l+1}(\tau)d\tau\Big) x^{(l)}(t) = c_l , \tag{5_l}$$

where $c_l \in R$, and shall investigate the solvability of the initial value problem (1),(4_l),(5_l).

As a solution of the initial value problem (1),(4_l),(5_l)

we mean a function x which for some $\tau \in (0,\sigma]$ is defined and has absolutely continuous derivative of the $(n-1)$ st order on $[0,\tau]$, satisfies conditions $(4_1),(5_1)$ and for every $\delta \in (0,\tau)$ almost everywhere in $[\delta,\tau]$ diferential equation (1). Therefore these solutions belong to the class of functions which usually designates with $AC_{n-1}([0,\tau])$.

Use designations

$$L_1 x = x' - \gamma_1(t)x, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$D_1 x = L_{n-1}x, \quad D_k x = D_{k-1}L_{n-k}x, \quad k = 2, \ldots, n-1,$$

let $c:(0,\sigma] \to [0,+\infty)$ is bounded function such that

$$\lim_{t\to 0+} c(t) = 0,$$

$$I_n(t) = \int_t^\sigma \int_{\xi_1}^\sigma \ldots \int_{\xi_{n-2}}^\sigma c(\xi_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-2} \exp\left(\int_{\xi_{n-i}}^{\xi_{n-i-1}} \gamma_{n-i}(\tau)d\tau\right) \times$$

$$\times \exp\left(\int_{\xi_1}^t \gamma_1(\tau)d\tau\right) d\xi_{n-1} \ldots d\xi_1, \quad \text{if } n > 2,$$

$$I_2(t) = \int_t^\sigma c(\xi_1)\exp\left(\int_{\xi_1}^t \gamma_1(\tau)d\tau\right)d\xi_1 .$$

Definition. We say that the condition c_1 is held if

$$\lim_{t\to 0+} \left|\exp\left(\int_t^\sigma \gamma_{1-1}(\tau)d\tau\right)\frac{d^1}{dt^1} I_n(t)\right| < +\infty, \qquad (6)$$

for some $M \in (0,+\infty)$, any $\delta \in (0,\sigma)$, $\tau \in (\delta,\sigma]$ and solution $x:[\delta,\tau] \to R$ of the differential equation (1) which satisfies estimate

$$|x(t)| \le M, \quad t \in [\delta,\tau],$$

the inequality

$$|D_{n-1}x(\delta)| \le c(\delta)$$

ensures validity in $[\delta,\tau]$ of the inequality

$$|D_{n-1}x(t)| \le c(t).$$

Theorem 1. Let the condition c_1 is held. Then the initial value problem $(1),(4_1),(5_1)$ has a solution x which in the domain of its definition satisfies estimate (7).

Proof. Let $c_1 \in R$ is fixed. Introduce auxiliary functions

$$\mu_0(t) = c_0 \exp\left(-\int_t^\sigma \gamma_1(\tau)d\tau\right) + (-1)^{n+1} I_n(t),$$

$$\mu_1(t) = -c_1 \int_t^\sigma \exp\left(\int_\sigma^{\xi_1} \gamma_2(\tau)d\tau\right) \exp\left(\int_{\xi_1}^t \gamma_1(\tau)d\tau\right) d\xi_1 + (-1)^{n+1} I_n(t),$$

$$\text{for } l \geq 2,\ \mu_l(t) = (-1)^l c_l \int_t^\sigma \int_{\xi_1}^\sigma \dots \int_{\xi_{l-1}}^\sigma \exp\left(\int_\sigma^{\xi_l} \gamma_{l+1}(\tau)d\tau\right) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{l-1} \exp\left(\int_{\xi_{l-i+1}}^{\xi_{l-i}} \gamma_{l-i+1}(\tau)d\tau\right) \exp\left(\int_{\xi_1}^t \gamma_1(\tau)d\tau\right) d\xi_1 \dots d\xi_{l-1} + (-1)^{n+1} I_n(t).$$

According to (2),(3),(6) we have

$$\lim_{t \to +\infty} \mu_l^{(i)}(t) = 0,\ i = 0, \dots, l.$$

It is clear that for some $s_1 \in (0,\sigma]$ inequalities

$$-M < \mu_l(t) < M,\ t \in (0, s_1]$$

are true.

Choose series of numbers $k \to s_k$, $k \to t_k$ such that

$$s_1 \in (0,\sigma),\ s_{k+1} \in (0, s_k),\ \lim_{k \to +\infty} s_k = 0,\ t_k \in (s_k, \sigma]$$

and solutions of the diferential equation (1) $x_k : [s_k, t_k] \to R$ satisfying the initial conditions

$$x_k^{(i)}(s_k) = \mu_l^{(i)}(s_k),\ i = 0, \dots, n-1, \tag{8}$$

and inequalities

$$-M < x_k(t) < M,\ t \in [s_k, t_k). \tag{9}$$

Notice that μ_l is the unique solution of the differential equation

$$D_{n-1} x = \varepsilon(t)$$

which satisfies first $(n-1)$ conditions of (8), thus

$$|D_{n-1} x_k(s_k)| = \varepsilon(t),$$

and according to condition c_l

$$|D_{n-1} x_k(t)| \leq \varepsilon(t),\ t \in (s_k, t_k]. \tag{10}$$

If t_k are chosen maximum right as possible, then one of the next three expressions

$$-M \le x_k(t_k) \ , \ x_k \le M \ , \ t_k = \sigma$$

is true at least.

Let $s = \inf_k \{t_k\}$. Since (9) and (10) $s \in (0,\sigma]$. Further, from (2),(3),(6) and (10) we may deduce that sequences of functions

$$k \to x_k \ , \ k \to x_k' \ , \ k \to x_k^{(n-1)}$$

are uniformly bounded and equicontinuous. This allows select for any $\delta \in (0,s)$ in $[\delta,s]$ uniformly convergent subsequence $m \to x_{k_m}$ limit of which is the solution of the differential equation (1).

Function $x:[0,s] \to R$ which is defined consequently

$$x(t) = \lim_{m\to\infty} x_{k_m}(t) \ , \ t \in (0,s] \ , \ x(t) = 0 \ , \ t = 0$$

is the solution of the differential equation (1), satisfies conditions $(4_1),(5_1)$ and also estimate (7). The theorem is proved.

Let by extension

$$s \in (0,\sigma] \ , \ c_1^{[1]} \in R \ , \ c_1^{[2]} \in [c_1^{[1]},+\infty),$$

and solutions of initial value problem (1),(4_1),(5_1) for every $c_1 \in [c_1^{[1]},c_1^{[2]}]$ are continuable on $[0,s]$. We say that $x \in S_1([c_1^{[1]},c_1^{[2]}])$ if $x \in AC_{n-1}([0,s])$ is a solution of the differential equation (1) and for some $c_1 \in [c_1^{[1]},c_1^{[2]}]$ satisfies conditions $(4_1),(5_1)$.

Connectedness of the set $S_1([c_1^{[1]},c_1^{[2]}])$ in the space of functions $AC_{n-1}([0,s])$ has the important meaning in investigation of boundary value problems for the differential equation (1), therefore we note the next result.

Theorem 2. Let the condition c_1 is hold. Then the set $S_1([c_1^{[1]},c_1^{[2]}])$ is connected in $AC_{n-1}([0,s])$.

Proof. Assume contrary, namely that x',x'' are arbitrary solutions of the differential equation (1) which belong to various connected components of the set $S_1([c_1^{[1]},c_1^{[2]}])$. Then for all $t_k \in (0,s)$ are found $\nu_k \in [0,1]$ such that there are no solutions of the differential equation (1) which satisfy equality

$$\alpha_k^{(i)} = \nu_k x^{-(i)}(t_k) + (1-\nu_k)x^{-(i)}(t_k),\ i = 0, \ldots, n-1.$$

for some $\alpha_k \in R^n$.

Let $k \to t_k$ is the sequence of numbers such that

$$t_{k+1} \in (0,t_k)\ ,\ \lim_{k\to\infty} t_k = 0$$

and x_k are solutions of the differential equation (1) which satisfy the initial conditions

$$x_k^{(i)}(t_k) = \alpha_k^{(i)}\ ,\ i = 0, \ldots, n-1.$$

As the condition c_1 is held we can from the sequence $k \to x_k$ select the subsequence $m \to k_m \to x_{k_m}$ which converges to the solution of the initial value problem (1),(4_1),(5_1) for some $c_1 \in [c_1^{(1)}, c_1^{(2)}]$. The proof completes by standard opinions (see [2]) now.

Example. Consider together with conditions (4_1),(5_1) the differential equation

$$\frac{d}{dt} L_{n-1}\, x + g(t) D_{n-1} x = f(t, x_1), \tag{11}$$

where function $g : (0,\sigma] \to R$ such that for all $\delta \in (0,\sigma)$ g is summable on $[\delta,\sigma]$ and for some $c \in [0,+\infty)$ negative part of the function $t \to (g(t)+c/t)$ is summable on $[0,\sigma]$,

$$x_1 = (x, \ldots, \exp(\int_t^\sigma \gamma_{1-1}(\tau)d\tau)^{(1)} \frac{d}{dt}\exp(\int_t^\sigma \gamma_{1+1}(\tau)d\tau)x^{(1+1)}, \ldots,$$

$$\frac{d^{n-1-1}}{dt^{n-1-1}}\exp(\int_t^\sigma \gamma_{1+1}(\tau)d\tau)x^{(n-1)}),$$

function $t \to t^{-c}f(t,x)$ satisfies the Caratheodory's condition on $[0,\sigma] \times R^n$.

Notice that particular case of this problem, where

$$n = 2\ ,\ \gamma_1(t) = p/t\ ,\ g(t) = (1+q)/t\ ;\ p \geq 1\ ,\ q > -2,$$

has been examined in the paper [1].

If the point $x_1(0)$ is determined by the initial conditions (4_1),(5_1) and $\rho : [0,\sigma] \to R$ is summable function which overwhelms function $t \to t^{-c}f(t,x)$ in some interior of the point $x_1(0)$, then choose

$$\varepsilon(t) = t^c \int_0^t \rho(\xi)\exp(\frac{1}{2}\int_\xi^t (|g(s)+c/s|-(g(s)+c/s))ds)d\xi$$

and repeat opinions from the paper [3] we easy convince of validity of the condition c_1, if only inequality (6) is true.

At the end notice that the differential operator

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i d^{n-i}}{t^i dt^{n-i}} x$$

where $\alpha_i \in R$, is often visible in applications. It can be expressed in the form of the left side of the differential equation (11) by functions

$$\gamma_i(t) = p_i/t \ , \ g(t) = q/t \ ; \ q, p_i \in R, i = 1, \ldots, n-1.$$

The conditions of the theorem 1 in such case are expressed by inequalities tieing the values $q, p_1, \ \ldots \ , p_{n-1}$.

References

1. Гризанс Г.П., Клоков Ю.А. Об одной начальной задаче для уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью //Латв.мат.ежегодник.-Рига:Зинатне, 1984.-Вып.28.-С.14-24.
2. Лепин А.Я., Пономарев В.Д. Связность множества решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве непрерывных функций //Латв.мат.ежегодник.-Рига:Зинатне, 1976. -Вып.17.-С.187-192.
3. Цепитис Я.В. Разрешимость краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью //Дифференциальные уравнения.-1983.- Т.19.- С.2071-2075.

J.Cepītis. Sākumvērtību problēmas atrisināmība diferenciālvienādojumam ar singularitātēm.

Anotāci a.Formulēti pietiekamie nosacījumi kādai sākumvērtību problēmu klasei n-tās kārtas diferenciālvienādojumam ar neintegrējamām singularitātēm.

Я.Цепитис. Разрешимость начальной задачи для дифференциального уравения с особенностями.

Аннотация. Приведены достаточные условия разрешимости начальных задач одного класса для дифференциального уравнения n-того порядка с несуммируемыми особенностями.

УДК 517.911.

Latvian University
Riga, boulevard Rainis 19

Received 27.04.92

ЕДИНСТВЕННОСТЬ И НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ф.Х.Садырбаев, А.Б.Цибулис

Аннотация. Рассматриваются краевые задачи для эллиптических уравнений вида

$$(\lambda(u,x)u')'=f(x), \qquad (1)$$

а также для систем, состоящих из двух уравнений вида (1). Приведены условия, обеспечивающие единственность решения, и некоторые примеры неединственности.

УДК 519.21

1. Рассматриваются краевые задачи для эллиптических уравнений и систем с непрерывными нелинейностями при старших производных. Системы такого вида возникают, например, из термодиффузионной задачи в квазистационарном случае [1, 2], когда разрывные нелинейности сглаживаются непрерывными функциями. Оказывается, что уже для простейших уравнений (и тем более для систем) такого вида решение краевых задач, вообще говоря, не единственно даже в классе гладких функций. Ниже приводятся примеры неединственности, а также некоторые условия, обеспечивающие единственность решения.

2. Пусть заданы числа $\lambda_1,\lambda_2>0$, A, B, функции $\lambda\in C(R\to[\lambda_1,\lambda_2])$, $f\in L_2(a,b)$ и ищется решение задачи

$$(\lambda(u)u')'=f, \qquad x\in(a,b), \qquad (1)$$

$$u(a)=A, \qquad u'(b)=B. \qquad (2)$$

Пример 1. Покажем, что задача (1)–(2) может иметь бесконечно много решений. Для этого рассмотрим функцию

$$u(x)=x+\ln(1+\gamma x e^{x}). \qquad (3)$$

Для любого $\gamma\geq 0$ она удовлетворяет соотношениям

$$u(0)=0, \qquad u'(1)=1,$$

$$(e^u u')'=(e^u)''=((1+\gamma x e^{-x})e^x)''=(e^x+\gamma x)''=e^x.$$

Отсюда следует, что при $f=e^x$, $a=A=0$, $b=B=1$ существуют $\lambda_2>1$ и гладкая функция $\lambda:R\to[1,\lambda_2]$ такая, что задача (1), (2) имеет бесконечно много решений вида (3).

В случае условий

$$u'(a)=A, \qquad u'(b)=B \tag{4}$$

решение уравнения (1) может быть не единственно даже при линейном коэффициенте λ. Например, для $\lambda=1$, $f=\cos x$, $a=A=B=0$, $b=\pi$ решениями задачи (1), (4) являются функции $u=c-\cos x$, где c – произвольная постоянная.

В случае же условий Дирихле справедливо

Предложение 1. Уравнение (1) при условиях

$$u(a)=A, \qquad)=B \tag{5}$$

может иметь не более одного решения в классе W_2^1 [3].

Доказательство проведем от противного, т.е. пусть u, v $(u\neq v)$ – два решения задачи (1), (5).

Положим

$$\kappa(v)=\int_0^v \lambda(t)\,dt \tag{6}$$

Тогда из (1) и того, что $(\kappa(v))'=\lambda(v)v'$, получим $\kappa(u)-\kappa(v)=c_1x+c_2$. В силу условий (5) имеем: $c_1=c_2=0$, и следовательно, $\kappa(u)=\kappa(v)$. Отсюда, $u=v$, так как функция κ монотонна.

Предложение 2. Пусть

$$\Big(\lambda(t)-\lambda(\tau)\Big)(t-\tau)\le 0 \qquad t,\tau\in R. \tag{7}$$

Тогда задача (1), (2) может иметь не более одного решения в классе W_2^1.

Доказательство. Пусть u, v – различные решения задачи (1), (2). Тогда из (1), (2) и (6) получаем

$$\kappa(u)-\kappa(v)=c(x-a) \tag{8}$$

$$\Big(\lambda(u(b))-\lambda(v(b))\Big)B=c, \tag{9}$$

где c – некоторая постоянная.

Рассмотрим случай $c>0$. Случай $c<0$ рассматривается вполне аналогично, а при $c=0$ так же, как и при доказательстве предложения 1, получаем $u=v$.

Из (3) имеем $\kappa(u)>\kappa(v)$, $x\in(a,b]$, и вследствие монотонности κ: $u(b)>v(b)$. Учитывая последнее неравенство, из (7) заключаем, что $(\lambda(u(b))-\lambda(v(b)))\le 0$, а это противоречит соотношению (9).

Замечание 1. В доказательствах единственности, приведенных выше, нигде не использовалась непрерывность функции λ. Вопросы разрешимости в классе W_2^1 эллиптических уравнений и систем с разрывными нелинейностями рассмотрены в [2, 4].

Предложение 3. Пусть $f\in L_2$, $\lambda: R\times[a,b]\to[\lambda_1,\lambda_2]$, $\lambda_1>0$, является липшицевой по первому аргументу, т.е. существует $c\in R$ такая, что

$$|\lambda(t,x)-\lambda(\tau,x)| \le c|t-\tau|, \qquad t,\tau\in R, \quad x\in[a,b].$$

Тогда уравнение

$$\left(\lambda(u,x)u'\right)'=f \tag{10}$$

при условиях (5) может иметь не более одного решения в классе W_2^1.

Доказательство. Пусть u, v $(u\ne v)$ – решения вариационного неравенства (ВР)

$$\int_a^b \left(\lambda(u,x)u'\xi'+f\xi\right)dx=0 \qquad \forall\xi\in\mathring{W}_2^1, \tag{11}$$

соответствующего задаче (1), (5).

Положим

$$k(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(u,x)-\lambda(v,x)}{u-v}\cdot v', & u\ne v \\ 0, & u=v \end{cases}$$

и относительно $v\in\mathring{W}_2^1$ рассмотрим следующее ВР:

$$\int_a^b \left(\lambda(u,v)v'+kv\right)\xi'dx=0 \qquad \forall\xi\in\mathring{W}_2^1. \tag{12}$$

Решение $v=0$ является его единственным решением. Это вытекает,

например, из [4], поскольку $k \in L_2$, а функция v на $W_2^1(a,b)$ является гельдеровой [3].

С другой стороны, из ВР (11) получаем

$$0 = \int_a^b (\lambda(u,v)u' - \lambda(v,x)v')\xi' dx =$$

$$= \int_a^b (\lambda(u,x)(u-v)' + k(u-v))\xi' dx,$$

т.е. что решением ВР (12) является функция $v = u - v$. Итак, пришли к противоречию: $u \equiv v$.

Оказывается, что в задаче (10), (5) липшицевость коэффициента λ существенна для единственности решения.

Пример 2. Пусть $a = A = B = 0$, $b = \Pi$, $f = \sin x - 3\sin^3 x$. В качестве λ возьмем непрерывную функцию такую, что

$$\lambda(t,x) = \begin{cases} 1+t^2, & t \le \sin x, \\ 1, & t \ge \sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x. \end{cases}$$

Тогда уравнению (10) и условиям (5) удовлетворяют функции $u = \sin x$ и $u = \sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x$.

3. Перейдем к рассмотрению задачи Дирихле для системы эллиптических уравнений

$$\begin{cases} (\alpha(u,v)u')' = f, \\ (\beta(u,v)v')' = g. \end{cases} \tag{13}$$

Приведем два примера неединственности решения системы (13) с условиями Дирихле, которые получаются из примера 2 неединственности решения задачи (10), (5).

Пример 3. Пусть $a = 0$, $b = \Pi$, $u(a) = v(a) = u(b) = 0$, $v(b) = \Pi$, $g = 0$, $\beta = 1$, а α - произвольная непрерывная функция такая, что

$$\alpha(t,\tau) = \begin{cases} 1+t^2, & t \le \sin\tau, \\ 1, & t \ge \sin\tau + \frac{1}{3}\sin^3\tau. \end{cases} \tag{14}$$

Тогда решениями системы (13) являются следующие пары функций: $(u_1,v_1)=(\sin x,x)$, $(u_2,v_2)=(\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x,x)$.

Пример 4. Пусть $g=f=\sin x-3\sin^3 x$, $a=0$, $b=\Pi$,

$$u(a)=u(b)=v(a)=v(b)=0, \tag{15}$$

α – произвольная непрерывная функция такая, что

$$\alpha(t,\tau)=\begin{cases} 1+t^2, & t\le\tau, \\ 1, & t\ge\tau+\frac{1}{3}\tau^4, \end{cases} \tag{16}$$

а $\beta(t,\tau)=\alpha(t,\tau)$. Тогда системе (13) удовлетворяют следующие пары функций:

$$(u_1,v_1)=(\sin x,\sin x+\tfrac{1}{3}\sin^3 x), \qquad (u_2,v_2)=(v_1,u_1).$$

Замечание 2. Липшицевы функции не могут удовлетворять соотношениям (14) или (16). Вопрос о единственности решения краевой задачи Дирихле для системы (13) в случае липшицевых коэффициентов α, β остается открытым.

В заключение приведем некоторые условия, обеспечивающие единственность решения системы (13), (15).

Предложение 4. Пусть хотя бы одна из функций f, g есть тождественный нуль.

Тогда задача (13), (15) имеет единственное решение в классе $\mathring{W}_2^1\times\mathring{W}_2^1$.

Доказательство существования решения можно провести, например, по принципу Шаудера, а для доказательства единственности, без ограничения общности, предположим, что $f=0$. Тогда из равенства

$$\int_a^b \alpha(u,v)u'\xi'\,dx = 0 \qquad \forall\xi\in\mathring{W}_2^1,$$

взяв в качестве ξ функцию u и учитывая, что $\alpha(u,v)>0$, получаем $u=\mathrm{const}$. Отсюда, в силу краевых условий, $u\equiv 0$. Теперь из предложения 1 следует, что решение v уравнения $(\beta(0,v)v')'=g$ определяется однозначно.

Предложение 4 справедливо также при замене нулевых условий